

# Classificação de Simetrias do Plano Euclidiano

**Lucy Yukie Uchina**



Universidade Federal do ABC

**Título:** Classificação de Simetrias do Plano Euclidiano

**Autor:** Lucy Yukie Uchina

**Orientador:** Prof. Dr. Rodrigo Roque Dias

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

**Banca Examinadora:**

**Prof. Dr. Rodrigo Roque Dias**

Universidade Federal do ABC

**Profa. Dra. Sandra Maria Zapata Yepes**

Universidade Federal do ABC

**Prof. Dr. Ícaro Gonçalves**

Universidade Federal do ABC

Santo André, 7 de julho de 2025.

Introdução	1
<b>1 Isometrias</b>	<b>4</b>
1.1 Definições e Propriedades Básicas . . . . .	4
1.2 Isometrias do Plano . . . . .	7
1.2.1 Translações . . . . .	7
1.2.2 Rotações . . . . .	11
1.2.3 Reflexões . . . . .	14
1.2.4 Reflexões Transladadas . . . . .	18
<b>2 Grupos</b>	<b>20</b>
<b>3 Propriedades das Isometrias</b>	<b>24</b>
3.1 Pontos Fixos . . . . .	24
3.2 Composições . . . . .	28
3.3 Paridade . . . . .	41
3.4 Classificação das Isometrias . . . . .	42
<b>4 Grupos de Papel de Parede</b>	<b>47</b>
4.1 Restrição Cristalográfica . . . . .	47
4.2 Grupos de Papel de Parede . . . . .	54
Referência Bibliográfica	83

Brevemente, gostaria de destacar meus agradecimentos ao meu orientador e amigo professor Rodrigo, por todas as correções e sugestões neste trabalho e pelo apoio e incentivo durante a graduação; ao meu amado Daniel, por me acompanhar e encorajar com docinhos durante esse processo; por fim, aos meus amigos e familiares que viram o trabalho se desenvolvendo.

Padrões de simetrias são observados frequentemente em nosso cotidiano, sendo encontrados na natureza, na arte e na arquitetura. Quando nos restringimos ao plano euclidiano, podemos classificar os padrões utilizando como base o conjunto das isometrias que, munido da operação de composição de funções, forma uma estrutura algébrica chamada grupo. Qualquer isometria pode ser descrita em termos de translações, rotações, reflexões e reflexões transladadas e, dessas quatro transformações, podemos estudar e classificar, juntamente com o Teorema da Restrição Cristalográfica, os 17 Grupos de Papel de Parede distintos.

**Palavras Chaves:** Isometria, Grupos, Restrição Cristalográfica, Grupo de Papel de Parede

Symmetry patterns are frequently observed in our daily lives, found in nature, art, and architecture. When restricted to the Euclidean plane, we can classify these patterns based on the set of isometries which, equipped with the operation of function composition, forms an algebraic structure called a group. Any isometry can be described in terms of translations, rotations, reflections, and glide reflections. From these four transformations, along with the Crystallographic Restriction Theorem, we can study and classify the 17 distinct Wallpaper Groups.

**Keywords:** Isometry, Groups, Crystallographic Restriction, Wallpaper Group

Quando pensamos em padrões de simetria no plano euclidiano, inúmeros exemplos surgem em nossa mente, passando desde simples estampas de tecidos até incríveis obras arquitetônicas. Desconsiderando os motivos que estes padrões trazem consigo, estas inúmeras possibilidades de simetrias que se repetem pelo plano se traduzem em apenas 17 grupos distintos e são denominados Grupos de Papel de Parede.

Uma primeira demonstração desse fato foi dada pelo matemático russo Evgraf Fedorov em 1891 no artigo “*Simmetrija na ploskosti*” [3] (Simetria no Plano, em tradução livre). Mais tarde, em 1924, o matemático húngaro George Pólya também desenvolveu uma demonstração, apresentada na publicação “*Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*” [8] (Sobre a Analogia da Simetria dos Cristais no Plano, em tradução livre). Pólya foi uma das influências que o artista holandês Maurits Cornelis Escher teve em grande parte de suas obras [1], juntamente com a arquitetura moura do palácio de Alhambra (ver figura 0.1), na Espanha, o qual Escher visitou em 1922 e 1936 [6].

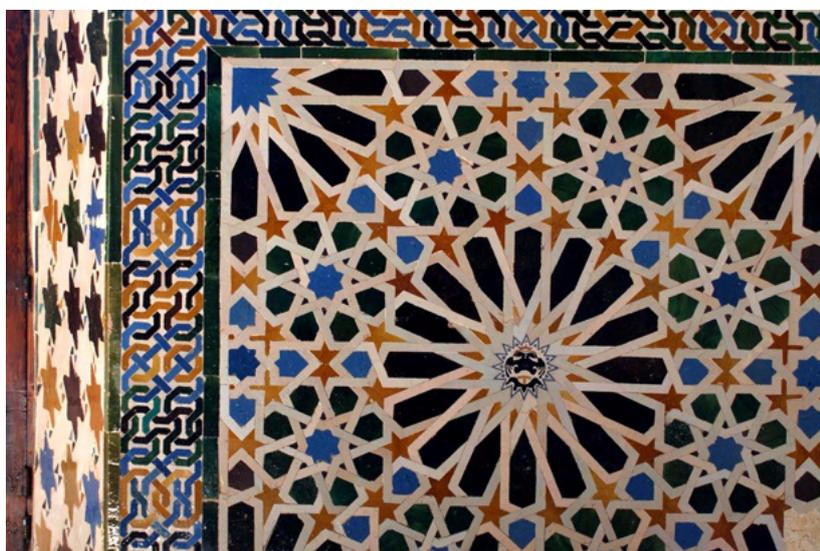


Figura 0.1: Mosaico encontrado em Alhambra.

Fonte: <https://www.alhambradegranada.org>

## Sumário

Apesar do próprio artista afirmar não possuir os conhecimentos matemáticos acerca das simetrias [2], é notável que vários estudos foram feitos a fim de compor suas obras. Há registros de diversas produções que mais tarde vieram a integrar outras composições (ver figuras 0.2 e 0.3).



Figura 0.2: M. C. Escher, *China Boy*, 1936.

Fonte: <https://mcescher.com>

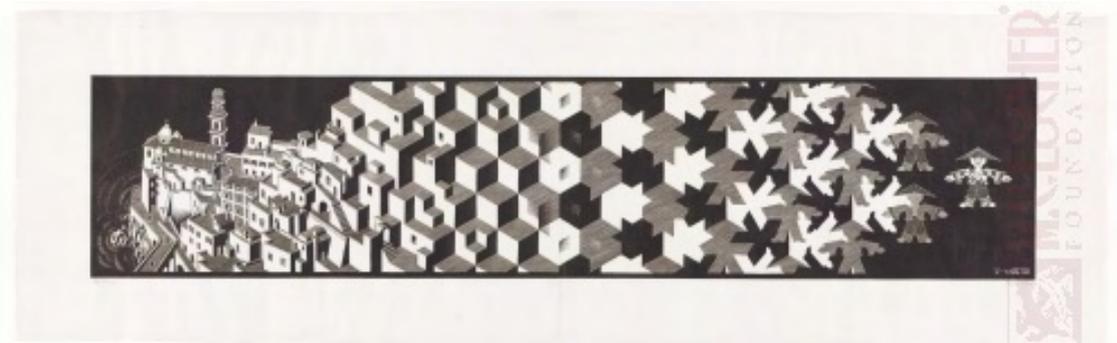


Figura 0.3: M. C. Escher, *Metamorphose I*, 1937, xilogravura, 19.5 cm × 90.8 cm.

Fonte: <https://mcescher.com>

Para realizar a classificação das simetrias, utilizamos a Teoria de Grupos e as isometrias no plano. No Capítulo 1, apresentamos a definição de isometria, algumas propriedades básicas e quatro isometrias importantes. No Capítulo 2, introduzimos o básico de Teoria de Grupos, bem como alguns resultados envolvendo as isometrias. No Capítulo 3, começamos a explorar mais a fundo as propriedades das isometrias em relação aos pontos fixos, as composições entre si e a paridade de tais aplicações,

## *Sumário*

o que nos leva ao resultado que afirma que qualquer isometria pode ser escrita em termos de translações, rotações, reflexões e reflexões transladadas. No Capítulo 4, é apresentada a definição do Grupo de Papel de Parede e suas propriedades que, juntamente com o Teorema da Restrição Cristalográfica, são as principais ferramentas para demonstrar o resultado principal do trabalho: classificar as simetrias do plano nos 17 Grupos de Papel de Parede.

Neste capítulo daremos a definição de isometria, um dos conceitos básicos mas fundamentais para o objetivo do trabalho. Mostraremos algumas de suas propriedades básicas e apresentaremos quatro aplicações que satisfazem tal definição.

Para que o trabalho não fique sobrecarregado de conteúdo, tomamos como base a geometria euclidiana plana, de modo que muitos dos resultados já conhecidos são utilizados sem a devida menção. As principais referências utilizadas foram [7] e [9].

## 1.1 Definições e Propriedades Básicas

**Definição 1.1 (Função Distância)** Seja  $\Pi$  um plano. Uma função  $d : \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **distância** se, para  $x, y, z \in \Pi$ , satisfaz

$$i. \quad d(x, y) \geq 0;$$

$$ii. \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$iii. \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$iv. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

A propriedade (iv) é conhecida como desigualdade triangular.

**Definição 1.2 (Isometria)** Seja  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  uma transformação. Dizemos que  $\phi$  é uma **isometria** se para quaisquer pontos  $P, Q \in \Pi$  tem-se

$$d(P, Q) = d(\phi(P), \phi(Q)).$$

Ou seja,  $\phi$  preserva distâncias.

**Definição 1.3 (Simetria)** Uma **simetria** é uma bijeção de um conjunto de pontos em si mesmo.

## 1 Isometrias

**Definição 1.4 (Relação estar entre)** Dados os pontos  $A, B$  e  $C$  no plano, dizemos que o ponto  $B$  *está entre*  $A$  e  $C$  se  $A, B$  e  $C$  são colineares e

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

Denotamos esse fato por  $A-B-C$ .

**Definição 1.5 (Segmento de reta)** Definimos o *segmento de reta* de extremos  $A$  e  $B$  como sendo o conjunto de pontos que estão entre  $A$  e  $B$ .

Consideraremos que a aplicação  $d$  é a distância euclidiana, ou seja, a distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os une, podendo ser calculada através da expressão

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

**Definição 1.6** Dizemos que uma isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  *preserva* um conjunto de pontos  $S \subset \Pi$  se  $\phi(S) = S$ . Se  $\phi(x) = x$  para todo  $x \in S$ , então dizemos que a isometria *fixa* o conjunto  $S$ .

Em particular, se uma isometria fixa um conjunto de pontos, então ela também o preserva, mas a recíproca não é verdadeira.

**Proposição 1.7** Sejam  $\phi$  uma isometria em  $\Pi$  e  $P, P', Q, Q' \in \Pi$  tais que  $\phi(P) = P'$  e  $\phi(Q) = Q'$ . Se  $R \in \overline{PQ}$ , então  $\phi(R) = R' \in \overline{P'Q'}$ , ou seja, as isometrias preservam a relação estar entre.

**Demonstração:** De fato, temos que

$$\begin{aligned} R \in \overline{PQ} &\iff d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q) \\ &\iff d(\phi(P), \phi(R)) + d(\phi(R), \phi(Q)) = d(\phi(P), \phi(Q)) \\ &\iff d(P', R') + d(R', Q') = d(P', Q'). \end{aligned}$$

Logo,  $R' \in \overline{P'Q'}$ . Note que, pela desigualdade triangular e pelo fato de que  $d$  é a distância euclidiana, temos que  $P', Q'$  e  $R'$  são colineares; do contrário, teríamos que  $d(P, Q) < d(P', Q')$ .  $\square$

**Teorema 1.8** Se  $\phi$  é uma isometria em  $\Pi$  e  $r \subset \Pi$  é uma reta, então  $\phi(r)$  é uma reta.

## 1 Isometrias

**Demonstração:** Sejam  $P, Q \in r$ , com  $P \neq Q$ , e sejam  $P' = \phi(P)$  e  $Q' = \phi(Q)$ . Tome  $s$  a reta que passa por  $P'$  e  $Q'$  e seja  $R \in r$  um ponto qualquer diferente de  $P$  e  $Q$ . Assim, temos três casos:

- $R \in \overline{PQ}$ ;
- $P \in \overline{RQ}$ ;
- $Q \in \overline{PR}$ .

Suponha que  $R \in \overline{PQ}$ . Pela Proposição 1.7, temos que  $R' = \phi(R) \in \overline{P'Q'}$  e, dessa forma,  $R' \in s$ . Os demais casos são feitos de forma análoga. Segue então que  $\phi(r) \subset s$ . Por outro lado, tome  $R' \in s$  arbitrário. Temos três casos a considerar:

- $R' \in \overline{P'Q'}$ ;
- $P' \in \overline{R'Q'}$ ;
- $Q' \in \overline{P'R'}$ .

Suponha que  $R' \in \overline{P'Q'}$  e tome  $R \in \overline{PQ}$  tal que  $d(R, Q) = d(R', Q')$ . Pela Proposição 1.7, temos que  $\phi(R) \in \overline{P'Q'}$ . Como  $\phi$  é uma isometria, temos que

$$d(\phi(R), Q') = d(\phi(R), \phi(Q)) = d(R, Q) = d(R', Q'),$$

de modo que  $R' = \phi(R)$ . Segue então que  $R' \in \phi(r)$ . Os demais casos são analisados de forma análoga. Assim, concluímos que  $s \subset \phi(r)$  e, portanto,  $\phi(r) = s$ .  $\square$

**Teorema 1.9** *Toda isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  preserva ângulos.*

**Demonstração:** Seja  $\widehat{ABC}$  um ângulo em  $\Pi$  e tome

- $\phi(A) = A'$ ;
- $\phi(B) = B'$ ;
- $\phi(C) = C'$ .

Como  $\phi$  é uma isometria, então temos que  $d(A, B) = d(A', B')$ ,  $d(A, C) = d(A', C')$  e  $d(B, C) = d(B', C')$ . Dessa forma, pelo caso LLL de congruência de triângulos, segue que  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , logo os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{A'B'C'}$  são congruentes.  $\square$

**Teorema 1.10** *Toda isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  é bijetiva e sua inversa  $\phi^{-1} : \Pi \rightarrow \Pi$  é também uma isometria.*

**Demonstração:** Para a injetividade, note que  $\forall P, Q \in \Pi$ , temos que

$$\phi(P) = \phi(Q) \implies d(\phi(P), \phi(Q)) = 0 \implies d(P, Q) = 0 \implies P = Q.$$

Para a sobrejetividade, dado  $P' \in \Pi$ , tome uma reta  $r_1 \subset \Pi$  tal que  $P' \notin r_1$ . Pelo Teorema 1.8,  $\phi(r_1) = s_1$  é uma reta em  $\Pi$ , de modo que  $P' \in s_1$  ou  $P' \notin s_1$ . Se  $P' \in s_1$ , então  $P' = \phi(P)$  para algum  $P \in r_1$ . Caso contrário, tome  $s_2$  a única reta perpendicular a  $s_1$  que passa por  $P'$  e defina  $\{Q'\} = s_1 \cap s_2$ . Temos assim que existe  $Q \in r_1$  tal que  $Q' = \phi(Q)$ . Tomando  $r_2$  a única reta perpendicular a  $r_1$  que passa por  $Q$ , pelos Teoremas 1.8 e 1.9, temos que  $\phi(r_2)$  é uma reta que contém  $\phi(Q)$  e é perpendicular a  $s_1$ . Da unicidade da perpendicular segue que  $s_2 = \phi(r_2)$ , o que implica que  $P' \in \phi(r_2)$ , de modo que existe  $P \in r_2$  tal que  $P' = \phi(P)$ . Portanto,  $\phi$  é sobrejetora.

Para a aplicação inversa, temos que

$$d(P, Q) = d(\phi(\phi^{-1}(P)), \phi(\phi^{-1}(Q))) = d(\phi^{-1}(P), \phi^{-1}(Q)),$$

para quaisquer  $P, Q \in \Pi$ . Logo,  $\phi^{-1}$  é uma isometria. □

**Proposição 1.11** *Se  $\phi, \varphi : \Pi \rightarrow \Pi$  são isometrias, então a composição (também chamada de **produto de isometrias**)  $\phi \circ \varphi : \Pi \rightarrow \Pi$  é uma isometria.*

**Demonstração:** Basta notar que

$$d(P, Q) = d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(\phi(\varphi(P)), \phi(\varphi(Q))) = d(\phi \circ \varphi(P), \phi \circ \varphi(Q)),$$

para todos  $P, Q \in \Pi$ . □

**Definição 1.12 (Involução)** *Chamamos **involução** uma função que tem ela própria por inversa.*

## 1.2 Isometrias do Plano

### 1.2.1 Translações

**Definição 1.13 (Translação)** *Sejam  $A, B \in \Pi$  pontos. A **translação**  $\tau_{A,B} : \Pi \rightarrow \Pi$  é dada por*

$$\tau_{A,B}(P) = P + \overrightarrow{AB} = P',$$

## 1 Isometrias

com  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$ . Em termos de coordenadas, se  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , consideramos  $a = x_B - x_A$  e  $b = y_B - y_A$  e assim temos que

$$\tau_{A,B}(x, y) = (x', y') = (x + a, y + b).$$

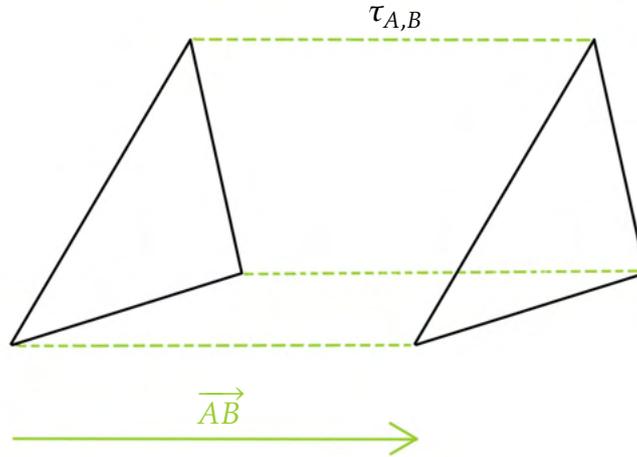


Figura 1.1: Translação  $\tau_{A,B}$  aplicada a um triângulo.

**Teorema 1.14** *Toda translação é uma isometria.*

**Demonstração:** Sejam  $P, Q \in \Pi$  pontos distintos,  $P' = \tau_{A,B}(P)$  e  $Q' = \tau_{A,B}(Q)$ . Pela definição, temos que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ . Podemos separar em dois casos:

1.  $P, P', Q$  e  $Q'$  são não colineares.

Como  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ , então  $\square PP'Q'Q$  é um paralelogramo e, conseqüentemente,  $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ . Assim,  $d(P, Q) = d(P', Q')$ .

2.  $P, P', Q$  e  $Q'$  são colineares.

Se todos os pontos são distintos e  $Q-P'-Q'$ , então temos  $d(P, Q) = d(P, P') - d(Q, P')$  e  $d(P', Q') = d(Q, Q') - d(Q, P')$ . Logo,

$$d(P, Q) - d(P', Q') = d(P, P') - d(Q, P') - d(Q, Q') + d(Q, P') = 0$$

Portanto,  $d(P, Q) = d(P', Q')$ .

Caso  $P'-Q'-P$ , de modo análogo concluímos que  $d(P, Q) = d(P', Q')$ .

Agora, caso  $P-P'-Q-Q'$ , então temos

$$d(P, Q) = d(P, P') + d(P', Q) \Rightarrow d(P', Q) = d(P, Q) - d(P, P')$$

## 1 Isometrias

e

$$d(P', Q') = d(P', Q) + d(Q, Q') \Rightarrow d(P', Q) = d(P', Q') - d(Q, Q').$$

Logo,

$$0 = d(P', Q) - d(P', Q) = d(P, Q) - d(P, P') - d(P', Q') + d(Q, Q') = d(P, Q) - d(P', Q').$$

Assim,  $d(P, Q) = d(P', Q')$ .

Analogamente, se  $P'-P-Q'-Q$ , segue que

$$d(P', Q') = d(P', P) + d(P, Q') \Rightarrow d(P, Q') = d(P', Q') - d(P', P)$$

e

$$d(P, Q) = d(P, Q') + d(Q', Q) \Rightarrow d(P, Q') = d(P, Q) - d(Q', Q).$$

Logo,

$$0 = d(P, Q') - d(P, Q') = d(P', Q') - d(P', P) - d(P, Q) + d(Q', Q) = d(P', Q') - d(P, Q).$$

Assim,  $d(P, Q) = d(P', Q')$ .

Caso  $P' = Q$ , então

$$d(P, Q) = d(P, P') = d(Q, Q') = d(P', Q').$$

De modo análogo, se  $P = Q'$ , segue que

$$d(P, Q) = d(Q', Q) = d(P', P) = d(P', Q').$$

Logo, podemos concluir que  $\tau_{A,B}$  é uma isometria. □

**Proposição 1.15** *Dados  $P$  e  $Q$  pontos distintos do plano, existe uma única translação  $\tau$  que leva  $P$  em  $Q$ .*

**Demonstração:** Seja  $\tau$  uma translação que leva  $P = (x_P, y_P)$  em  $Q = (x_Q, y_Q)$ . Assim, pela definição de translação, temos que

$$\tau(P) = Q \implies \tau(x_P, y_P) = (x_Q, y_Q) = (x_P + a, y_P + b).$$

Segue então que  $a = x_Q - x_P$  e  $b = y_Q - y_P$ , ou seja,  $\tau = \tau_{P,Q}$ . □

## 1 Isometrias

**Teorema 1.16** *Sejam  $\tau_{A,B}$  e  $\tau_{C,D}$  translações. Então*

- i.  $\tau_{A,B} \circ \tau_{C,D} = \tau_{X,Y}$ , com  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$ ;
- ii.  $\tau_{A,B}^{-1} = \tau_{B,A}$ .

**Demonstração:**

- i. Para um ponto  $P \in \Pi$ , temos

$$\begin{aligned}
 (\tau_{A,B} \circ \tau_{C,D})(P) &= \tau_{A,B}(\tau_{C,D}(P)) \\
 &= \tau_{A,B}(P + \overrightarrow{CD}) \\
 &= (P + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{AB} \\
 &= P + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}) \\
 &= P + \overrightarrow{XY} \\
 &= \tau_{X,Y}(P).
 \end{aligned}$$

- ii. Para um ponto  $P \in \Pi$ , temos

$$\begin{aligned}
 (\tau_{A,B} \circ \tau_{B,A})(P) &= \tau_{A,B}(\tau_{B,A}(P)) \\
 &= \tau_{A,B}(P + \overrightarrow{BA}) \\
 &= (P + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BA} \\
 &= P + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) \\
 &= P + \overrightarrow{0} \\
 &= id(P).
 \end{aligned}$$

Logo,  $\tau_{A,B}^{-1} = \tau_{B,A}$ .

□

**Proposição 1.17** *Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos não colineares em  $\Pi$ . Então  $\tau_{A,B} = \tau_{D,C}$  se, e somente se,  $\square ABCD$  é um paralelogramo.*

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Se  $\square ABCD$  é um paralelogramo, então  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , portanto  $\tau_{A,B} = \tau_{D,C}$ .

( $\Rightarrow$ ) Como  $A, B$  e  $C$  são não colineares e  $\tau_{A,B} = \tau_{D,C}$ , segue que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , de onde temos que  $\square ABCD$  é um paralelogramo. □

### 1.2.2 Rotações

**Definição 1.18 (Rotação)** Dados os pontos distintos  $O, P$  e  $Q$  em  $\Pi$ , a **rotação**  $\rho_{O,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi$  de centro  $O$  e ângulo  $\alpha = \angle POQ$  é dada por

$$\rho_{O,\alpha}(A) = \begin{cases} O, & \text{se } A = O \\ A', & \text{se } A \neq O \end{cases}$$

onde  $OA = OA'$  e  $\angle AOA' = \angle POQ$ .

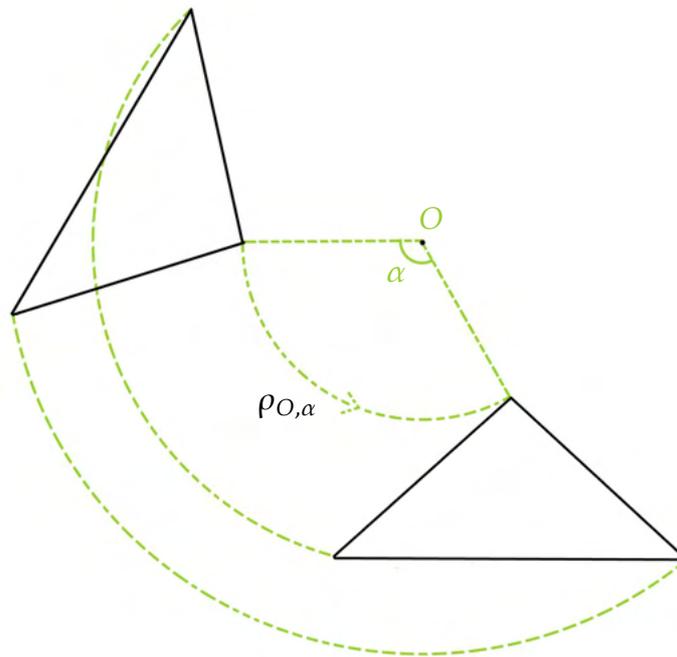


Figura 1.2: Rotação  $\rho_{O,\alpha}$  aplicada a um triângulo.

**Observação 1.19** Convencionamos que se  $\alpha > 0$  então a rotação se dá no sentido anti-horário e se  $\alpha < 0$  então a rotação será no sentido horário. Além disso, frisamos a diferença entre as notações  $\widehat{P\hat{O}Q}$  e  $\widehat{Q\hat{O}P}$ , onde  $\angle POQ = -\angle QOP$ .

Posto isso, o Teorema 1.9 expresso de outra forma afirma que toda isometria preserva ângulos a menos de sinal.

**Definição 1.20** Sejam  $A, O, P$  e  $Q$  pontos distintos. Dizemos que  $A \in \widehat{P\hat{O}Q}$  se  $A$  pertence ao semiplano determinado pelas semirretas  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OQ}$  e o ângulo  $\widehat{P\hat{O}Q}$ .

**Proposição 1.21** Sejam  $O, P, Q \in \Pi$  e  $\alpha = \angle POQ$ . Então para todo  $A \in \Pi \setminus \{O\}$  temos que os ângulos  $\widehat{P\hat{O}A'}$  e  $\widehat{Q\hat{O}A}$ , com  $A' = \rho_{O,\alpha}(A)$ , possuem a mesma bissetriz.

## 1 Isometrias

**Demonstração:** Se  $\alpha = 0$ , então o resultado é imediato. Suponha, então, que  $0 < \alpha < 2\pi$ . Sejam  $r$  a bissetriz de  $\widehat{QOA}$  e  $R \in r \cap \widehat{QOA}$  um ponto. Assim,

$$\angle POR = \angle POQ + \angle QOR = \angle ROA + \angle AOA' = \angle ROA'.$$

Logo,  $r$  é bissetriz de  $\widehat{POA'}$ .

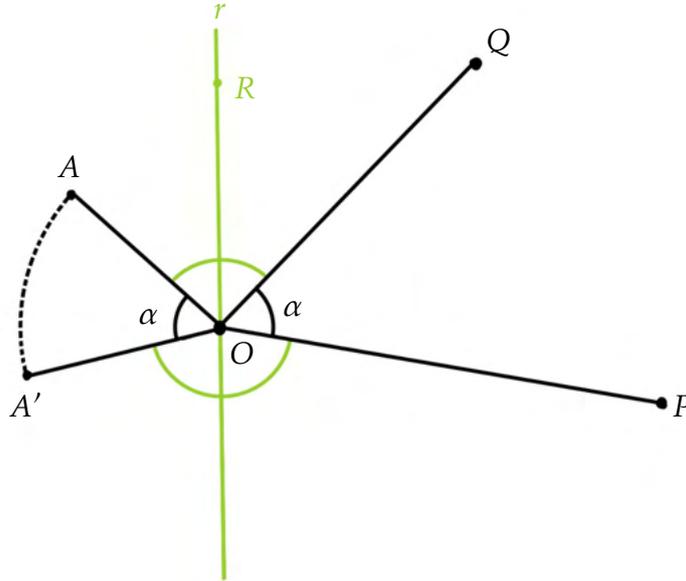


Figura 1.3: Construção caso  $0 < \alpha < 2\pi$ .

Portanto,  $\widehat{POA'}$  e  $\widehat{QOA}$  possuem a mesma bissetriz. □

**Teorema 1.22** *Toda rotação é uma isometria.*

**Demonstração:** Sejam  $O, X, Y \in \Pi$  pontos distintos. Se  $\alpha = 0$ , então  $\rho_{O,\alpha} = id$ , que é uma isometria. Supondo, então,  $\alpha \neq 0$ , definimos  $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$  e  $\rho_{O,\alpha}(Y) = Y'$ , de modo que  $\widehat{XOX'} \cong \widehat{YOY'}$ . Temos dois casos:

1. Se  $O, X$  e  $Y$  são colineares.

Se os pontos são colineares, então temos que

$$XY = XO + OY, \text{ se } X-O-Y,$$

$$XY = OY - OX, \text{ se } O-X-Y,$$

$$XY = OX - OY, \text{ se } O-Y-X.$$

## 1 Isometrias

Da definição, temos que  $OX = OX'$ ,  $OY = OY'$ . Como as isometrias preservam a relação *estar entre*, temos que  $XY = X'Y'$ .

2. Se  $O, X$  e  $Y$  são não colineares.

Pela Proposição 1.21, temos que  $X\widehat{O}Y'$  e  $X'\widehat{O}Y$  possuem a mesma bissetriz  $r$ , ou seja, tomando um ponto  $R \in r \cap X\widehat{O}Y'$ , então  $R\widehat{O}X' \cong Y\widehat{O}R$  e  $R\widehat{O}X \cong Y'\widehat{O}R$ . Assim, segue que

$$\angle XOY + \angle YOR = \angle XOR = \angle ROY' = \angle ROX' + \angle X'OY',$$

de onde temos que

$$\angle XOY + \angle ROX' = \angle ROX' + \angle X'OY'.$$

Portanto,  $\angle XOY = \angle X'OY'$ .

Em outras palavras,  $X\widehat{O}Y \cong X'\widehat{O}Y'$ . Então, pelo critério LAL de congruência de triângulos, temos que  $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ . Logo, concluímos que  $XY = X'Y'$ .

Portanto,  $\rho_{O,\alpha}$  é uma isometria. □

**Teorema 1.23** *Sejam  $\rho_{O,\alpha}$  e  $\rho_{O,\theta}$  rotações em  $\Pi$ . Então*

- i.  $\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O,\theta} = \rho_{O,\alpha+\theta}$ ;
- ii.  $\rho_{O,\alpha}^{-1} = \rho_{O,-\alpha}$ .

**Demonstração:**

- i. Tome  $P \in \Pi$  e defina  $P' = \rho_{O,\theta}(P)$  e  $P'' = \rho_{O,\alpha}(P')$ . Se  $P = O$ , então é imediato. Caso contrário, temos que  $\angle POP' = \theta$  e  $\angle P'OP'' = \alpha$ , logo  $\angle POP'' = \alpha + \theta$ . Como

$$\rho_{O,\alpha+\theta}(P) = P'' = \rho_{O,\alpha}(\rho_{O,\theta}(P)) = (\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O,\theta})(P),$$

segue que  $\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O,\theta} = \rho_{O,\alpha+\theta}$ .

- ii. Do item anterior, temos que

$$\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O,\alpha}^{-1} = id = \rho_{O,0} = \rho_{O,\alpha+(-\alpha)} = \rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O,-\alpha} \implies \rho_{O,\alpha}^{-1} = \rho_{O,-\alpha}.$$

□

### 1.2.3 Reflexões

**Definição 1.24 (Reflexão por um ponto)** Dado um ponto  $M \in \Pi$ , a **reflexão pelo ponto  $M$**  é a função  $\sigma_M : \Pi \rightarrow \Pi$  dada por

$$\sigma_M(A) = \begin{cases} A, & \text{se } A = M \\ A', & \text{se } A \neq M \end{cases}$$

onde  $A'$  é tal que  $M$  é ponto médio do segmento  $\overline{AA'}$ . Em outras palavras, podemos escrever  $\sigma_M(A) = M + \overrightarrow{AM}$ .

Em termos de coordenadas, se  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B) = \sigma_M(A)$ , como  $M = (a, b)$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , consideramos  $a = \frac{x_A + x_B}{2}$  e  $b = \frac{y_A + y_B}{2}$  e assim temos que  $\sigma_M(A)$

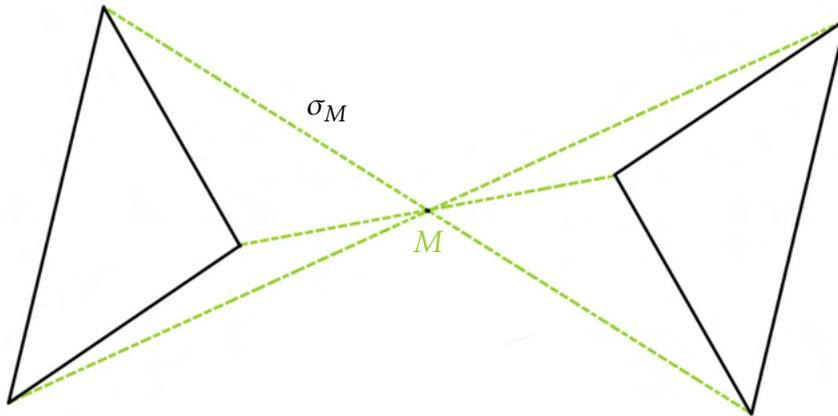


Figura 1.4: Reflexão por ponto  $\sigma_M$  aplicada a um triângulo.

**Teorema 1.25** Toda reflexão por ponto é uma isometria.

**Demonstração:** Sejam  $P, Q \in \Pi$  e  $\sigma_M$  a reflexão pelo ponto  $M$ . Se  $P = Q$ , então  $\sigma_M(P) = \sigma_M(Q)$  e

$$d(\sigma_M(P), \sigma_M(Q)) = 0 = d(P, Q).$$

Se  $P \neq Q$ , defina  $\sigma_M(P) = P'$  e  $\sigma_M(Q) = Q'$ . Temos dois casos a considerar.

1.  $P, Q$  e  $M$  são colineares.

Suponha que  $P \in \overline{MQ}$ . Temos que  $P' \in \overline{Q'M}$ , pela Proposição 1.7. Logo,

$$d(P', Q') = d(M, Q') - d(M, P') = d(M, Q) - d(M, P) = d(P, Q).$$

## 1 Isometrias

Note que se  $P = M$  temos

$$d(P', Q') = d(M, Q') = d(M, Q) = d(P, Q),$$

e se  $Q = M$  segue de modo análogo.

Caso  $Q \in \overline{PM}$  e  $M \in \overline{PQ}$ , o resultado segue de modo análogo.

2.  $P, Q$  e  $M$  são não colineares.

Se os pontos são não colineares e  $M$  é, por definição, o ponto médio dos segmentos  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$ , então  $d(P, M) = d(P', M)$  e  $d(Q, M) = d(Q', M)$ . Observe que  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$  são concorrentes em  $M$ , assim os ângulos  $\widehat{PMQ}$  e  $\widehat{P'MQ'}$  são opostos pelo vértice, logo são congruentes. Dessa forma, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos  $d(P, Q) = d(P', Q')$ .

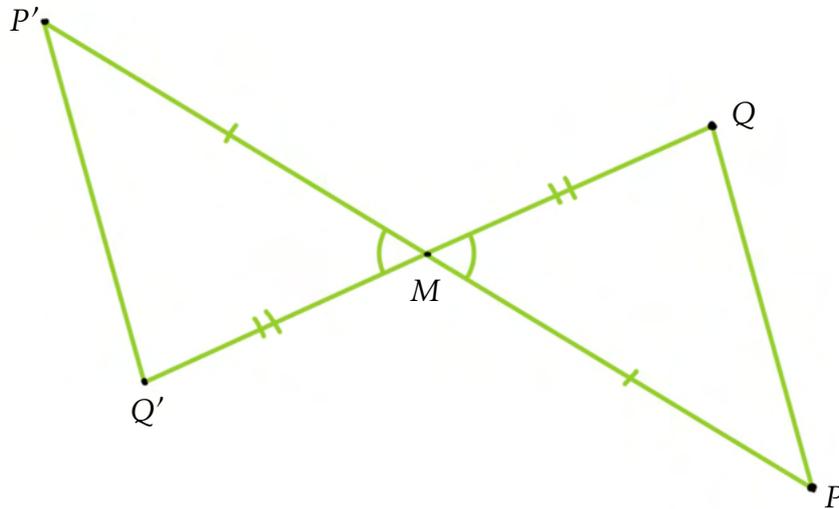


Figura 1.5: Construção do caso 2.

Portanto,  $\sigma_M$  é uma isometria. □

**Proposição 1.26** *As reflexões por ponto são involuções, ou seja,  $\sigma_M = \sigma_M^{-1}$ .*

**Demonstração:** Basta notar que, para  $P \in \Pi$ , como  $M$  é ponto médio de  $\overline{PP'}$ , temos

$$(\sigma_M \circ \sigma_M)(P) = \sigma_M(\sigma_M(P)) = \sigma_M(P') = P = id(P).$$

□

## 1 Isometrias

**Definição 1.27 (Reflexão por uma reta)** Dada uma reta  $r \subset \Pi$ , a **reflexão pela reta  $r$**   $\sigma_r : \Pi \rightarrow \Pi$  é dada por

$$\sigma_r(A) = \begin{cases} A, & \text{se } A \in r \\ A', & \text{se } A \notin r \end{cases}$$

onde  $A'$  é tal que  $r$  é mediatriz do segmento  $\overline{AA'}$ .

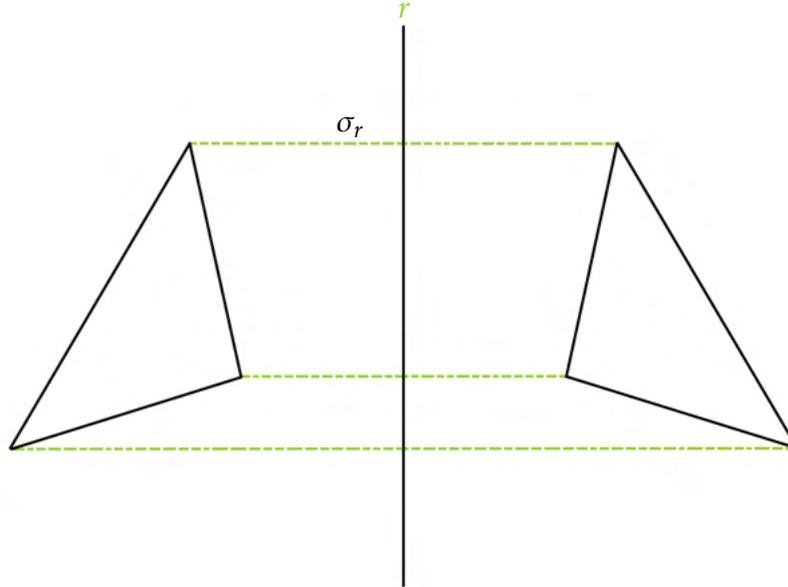


Figura 1.6: Reflexão por reta  $\sigma_r$  aplicada a um triângulo.

**Teorema 1.28** Toda reflexão por reta é uma isometria.

**Demonstração:** Sejam  $P, Q \in \Pi$  e  $\sigma_r$  a reflexão pela reta  $r$ . Defina  $\sigma_r(P) = P'$  e  $\sigma_r(Q) = Q'$ . Caso  $P, Q \in r$ , então, por definição,  $P' = P$  e  $Q' = Q$ , de onde o resultado é imediato. Se  $P \in r$  e  $Q \notin r$ , como  $r$  é mediatriz de  $\overline{QQ'}$ , segue que

$$d(\sigma_r(P), \sigma_r(Q)) = d(P', Q') = d(P, Q') = d(P, Q).$$

Se  $Q \in r$  e  $P \notin r$ , a análise é feita de maneira análoga.

Resta verificar o caso em que  $P, Q \notin r$ .

Suponha que  $P, P', Q$  e  $Q'$  são colineares. O resultado segue do fato de que  $r$  é mediatriz dos segmentos  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$ .

Por último, vamos separar em dois casos:

1.  $P$  e  $Q$  pertencem ao mesmo semiplano definido pela reta  $r$ .

## 1 Isometrias

Tome a reta  $s = \overleftrightarrow{QQ'}$  e os pontos  $A, B \in s$  de modo que a reta paralela a  $r$  que passa por  $P$  intersecta  $s$  em  $A$  e a reta paralela a  $r$  que passa por  $P'$  intersecta  $s$  em  $B$ . Ou seja,  $\overleftrightarrow{PA} // r$  e  $\overleftrightarrow{P'B} // r$ . Assim, sendo  $\{C\} = r \cap s$ , temos que  $d(A, C) = d(B, C)$ , uma vez que  $r$  é mediatriz de  $\overline{PP'}$ , logo

$$d(Q, A) = d(Q, C) - d(A, C) = d(Q', C) - d(B, C) = d(Q', B).$$

Além disso, temos que  $d(P, A) = d(P', B)$  e os ângulos  $\widehat{PAQ}$  e  $\widehat{P'BQ'}$  são congruentes pois, tomando  $M = r \cap \overline{PP'}$ , obtemos os retângulos  $\square APMC$  e  $\square BP'MC$ . Segue então pelo caso LAL de congruência de triângulos que  $\triangle PAQ \cong \triangle P'BQ'$  e, portanto,  $d(P, Q) = d(P', Q')$ .

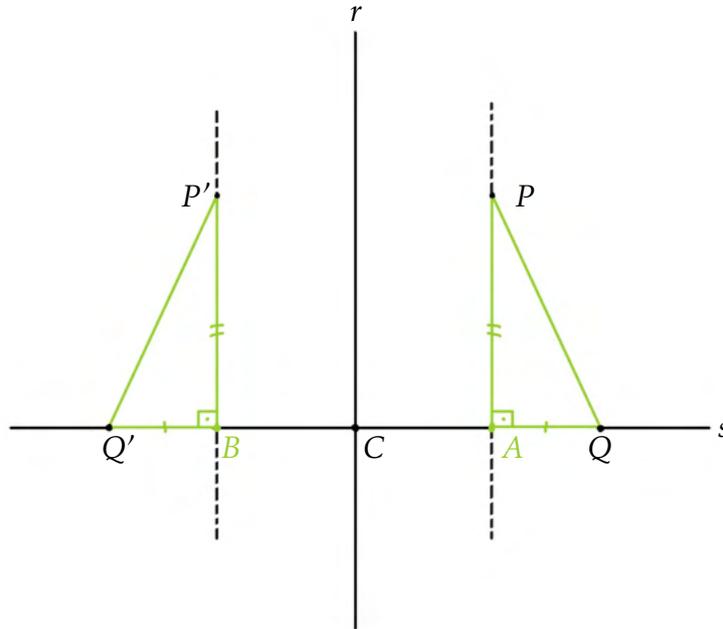


Figura 1.7: Construção do caso 1.

2.  $P$  e  $Q$  pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta  $r$ .

Defina  $\{A\} = r \cap \overleftrightarrow{PQ}$ ,  $\{B\} = r \cap \overleftrightarrow{PP'}$  e  $\{C\} = r \cap \overleftrightarrow{QQ'}$ . Como a reta  $r$  é mediatriz dos segmentos  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$ , temos que  $d(P, A) = d(P', A)$  e  $d(Q, A) = d(Q', A)$ , de forma que os triângulos  $\triangle PAP'$  e  $\triangle QAQ'$  são isósceles de base  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$ , respectivamente. Então,  $r$  coincide com a bissetriz dos ângulos  $\widehat{PAP'}$  e  $\widehat{QAQ'}$ , de forma que  $\widehat{PAB} \cong \widehat{BAP'}$  e  $\widehat{QAC} \cong \widehat{CAQ'}$ . Por construção,  $\widehat{PAB}$  e  $\widehat{QAC}$  são opostos pelo vértice, então  $\angle PAB = \angle QAC$ . Disso temos que os ângulos  $\widehat{PAP'}$  e  $\widehat{QAQ'}$  são congruentes. Por  $\widehat{QAQ'}$  e  $\widehat{Q'AP}$ ,  $\widehat{PAP'}$  e  $\widehat{P'AQ}$  serem suplementares, segue que

$P'-A-Q'$ . Logo,

$$d(P, Q) = d(P, A) + d(A, Q) = d(P', A) + d(A, Q') = d(P', Q') = d(\sigma_r(P), \sigma_r(Q)).$$

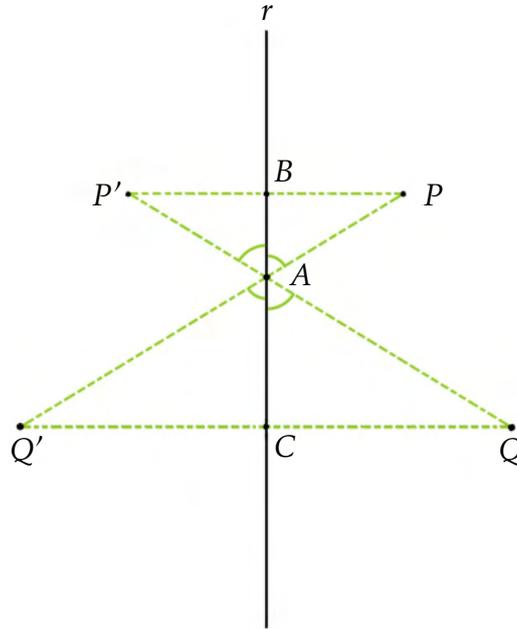


Figura 1.8: Construção do caso 2.

Portanto,  $\sigma_r$  é uma isometria. □

**Proposição 1.29** *As reflexões por reta têm por inversa si mesmas, ou seja,  $\sigma_r = \sigma_r^{-1}$ .*

**Demonstração:** Análoga à Proposição 1.26. □

**Proposição 1.30** *Uma reflexão por reta é uma transformação que inverte semiplanos.*

**Demonstração:** Dada uma reta  $r$ , o plano é dividido em dois semiplanos distintos por ela. A imagem de um ponto  $P \in \Pi$  pela reflexão  $\sigma_r$  resulta em um ponto simétrico a  $P$  em relação a  $r$ , ou seja,  $\sigma_r$  leva pontos de um semiplano ao semiplano oposto, invertendo-os. □

### 1.2.4 Reflexões Transladadas

**Definição 1.31 (Reflexão transladada)** *Seja  $\vec{AB} \in \Pi$  um vetor não nulo e  $r \subset \Pi$  uma reta tal que  $r \parallel \vec{AB}$ . A **reflexão transladada** determinada por  $\vec{AB}$  e  $r$  é a composição  $\sigma_{\vec{AB}, r} = \tau_{A,B} \circ \sigma_r : \Pi \rightarrow \Pi$  dada por  $\sigma_{\vec{AB}, r}(P) = \tau_{A,B}(\sigma_r(P))$ . A reta  $r$  é chamada **eixo da reflexão transladada**.*

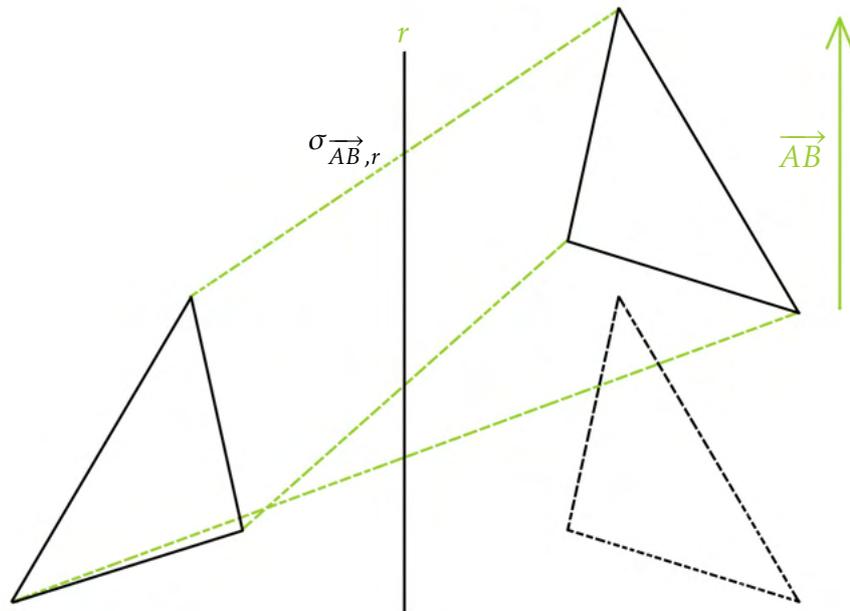


Figura 1.9: Reflexão transladada  $\sigma_{\vec{AB},r}$  aplicada a um triângulo.

**Teorema 1.32** *Toda reflexão transladada é uma isometria.*

**Demonstração:** Imediata da Definição 1.31 e da Proposição 1.11. □

Como as reflexões transladadas são, por definição, uma composição de isometrias, os resultados que as envolvam serão agrupados na Seção 3.2.

Outro conceito importante para a nossa classificação são as estruturas algébricas chamadas grupos. Provaremos que o conjunto das isometrias forma um grupo e que algumas isometrias possuem a propriedade de comutar entre si. A principal referência utilizada foi [4].

**Definição 2.1 (Grupo)** *Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto munido de uma operação binária  $*$ . Dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo** se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- $\forall a, b, c \in G$  tem-se  $(a * b) * c = a * (b * c)$  (associatividade)
- $\exists e \in G \forall a \in G$  tem-se que  $e * a = a = a * e$  (existência do elemento neutro)
- $\forall a \in G \exists a' \in G$  tal que  $a * a' = a' * a = e$  (existência do elemento inverso)

Neste caso, chamamos  $a'$  de inverso de  $a$  em  $G$  e denotamos por  $a' = a^{-1}$ . Por vezes, é comum denotarmos  $a * b$  por  $ab$ . Além disso, definimos  $a^{-n} = (a^{-1})^n$ .

**Proposição 2.2** *Os elementos  $e$  e  $a^{-1}$  da definição anterior são únicos em um grupo  $G$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $e, \bar{e} \in G$  sejam ambos elementos neutros. Então, pela definição,  $e = e\bar{e} = \bar{e}$ , logo é único. Para o elemento inverso, suponha que existam  $a^{-1}, \bar{a}^{-1} \in G$  tais que  $a^{-1}a = e$  e  $a\bar{a}^{-1} = e$ . Logo

$$a^{-1} = a^{-1}e = a^{-1}(a\bar{a}^{-1}) = (a^{-1}a)\bar{a}^{-1} = e\bar{a}^{-1} = \bar{a}^{-1}.$$

Portanto,  $a^{-1}$  é único. □

**Definição 2.3 (Ordem do grupo)** *A **ordem do grupo**  $G$ , denotado por  $|G|$ , é o número de elementos que  $G$  possui. Se  $G$  possui um número finito de elementos, dizemos que  $G$  é um **grupo finito**; caso contrário, dizemos que  $G$  é um **grupo infinito**.*

**Definição 2.4 (Subgrupo)** *Seja  $(G, *)$  um grupo e  $H \subset G$  não vazio. Dizemos que  $H$  é um **subgrupo** de  $(G, *)$  se a operação  $*$  é fechada em  $H$  e  $(H, *)$  é um grupo. Nesse caso, escrevemos  $(H, *) \leq (G, *)$  ou, mais sucintamente,  $H \leq G$ .*

## 2 Grupos

**Proposição 2.5** *Sejam  $G$  um grupo e  $H \subset G$ ,  $H \neq \emptyset$ . Então  $H \leq G$  se, e somente se,*

*i. se  $a, b \in H$ , então  $ab \in H$ ;*

*ii.  $\forall a \in H$  tem-se  $a^{-1} \in H$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Se  $H \leq G$ , então (i) e (ii) são satisfeitos pois  $H$  é grupo.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que valem (i) e (ii). Por (i), a operação que torna  $G$  um grupo está definida em  $H$ . A associatividade dos elementos de  $H$  é herdada pela associatividade de  $G$ . Seja agora  $a \in H$ . Por (ii), temos que  $a^{-1} \in H$  e por (i),  $e = aa^{-1} \in H$ . Logo, existe elemento neutro em  $H$ .  $\square$

**Teorema 2.6** *O conjunto  $\mathcal{G}$  de todas as isometrias do plano munido da operação de composição de funções forma um grupo.*

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{G}$  o conjunto de todas as isometrias em  $\Pi$  e tome  $\tau, \rho, \sigma \in \mathcal{G}$ .

- Associatividade

Temos que para todo  $P \in \Pi$ ,

$$(\tau \circ (\rho \circ \sigma))(P) = \tau((\rho \circ \sigma)(P)) = \tau(\rho(\sigma(P))).$$

Por outro lado,

$$((\tau \circ \rho) \circ \sigma)(P) = (\tau \circ \rho)(\sigma(P)) = \tau(\rho(\sigma(P))).$$

Logo,  $\tau \circ (\rho \circ \sigma) = (\tau \circ \rho) \circ \sigma$ .

- Elemento neutro

Temos que a transformação identidade  $id : \Pi \rightarrow \Pi$  pertence a  $\mathcal{G}$  e

$$id \circ \tau = \tau = \tau \circ id$$

para todo  $\tau \in \mathcal{G}$ .

- Elemento inverso

Pelo Teorema 1.10, toda isometria é uma bijeção, logo possui inversa, e sua inversa também é uma isometria.

Portanto,  $(\mathcal{G}, \circ)$  é um grupo.  $\square$

## 2 Grupos

**Proposição 2.7** *O conjunto de todas as simetrias de um conjunto de pontos  $S$  forma um grupo.*

**Demonstração:** Análogo ao Teorema 2.6.  $\square$

**Definição 2.8 (Grupo abeliano)** *Um grupo  $G$  é dito **abeliano** se vale a propriedade comutativa, ou seja, se para quaisquer  $a, b \in G$  tem-se  $ab = ba$ .*

**Proposição 2.9** *O conjunto  $\mathcal{T}$  de todas as translações do plano forma um grupo abeliano.*

**Demonstração:** A translação pelo vetor nulo equivale à identidade. Pelo Teorema 1.16, a composição de translações resulta em uma translação e a inversa de uma translação é uma translação. Logo, pela Proposição 2.5, segue que  $\mathcal{T} \leq \mathcal{G}$  e, portanto,  $\mathcal{T}$  é grupo.

Para a comutatividade do grupo, basta notar que, para um ponto  $P \in \Pi$ , temos

$$\begin{aligned}(\tau_{A,B} \circ \tau_{C,D})(P) &= P + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}) \\ &= P + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \\ &= (\tau_{C,D} \circ \tau_{A,B})(P).\end{aligned}$$

$\square$

**Proposição 2.10** *O conjunto de todas as rotações com centro em  $O$  forma um grupo abeliano.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 1.23, o produto de duas rotações com centro em  $O$  é uma rotação com centro em  $O$  e a inversa de uma rotação com centro em  $O$  também é uma rotação com centro em  $O$ . Além disso,  $\rho_{O,0} = id$ . Logo, o conjunto das rotações é subgrupo das isometrias e, portanto, um grupo.

Para a comutatividade, note que

$$\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O,\theta} = \rho_{O,\alpha+\theta} = \rho_{O,\theta+\alpha} = \rho_{O,\theta} \circ \rho_{O,\alpha}.$$

$\square$

**Definição 2.11 (Subgrupo gerado)** *Sejam  $G$  um grupo e  $X \subset G$ . Denotamos por  $\langle X \rangle$  o subgrupo gerado por  $X$ , definido por  $\langle X \rangle = \bigcap \{H \mid H \leq G \text{ e } X \subset H\}$ .*

**Observação 2.12** *O conjunto  $\langle X \rangle$  é, de fato, um subgrupo de  $G$  e sua definição não é uma intersecção de uma família vazia, uma vez que o próprio  $G$  é um elemento da família considerada.*

## 2 Grupos

**Definição 2.13 (Grupo cíclico)** Dizemos que  $G$  é um **grupo cíclico** se pode ser gerado por um único elemento. Um grupo cíclico finito de ordem  $n$  é denotado  $C_n$ .

## 3 PROPRIEDADES DAS ISOMETRIAS

Agora que já apresentamos os conceitos básicos necessários, podemos deduzir propriedades mais específicas de cada isometria. Nesta primeira seção, exploramos o que ocorre quando existem pontos fixos ou não numa isometria e quando algum subconjunto do plano é preservado. Depois, examinaremos as composições entre isometrias e, como mencionado no primeiro capítulo, os resultados das reflexões transladadas serão exibidos neste momento. Em seguida, discutiremos a paridade das isometrias, que nos permitirá escrever algumas composições de maneira mais enxuta. Na quarta seção, mostraremos que os quatro tipos de isometrias que viemos estudando até o momento são, na verdade, os únicos quatro tipos de isometrias que existem, ou seja, qualquer aplicação que satisfaça a definição de isometria pode ser classificada em um destes quatro tipos de isometrias além da aplicação identidade. As principais referências utilizadas foram [7] e [9].

### 3.1 Pontos Fixos

**Proposição 3.1** *Seja  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria que fixa três pontos não colineares. Então,  $\phi = id$ .*

**Demonstração:** Sejam  $P, Q, R \in \Pi$  não colineares tais que  $\phi(P) = P$ ,  $\phi(Q) = Q$  e  $\phi(R) = R$ . Suponha, por absurdo, que  $\phi$  não seja a identidade. Então, existe  $A \in \Pi$  tal que  $\phi(A) \neq A$ . Dessa forma, como

$$d(P, A) = d(\phi(P), \phi(A)) = d(P, \phi(A)),$$

então  $P$  pertence à mediatriz do segmento  $\overline{A\phi(A)}$ . Da mesma maneira, podemos concluir que  $Q$  e  $R$  pertencem à mediatriz do segmento  $\overline{A\phi(A)}$ . Disso segue que  $P, Q$  e  $R$  são colineares, um absurdo. Portanto,  $\phi(A) = A, \forall A \in \Pi$ , isto é,  $\phi = id$ .  $\square$

**Teorema 3.2** *Sejam  $\phi_1, \phi_2 : \Pi \rightarrow \Pi$  isometrias e  $P, Q, R \in \Pi$  pontos não colineares tais que  $\phi_1(P) = \phi_2(P)$ ,  $\phi_1(Q) = \phi_2(Q)$  e  $\phi_1(R) = \phi_2(R)$ . Então  $\phi_1 = \phi_2$ .*

### 3 Propriedades das Isometrias

**Demonstração:** Tome  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  dada por  $\phi = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$ . Dessa forma,

$$\phi(P) = (\phi_1^{-1} \circ \phi_2)(P) = \phi_1^{-1}(\phi_2(P)) = \phi_1^{-1}(\phi_1(P)) = P.$$

De modo semelhante, temos que  $\phi(Q) = Q$  e  $\phi(R) = R$ . Pela Proposição 3.1 temos que  $\phi = \phi_1^{-1} \circ \phi_2 = id$  e assim,

$$\phi_1 = \phi_1 \circ id = \phi_1 \circ (\phi_1^{-1} \circ \phi_2) = (\phi_1 \circ \phi_1^{-1}) \circ \phi_2 = id \circ \phi_2 = \phi_2.$$

Portanto,  $\phi_1 = \phi_2$ . □

Este teorema nos permite verificar quando duas isometrias são a mesma e, em particular, é muito útil para descobrirmos quando duas composições diferentes representam a mesma isometria. No decorrer deste trabalho será amplamente utilizado para essa finalidade.

**Proposição 3.3** *Seja  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria que fixa dois pontos distintos  $P, Q \in \Pi$ . Então  $\phi$  é a identidade ou é uma reflexão pela reta que contém  $P$  e  $Q$ .*

**Demonstração:** Seja  $r \subset \Pi$  a reta que contém os pontos  $P$  e  $Q$ . Pelo Teorema 1.8,  $\phi(r) = r'$  é uma reta e, como  $\phi(P) = P$  e  $\phi(Q) = Q$  por hipótese, então  $r = r'$ . Logo,  $\phi(A) = A$  para todo  $A \in r$  pois, do contrário, como na demonstração da Proposição 3.1, teríamos que  $r$  seria mediatriz do segmento  $\overline{A\phi(A)}$  com  $A \in r$  e  $\phi(A) \notin r$ , um absurdo.

Assim, tome  $R \notin r$ , com  $R \neq P$  e  $R \neq Q$ . Se  $\phi(R) = R$ , então, pela Proposição 3.1,  $\phi = id$ . Se  $\phi(R) \neq R$ , temos que

$$d(P, R) = d(\phi(P), \phi(R)) = d(P, \phi(R)),$$

de modo que  $P$  pertence à mediatriz de  $\overline{R\phi(R)}$ . De forma análoga, concluímos que  $Q$  também pertence a essa mediatriz, de forma que, sendo  $P \neq Q$ ,  $r$  é a mediatriz de  $\overline{R\phi(R)}$ . Logo,  $\phi(R) = \sigma_r(R)$ . Além disso,  $\phi(P) = \sigma_r(P)$  e  $\phi(Q) = \sigma_r(Q)$ , com  $P, Q$  e  $R$  não colineares e, portanto, segue do Teorema 3.2 que  $\phi = \sigma_r$ . □

**Proposição 3.4** *Uma isometria que fixa exatamente um ponto é um produto de duas reflexões por retas.*

**Demonstração:** Suponha que  $\alpha$  é uma isometria que fixa um ponto  $C$ . Sejam  $P \neq C$ ,  $P' = \alpha(P)$  e  $r$  a mediatriz de  $\overline{PP'}$ . Temos então que  $CP = CP'$ , de modo que  $C \in r$ .

### 3 Propriedades das Isometrias

Segue que  $\sigma_r(C) = C$  e  $\sigma_r(P') = P$ . Logo,

$$\sigma_r\alpha(C) = \sigma_r(C) = C$$

e

$$\sigma_r\alpha(P) = \sigma_r(P') = P.$$

Pela Proposição 3.3, temos que  $\sigma_r\alpha = id$  ou  $\sigma_r\alpha = \sigma_s$  onde  $s = \overleftrightarrow{CP}$ . Mas  $\sigma_r\alpha$  não pode ser a identidade, do contrário, teríamos  $\alpha = \sigma_r^{-1} = \sigma_r$ , logo  $\alpha$  fixaria mais de um único ponto. Portanto,

$$\sigma_r\alpha = \sigma_s \Rightarrow \sigma_r\sigma_r\alpha = \sigma_r\sigma_s \Rightarrow \alpha = \sigma_r\sigma_s.$$

□

**Proposição 3.5** Dadas  $\phi_1, \phi_2 : \Pi \rightarrow \Pi$  isometrias tais que  $\phi_1(P) = \phi_2(P)$  e  $\phi_1(Q) = \phi_2(Q)$ , para  $P, Q \in \Pi$  distintos, temos que  $\phi_1 = \phi_2$  ou  $\phi_1 = \phi_2 \circ \sigma_r$ , onde  $r = \overleftrightarrow{PQ}$ .

**Demonstração:** Basta notar que a aplicação  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  dada por  $\phi = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$  é tal que  $\phi(P) = P$  e  $\phi(Q) = Q$ , com  $P \neq Q$ , de modo que, pela Proposição 3.3,  $\phi = id$  ou  $\phi = \sigma_r$ , com  $r \subset \Pi$  a reta que passa por  $P$  e  $Q$ . A primeira igualdade implica que  $\phi_1 = \phi_2$ . Da segunda, temos que

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_2 = \sigma_r \iff \phi_1^{-1} = \sigma_r \circ \phi_2^{-1} \iff \phi_1 = \phi_2 \circ \sigma_r,$$

pois  $\sigma_r$  é uma involução. □

Com estas propriedades básicas de uma isometria genérica, podemos explorar com mais detalhes os pontos fixos e preservados dos quatro tipos de isometrias que temos até o momento.

**Proposição 3.6** A translação  $\tau_{A,B} \neq id$  não fixa nenhum ponto do plano e preserva somente as retas paralelas a  $\overline{AB}$ .

**Demonstração:** Suponha, por absurdo, que  $\tau_{A,B} \neq id$  preserva um ponto  $P = (x_P, y_P)$ . Logo,

$$(x_P, y_P) = P = \tau_{A,B}(P) = \tau_{A,B}(x_P, y_P) = (x_P + a, y_P + b).$$

Assim, segue que  $a = 0$  e  $b = 0$ , o que significa que  $A = B$ , ou seja,  $\tau_{A,B} = id$ , contradizendo a hipótese. Portanto,  $\tau_{A,B}$  não fixa nenhum ponto.

### 3 Propriedades das Isometrias

Falta mostrar que  $\tau_{A,B}$  preserva apenas as retas paralelas a  $\overline{AB}$ .

Seja  $s \subset \Pi$  uma reta paralela a  $\overline{AB}$  e tome um ponto  $P \in s$ . Definindo  $\tau_{A,B}(P) = P'$ , temos que  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$ . Como  $s // \overline{AB}$ , então  $P' \in s$ . Pelo Teorema 1.8,  $\tau_{A,B}(s) = s'$  é uma reta e ambos  $P$  e  $P'$  estão contidos em  $s'$ , logo  $s = s'$  e, portanto,  $\tau_{A,B}$  preserva  $s$ .

Suponha, agora, por absurdo, que  $\tau_{A,B}$  preserva uma reta  $r \neq \overleftrightarrow{AB}$  concorrente a  $\overleftrightarrow{AB}$ . Então, dado  $P \in r$  com  $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ , temos que  $\tau_{A,B}(P) = P' \in r$ , de modo que  $\overline{PP'} \subset r$ . Da unicidade das translações (Proposição 1.15), temos que  $\tau_{P,P'} = \tau_{A,B}$ . Dessa forma, caso  $A, P$  e  $P'$  e  $B, P$  e  $P'$  forem não colineares, pelo Teorema 1.17, temos que  $\square ABPP'$  é um paralelogramo, logo  $r // \overline{AB}$ . Agora, caso  $A \in r$ , o que implicaria que  $A, P$  e  $P'$  são colineares, teríamos que  $B = \tau_{A,B}(A) = \tau_{P,P'}(A) \in r$  e, como existe uma única reta que passa por  $P$  e  $P'$ , concluimos que  $r = \overleftrightarrow{AB}$ , uma contradição. De maneira análoga, se  $B \in r$ , teríamos que  $B, P$  e  $P'$  colineares e que  $r = \overleftrightarrow{AB}$ . Logo,  $r$  não é preservada pela translação. □

**Proposição 3.7** *A reflexão por ponto  $\sigma_M$  fixa um ponto  $P$  se, e somente se,  $P = M$ .*

**Demonstração:** Imediata da Definição 1.24. □

**Proposição 3.8** *A reflexão por ponto  $\sigma_M$  preserva uma reta  $r$  se, e somente se,  $M \in r$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $r$  uma reta e  $P \in r$  um ponto. Supondo  $r$  é preservada pela isometria, temos que  $\sigma_M(P) = P' \in r$ , o que implica que  $M \in r$  pois  $M$  é o ponto médio de  $\overline{PP'}$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $M \in r$ , então tomando  $P \in r$  temos que  $\sigma_M(P) = P' \in r$  pois  $M$  é o ponto médio do segmento  $\overline{PP'}$ . Logo,  $\sigma_M(r) \subset r$ . Para a inclusão reversa, tome  $A \in r$ . Então podemos definir  $A' := \sigma_M(A) \in r$ . Como as reflexões por ponto são involuções, segue que  $\sigma_M(A') = \sigma_M(\sigma_M(A)) = A \in r$ , portanto  $r \subset \sigma_M(r)$ . Logo,  $\sigma_M(r) = r$ . □

**Proposição 3.9** *A reflexão por reta  $\sigma_r$  fixa um ponto  $P \in \Pi$  se, e somente se,  $P \in r$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Pela contrapositiva, suponha que  $P \notin r$ . Pela Proposição 1.30,  $\sigma_r$  inverte semiplanos, ou seja, leva  $P$  ao semiplano oposto ao qual pertence, de modo que  $\sigma_r(P) \neq P$ .

( $\Leftarrow$ ) Imediata da Definição 1.27. □

**Proposição 3.10** *A reflexão por reta  $\sigma_r$  fixa uma reta  $s$  se, e somente se,  $s = r$ .*

**Demonstração:** A reflexão  $\sigma_r$  fixa a reta  $s$  se para todo  $P \in s$  tem-se que  $\sigma_r(P) = P$ , o que acontece se, e somente se,  $P \in r$ , pela proposição anterior. Assim, como  $r$  contém os pontos de  $s$ , então  $s = r$ .

### 3 Propriedades das Isometrias

Reciprocamente, se  $s = r$  então segue da Definição 1.27 que, para todo  $P \in r$  tem-se  $\sigma_r(P) = P$ . Portanto,  $s$  é fixada.  $\square$

**Proposição 3.11** *A reflexão por reta  $\sigma_r$  preserva uma reta  $s$  se, e somente se,  $s = r$  ou  $s \perp r$ .*

**Demonstração:** Pela proposição anterior, para todo  $P \in s$  tem-se  $\sigma_r(P) = P \iff s = r$  e, em particular, a reta  $s$  é preservada. Basta, então, verificar a perpendicularidade de  $r$  e  $s$ .

( $\Rightarrow$ ) Suponha  $s \neq r$  tal que  $s$  é preservada por  $\sigma_r$ . Então, definindo  $\sigma_r(P) = P'$  para algum  $P \in s$ , temos que  $r$  é mediatriz de  $\overline{PP'}$ . Ou seja, temos que  $r \perp \overline{PP'} \subset s$ , o que implica que  $r \perp s$ .

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $P \in s$  e  $P' = \sigma_r(P)$ . Como  $s \perp r$  e, por definição,  $r$  é mediatriz de  $\overline{PP'}$ , segue que  $\overline{PP'} \perp r$ . Portanto,  $P' \in s$  e, como  $P \in s$  é arbitrário, juntamente ao Teorema 1.8, concluímos que  $\sigma_r$  preserva a reta  $s$ .  $\square$

**Proposição 3.12** *A rotação  $\rho_{O,\alpha} \neq id$  fixa exatamente o ponto  $O$ .*

**Demonstração:** Temos que, pela definição,  $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ . Suponha que existe  $P \in \Pi$  tal que  $P \neq O$  e  $\rho_{O,\alpha}(P) = P$ . Então  $\angle POP = \alpha$  e por outro lado, como  $P$  é fixo,  $\angle POP = 0$ , logo,  $\alpha = 0$ , o que implica que  $\rho_{O,\alpha} = id$ . Portanto, o único ponto que é fixado por uma rotação é o seu centro.  $\square$

**Proposição 3.13** *A rotação  $\rho_{O,\alpha}$  preserva todas as circunferências de centro  $O$ .*

**Demonstração:** Seja  $C_O$  uma circunferência de centro  $O$ . Então, para qualquer  $P \in C_O$ , o segmento  $\overline{OP}$  é um raio de  $C_O$ . Definindo  $P' = \rho_{O,\alpha}(P)$ , temos que  $OP = OP'$ , de modo que  $\overline{OP'}$  também será um raio de  $C_O$  e, portanto,  $P' \in C_O$ . Logo,  $\rho_{O,\alpha}$  preserva  $C_O$ .  $\square$

## 3.2 Composições

**Proposição 3.14** *Se  $R$  é o ponto médio de  $\overline{PQ}$ , então  $\sigma_R\sigma_P = \tau_{P,Q} = \sigma_Q\sigma_R$ .*

**Demonstração:** Por hipótese,  $R$  é ponto médio entre o segmento que liga  $P = (x_P, y_P)$  e  $Q = (x_Q, y_Q)$ , então  $R = \left(\frac{x_P+x_Q}{2}, \frac{y_P+y_Q}{2}\right)$ . Assim, para um ponto  $X = (x, y)$  segue que

$$\begin{aligned} \sigma_R\sigma_P(x, y) &= \sigma_R(-x + 2x_P, -y + 2y_P) \\ &= \left(x - 2x_P + 2 \cdot \frac{x_P + x_Q}{2}, y - 2y_P + 2 \cdot \frac{y_P + y_Q}{2}\right) \\ &= (x - x_P + x_Q, y - y_P + y_Q). \end{aligned}$$

### 3 Propriedades das Isometrias

Além disso,

$$\begin{aligned}\tau_{P,Q}(x,y) &= (x + x_Q - x_P, y + y_Q - y_P) \\ &= (x - x_P + x_Q, y - y_P + y_Q)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_Q\sigma_R(x,y) &= \sigma_Q\left(-x + 2 \cdot \frac{x_P + x_Q}{2}, -y + 2 \cdot \frac{y_P + y_Q}{2}\right) \\ &= \sigma_Q(-x + x_P + x_Q, -y + y_P + y_Q) \\ &= (x - x_P - x_Q + 2x_Q, y - y_P - y_Q + 2y_Q) \\ &= (x - x_P + x_Q, y - y_P + y_Q).\end{aligned}$$

Como  $X$  é arbitrário, segue que  $\sigma_R\sigma_P = \tau_{P,Q} = \sigma_Q\sigma_R$ .  $\square$

**Proposição 3.15** *Um produto de três reflexões por pontos é uma reflexão por ponto. Em particular, se  $P, Q$  e  $R$  são não colineares, então  $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_S$ , onde  $\square PQRS$  é um paralelogramo.*

**Demonstração:** Dados os pontos  $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q)$  e  $R = (x_R, y_R)$ , tome  $X = (x, y)$  qualquer. Assim,

$$\sigma_R\sigma_Q\sigma_P(x,y) = (-x + 2x_P - 2x_Q + 2x_R, -y + 2y_P - 2y_Q + 2y_R) = \sigma_S,$$

onde  $S = (x_P - x_Q + x_R, y_P - y_Q + y_R) = (x_S, y_S)$ . Logo, por construção, o ponto  $S$  é obtido através da soma  $P + \overrightarrow{QR}$ . Então,  $\overline{PS}$  e  $\overline{QR}$  de  $\square PQRS$  são paralelos e possuem a mesma medida. Portanto,  $\square PQRS$  é um paralelogramo.  $\square$

**Proposição 3.16** *Para quaisquer  $P, Q, R \in \Pi$  tem-se  $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_P\sigma_Q\sigma_R$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.15, temos que  $\sigma_P\sigma_Q\sigma_R = \sigma_S, S \in \Pi$ . Como as reflexões por ponto são involuções, segue que

$$\sigma_S = \sigma_S^{-1} = (\sigma_P\sigma_Q\sigma_R)^{-1} = \sigma_R^{-1}\sigma_Q^{-1}\sigma_P^{-1} = \sigma_R\sigma_Q\sigma_P.$$

$\square$

**Proposição 3.17** *Se  $r$  e  $s$  são retas paralelas, então  $\sigma_s\sigma_r$  é a translação por um vetor perpendicular a  $r$  e  $s$  e cujo módulo é o dobro da distância entre  $r$  e  $s$ .*

### 3 Propriedades das Isometrias

**Demonstração:** Suponha  $r$  e  $s$  retas paralelas e sejam  $R \in r$  e  $S \in s$  pontos tais que  $\overleftrightarrow{RS}$  é perpendicular a  $r$  e  $s$ . Temos que a distância entre  $r$  e  $s$  é dada pelo segmento  $\overline{RS}$ . Tome  $P \in r$  distinto de  $R$  e defina  $R' = \sigma_s(R)$  e  $P' = \tau_{R,R'}(P)$ . Dessa forma,  $\square PRR'P'$  é um paralelogramo e, pela Proposição 1.17,  $\tau_{P,P'} = \tau_{R,R'}$ . Além disso,  $s$  é mediatriz de  $\overline{RR'}$  e  $\overline{PP'}$ , de onde segue que  $\sigma_s(P) = P'$ . Seja, agora,  $Q = \sigma_r(S)$ . Como  $R$  é o ponto médio de  $\overline{QS}$  e  $S$  é o ponto médio de  $\overline{RR'}$ , então  $\tau_{Q,S} = \tau_{R,R'}$ , onde o módulo de  $\overline{RR'}$  é o dobro da distância entre  $r$  e  $s$ . Assim, temos

$$\begin{aligned}\sigma_s \sigma_r(Q) &= \sigma_s(S) = S = \tau_{R,R'}(Q), \\ \sigma_s \sigma_r(R) &= \sigma_s(R) = R' = \tau_{R,R'}(R), \\ \sigma_s \sigma_r(P) &= \sigma_s(P) = P' = \tau_{R,R'}(P).\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2, segue que  $\sigma_s \sigma_r = \tau_{RR'}$  pois  $P, Q$  e  $R$  são não colineares. □

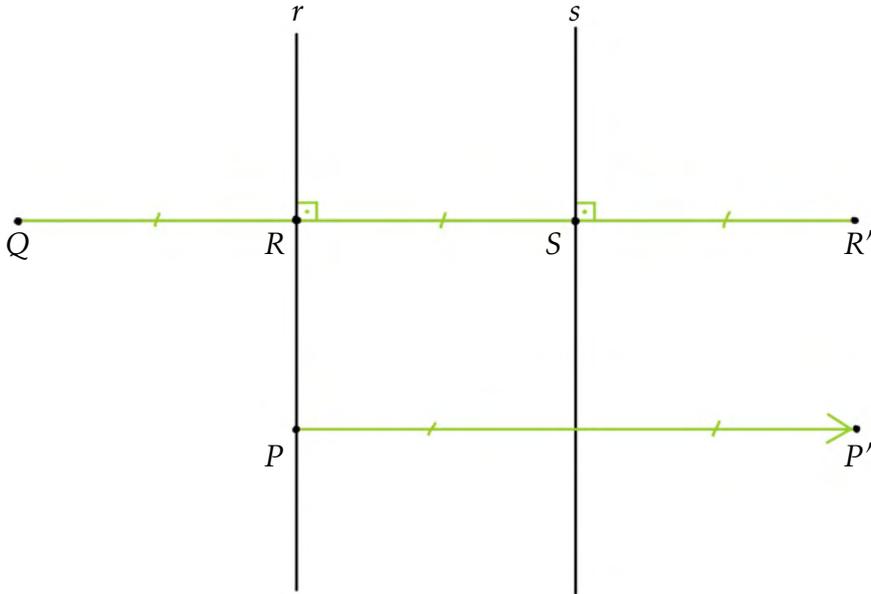


Figura 3.1: Construção feita na demonstração da Proposição 3.17.

**Proposição 3.18** Se  $t$  é uma reta perpendicular à reta  $r$  em  $R$  e perpendicular à reta  $s$  em  $S$ , então  $\sigma_r \sigma_s = \tau_{R,S}^2 = \sigma_S \sigma_R$ .

**Demonstração:** Como  $t \perp r$  e  $t \perp s$ , então temos que  $r \parallel s$ . Pela Proposição 3.17 segue que  $\sigma_s \sigma_r = \tau$ , com  $\tau$  uma translação pelo dobro da distância entre as retas  $r$  e  $s$ . Da perpendicularidade de  $t$ , a distância entre as retas é dada pelo vetor  $\overrightarrow{RS}$ , logo  $\tau = \sigma_s \sigma_r = \tau_{R,S}^2$ .

### 3 Propriedades das Isometrias

Seja, agora,  $R' = \sigma_s(R)$ . Temos que  $S$  é ponto médio de  $\overline{RR'}$ , então pela Proposição 3.14 temos  $\tau_{R,S}^2 = \tau_{R,R'} = \sigma_s \sigma_R$ .  $\square$

**Proposição 3.19** *Toda translação é um produto de duas reflexões por retas paralelas e, reciprocamente, um produto de duas reflexões por retas paralelas é uma translação.*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $P, Q \in \Pi$  e  $\tau_{P,Q}$  uma translação. Pela Proposição 3.14, temos que  $\tau_{P,Q} = \sigma_R \sigma_P$ , com  $R$  ponto médio de  $\overline{PQ}$ . Tomemos as retas  $r$  e  $s$  tais que  $r \perp \overleftrightarrow{PR}$  em  $P$  e  $s \perp \overleftrightarrow{PR}$  em  $R$ . Então, pela Proposição 3.18, segue que  $\sigma_R \sigma_P = \sigma_s \sigma_r$ .

( $\Leftarrow$ ) Proposição 3.17.  $\square$

**Proposição 3.20** *Se  $P, Q \in \Pi$  são pontos tais que  $P \neq Q$ , então  $\tau_{P,Q}$  pode ser escrita como  $\sigma_s \sigma_r$ , onde  $r, s \perp \overleftrightarrow{PQ}$ . Além disso, escolhendo arbitrariamente  $r$  ou  $s$ , a outra pode ser determinada.*

**Demonstração:** Dada a reta  $s$  perpendicular a  $\overleftrightarrow{PQ}$  em  $A$ , pela Proposição 3.14, temos que  $\tau_{P,Q} = \sigma_R \sigma_P$ , com  $R$  ponto médio de  $\overline{PQ}$ . Tomando  $B = \tau_{P,R}(A)$  segue que  $\sigma_B \sigma_A = \tau_{P,Q}$  e, tomando a reta  $r$  perpendicular a  $\overleftrightarrow{PQ}$  em  $B$ , então  $\sigma_r \sigma_s = \sigma_B \sigma_A = \tau_{P,Q}$ .  $\square$

**Proposição 3.21** *Para um ponto  $O \in \Pi$  qualquer, temos que  $\rho_{O,\pi} = \sigma_O$ .*

**Demonstração:** Dado que o ângulo de rotação é  $\pi$ , então para  $P \in \Pi$  qualquer, tomando  $\rho_{O,\pi}(P) = P'$ , teremos  $OP = OP'$ . Assim,  $O$  é o ponto médio de  $\overline{PP'}$ , de modo que  $\rho_{O,\pi} = \sigma_O$ , uma vez que  $P$  é arbitrário.  $\square$

**Teorema 3.22** *Sejam  $r, s \subset \Pi$  retas tais que  $r \cap s = \{O\}$  e o menor (em módulo) ângulo orientado de  $r$  para  $s$  mede  $\frac{\theta}{2}$ . Então  $\sigma_s \sigma_r = \rho_{O,\theta}$ .*

**Demonstração:** Suponha  $r$  e  $s$  concorrentes em  $O$  e  $\frac{\theta}{2}$  a medida do menor ângulo (em módulo) orientado de  $r$  para  $s$ . Tome  $R \in r$  tal que  $R \neq O$  e defina  $C_R$  a circunferência de centro  $O$  que passa por  $R$ . Seja  $\{S\} = C_R \cap s$  tal que o ângulo entre  $\overrightarrow{OR}$  e  $\overrightarrow{OS}$  é  $\frac{\theta}{2}$ . Assim, temos que  $r = \overleftrightarrow{OR}$  e  $s = \overleftrightarrow{OS}$ .

Seja, agora,  $R' = \rho_{O,\theta}(R)$ . Pela Proposição 3.13,  $R' \in C_R$  e assim  $\angle ROR' = 2\angle ROS = \theta$ . Pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que  $\triangle ROS \cong \triangle R'OS$ , uma vez que  $OR = OR'$ ,  $\overline{OS}$  é lado comum e  $\angle ROS = \angle R'OS$  pois  $R' = \rho_{O,\theta}(R)$ . Assim,  $\overline{RS} \cong \overline{R'S'}$ , de onde segue que  $s$  é mediatriz de  $\overline{RR'}$  e, conseqüentemente,  $\sigma_s(R) = R'$ .

Tome  $S' = \sigma_r(S)$ . Assim,  $r$  é mediatriz de  $SS'$ , de onde segue que  $S'\hat{O}R = R\hat{O}S$  e  $SO = S'O$ . Logo,  $S' \in C_R$  e  $\angle S'OS = \theta$ , de modo que  $S = \rho_{O,\theta}(S')$ . Dessa forma, temos

- $\sigma_s \sigma_r(O) = \sigma_s(O) = O = \rho_{O,\theta}(O)$ ;

### 3 Propriedades das Isometrias

- $\sigma_s \sigma_r(S') = \sigma_s(S) = S = \rho_{O,\theta}(S')$ ;
- $\sigma_s \sigma_r(R) = \sigma_s(R) = R' = \rho_{O,\theta}(R)$ .

Como os pontos  $O, S'$  e  $R$  são não colineares, pelo Teorema 3.2, concluímos que  $\sigma_s \sigma_r = \rho_{O,\theta}$ .  $\square$

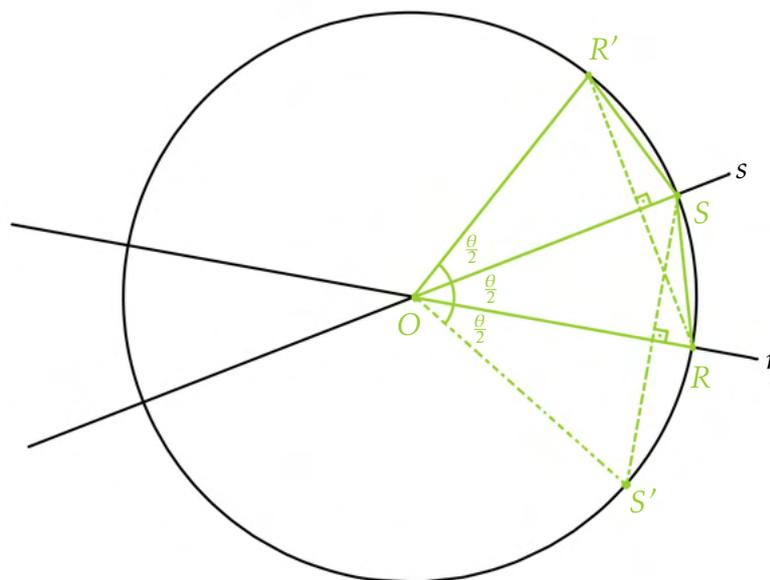


Figura 3.2: Construção feita na demonstração da Proposição 3.22.

Semelhante a uma translação, também podemos escrever uma rotação como produto de duas retas, mas agora tais retas devem ser concorrentes.

**Proposição 3.23** *Toda rotação é um produto de duas reflexões por retas concorrentes e, reciprocamente, um produto de duas reflexões por retas concorrentes é uma rotação.*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Dada uma rotação  $\rho_{O,\theta}$ , tome uma reta  $r$  qualquer tal que  $O \in r$ . Seja  $s$  uma reta tal que  $O \in s$  e a medida do menor ângulo (em módulo) da reta  $r$  para  $s$  seja  $\frac{\theta}{2}$  (basta tomar  $s = \rho_{O,\frac{\theta}{2}}(r)$ , por exemplo). Assim, pelo Teorema 3.22, segue que  $\rho_{O,\theta} = \sigma_s \sigma_r$ .

( $\Leftarrow$ ) Teorema 3.22.  $\square$

**Proposição 3.24** *A rotação  $\rho_{O,\theta}$  pode ser escrita como um produto de duas reflexões por retas concorrentes em  $O$ , onde uma reta é escolhida arbitrariamente e a outra pode ser determinada por esta escolha.*

### 3 Propriedades das Isometrias

**Demonstração:** Suponha  $r$  uma reta qualquer contendo o centro de rotação  $O$ . Sejam  $R \in r$ , com  $R \neq O$ , e  $R' = \rho_{O, \frac{\theta}{2}}(R)$ . Tome  $s = \overleftrightarrow{OR'}$ . Segue do Teorema 3.22 que  $\rho_{O, \theta} = \sigma_s \sigma_r$ .  $\square$

A reflexão por ponto, sendo um caso particular de rotação, também pode ser escrita como produto de duas reflexões por retas.

**Proposição 3.25** *A reflexão por ponto  $\sigma_P$  é um produto de duas reflexões por quaisquer duas retas perpendiculares em  $P$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.21,  $\sigma_P = \rho_{P, \pi}$  e pela Proposição 3.24, temos que para uma reta  $r$  qualquer, existe uma reta  $s$  perpendicular (pois a medida do menor ângulo (em módulo) entre elas é  $\frac{\pi}{2}$ ), tais que  $\sigma_s \sigma_r = \rho_{P, \pi} = \sigma_P$ .  $\square$

**Proposição 3.26** *As isometrias involutivas são reflexões por pontos ou reflexões por retas.*

**Demonstração:** Seja  $\alpha$  uma isometria involutiva e tome os pontos  $P$  e  $Q$  tais que  $\alpha(P) = Q$ . Assim,  $P = \alpha^2(P) = \alpha(Q)$ , ou seja,  $\alpha$  leva  $P$  em  $Q$  e vice-versa. Como as isometrias preservam a relação *estar entre*, então o ponto médio  $M$  de  $\overline{PQ}$  é fixado. Se  $\alpha$  fixa três pontos, então  $\alpha$  é a identidade. Caso contrário, então, pelas Proposições 3.3 e 3.4,  $\alpha$  pode ser escrita como um produto de no máximo duas reflexões por retas.

Se  $\alpha$  fixa dois pontos, então  $\alpha$  fixa a reta que os contém, de modo que, pela Proposição 3.3,  $\alpha$  é a reflexão por esta reta.

Se  $\alpha$  fixa exatamente um ponto, então sejam  $r$  e  $s$  retas tais que  $\alpha = \sigma_s \sigma_r$ . Caso  $r // s$ , então se  $r \neq s$ , pela Proposição 3.17,  $\sigma_s \sigma_r$  é uma translação, que pela Proposição 3.6 não fixa nenhum ponto, e se  $r = s$  então  $\sigma_s \sigma_r$  é a identidade, que fixa todos os pontos. Logo,  $r$  e  $s$  devem ser concorrentes. Pela Proposição 3.22,  $\sigma_s \sigma_r$  é uma rotação. Como  $\alpha$  fixa o ponto  $M$  e leva o ponto  $A$  em  $B$  e o ponto  $B$  em  $A$ , pois é involução, segue que  $\alpha$  é uma rotação de ângulo  $\pi$ , ou seja, uma reflexão pelo ponto  $M$ .  $\square$

**Definição 3.27** *Dadas  $\alpha$  e  $\beta$  isometrias, chamamos  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  de **conjugado** de  $\beta$  por  $\alpha$ .*

**Proposição 3.28** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  isometrias. Então,  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  é uma involução se, e somente se,  $\beta$  for uma involução.*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Temos que  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  é uma involução. Então

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1} = id \implies \alpha\beta\beta\alpha^{-1} = id \implies \beta\beta = \alpha^{-1}\alpha = id.$$

### 3 Propriedades das Isometrias

Logo,  $\beta$  é um involução.

( $\Leftarrow$ ) Note que, como  $\beta\beta = id$ , temos

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta\beta\alpha^{-1} = \alpha\alpha^{-1} = id.$$

Portanto,  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  é uma involução. □

**Proposição 3.29** *Sejam  $P$  um ponto,  $r$  uma reta e  $\alpha$  uma isometria. Então  $\alpha\sigma_r\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(r)}$  e  $\alpha\sigma_P\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(P)}$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.28,  $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}$  é uma involução pois  $\sigma_P$  é uma involução. Note que

$$\alpha\sigma_P\alpha^{-1}(\alpha(P)) = \alpha\sigma_P(P) = \alpha(P).$$

Então  $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}$  fixa  $\alpha(P)$  e mais nenhum outro ponto, uma vez que  $\sigma_P$  fixa somente o ponto  $P$ . Portanto,  $\alpha\sigma_P\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(P)}$ .

De modo análogo,  $\alpha\sigma_r\alpha^{-1}$  é uma isometria involutiva que fixa somente  $\alpha(r)$  e, portanto, temos que  $\alpha\sigma_r\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(r)}$ . □

**Proposição 3.30** *Se  $\alpha$  é uma isometria, então*

$$\alpha\tau_{A,B}\alpha^{-1} = \tau_{\alpha(A),\alpha(B)}$$

e

$$\alpha\rho_{O,\theta}\alpha^{-1} = \rho_{\alpha(O),\pm\theta}.$$

**Demonstração:** Primeiramente, note que, pela Proposição 3.14, temos que  $\tau_{A,B} = \sigma_M\sigma_A$ , com  $M$  ponto médio de  $\overline{AB}$ . Logo, pela proposição anterior,

$$\alpha\tau_{A,B}\alpha^{-1} = \alpha\sigma_M\sigma_A\alpha^{-1} = \alpha\sigma_M\alpha^{-1}\alpha\sigma_A\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(M)}\sigma_{\alpha(A)}.$$

Além disso,  $\alpha(M)$  é ponto médio entre  $\alpha(A)$  e  $\alpha(B)$ , de modo que

$$\alpha\tau_{A,B}\alpha^{-1} = \tau_{\alpha(A),\alpha(B)}.$$

Para a segunda parte, vimos que  $\rho_{O,\theta} = \sigma_r\sigma_s$ , com  $r$  e  $s$  retas concorrentes em  $O$  e tais que a medida do menor ângulo (em módulo) orientado de  $r$  para  $s$  é  $\frac{\theta}{2}$ . Logo, pela proposição anterior,

$$\alpha\rho_{O,\theta}\alpha^{-1} = \alpha\sigma_r\sigma_s\alpha^{-1} = \alpha\sigma_r\alpha^{-1}\alpha\sigma_s\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(s)}\sigma_{\alpha(r)}.$$

### 3 Propriedades das Isometrias

Além disso,  $\alpha(r)$  e  $\alpha(s)$  são retas concorrentes no ponto  $\alpha(O)$  que formam um ângulo de  $\pm\frac{\theta}{2}$  no sentido anti-horário, uma vez que uma isometria não preserva, necessariamente, a orientação de um ângulo. Portanto, concluímos que

$$\alpha\rho_{O,\theta}\alpha^{-1} = \rho_{\alpha(O),\pm\theta}.$$

□

**Teorema 3.31** *Uma rotação por um ângulo  $\theta$  seguida de uma rotação por um ângulo  $\phi$  é uma rotação por um ângulo  $\theta + \phi$ , no caso de  $\theta + \phi \neq 2k\pi$ , com  $k$  um inteiro. Se  $\theta + \phi = 2k\pi$ , então a composição é uma translação.*

**Demonstração:** Sejam  $\rho_{P,\theta}$  e  $\rho_{Q,\phi}$  rotações. Se  $P = Q$ , então pelo Teorema 1.23 segue que  $\rho_{Q,\theta}\rho_{P,\phi} = \rho_{P,\theta}\rho_{P,\phi} = \rho_{P,\theta+\phi}$ .

Suponha  $P \neq Q$  e  $\theta, \phi$  não nulos. Definindo  $t = \overleftrightarrow{PQ}$ , então pela Proposição 3.24 existem retas  $r$  e  $s$  com  $P \in r$  e  $Q \in s$  tais que  $\rho_{P,\theta} = \sigma_t\sigma_r$  e  $\rho_{Q,\phi} = \sigma_s\sigma_t$ . Logo,

$$\rho_{Q,\phi}\rho_{P,\theta} = \sigma_s\sigma_t\sigma_t\sigma_r = \sigma_s\sigma_r.$$

Se  $\theta + \phi = 2k\pi$ , pela Proposição 3.30, podemos escrever

$$\tau_{Q,P}^{-1}\rho_{P,\theta}^{-1}\tau_{Q,P} = \tau_{P,Q}\rho_{P,\theta}^{-1}\tau_{P,Q}^{-1} = \rho_{\tau_{P,Q}(P),\pm\theta} = \rho_{Q,\mp\phi}.$$

Note que, como as translações preservam a orientação de ângulos, podemos assumir que

$$\tau_{Q,P}^{-1}\rho_{P,\theta}^{-1}\tau_{Q,P} = \rho_{\tau_{P,Q}(P),-\theta} = \rho_{Q,\phi}.$$

Segue que

$$\sigma_s\sigma_r = \rho_{Q,\phi}\rho_{P,\theta} = (\tau_{Q,P}^{-1}\rho_{P,\theta}^{-1}\tau_{Q,P})\rho_{P,\theta} = \tau_{Q,P}^{-1}\tau_{\rho_{P,\theta}(Q),\rho_{P,\theta}(P)}.$$

Pela Proposição 1.16,  $\tau_{Q,P}^{-1}\tau_{\rho_{P,\theta}(Q),\rho_{P,\theta}(P)}$  é uma translação e pela Proposição 3.19, segue que  $r \parallel s$ .

Agora, se  $r$  e  $s$  não são paralelas, então caímos no caso em que  $\theta + \phi \neq 2k\pi$ . Sejam

$$P' = \sigma_s(P) = \sigma_s\sigma_t(P) = \rho_{Q,\phi}(P)$$

e

$$Q' = \sigma_r(Q) = \sigma_r\sigma_t(Q) = \rho_{P,\theta}^{-1}(Q).$$

### 3 Propriedades das Isometrias

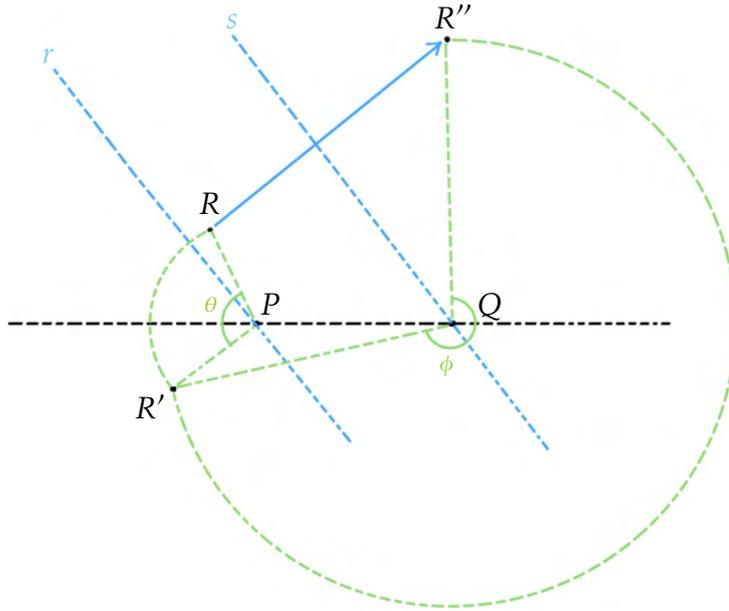


Figura 3.3: Composição entre  $\rho_{P,\theta}$  e  $\rho_{Q,\phi}$  no caso em que  $r \parallel s$ .

Note que, agora, as retas  $r$  e  $s$  são as mediatrizes dos segmentos  $QQ'$  e  $PP'$ , respectivamente. Defina  $\{O\} = r \cap s$ . Assim, temos que  $\angle OPQ = \frac{\theta}{2}$  e  $\angle OQP = \frac{\phi}{2}$ . Aplicando o Teorema do Ângulo Externo em  $\triangle POQ$ , segue que a medida do menor ângulo (em módulo) orientado de  $r$  para  $s$  é  $\frac{\theta}{2} + \frac{\phi}{2}$  e, pelo Teorema 3.22, podemos concluir que  $\sigma_s \sigma_r = \rho_{O, \theta + \phi}$ .  $\square$

**Corolário 3.32** *A composição de uma translação e de uma rotação não nula em qualquer ordem é uma rotação.*

**Demonstração:** Suponha  $\rho_{P,\theta}$  uma rotação por ângulo não nulo. Pelo teorema anterior, basta substituir a translação por uma rotação de ângulo  $\pi$  e outra de ângulo  $-\pi$ , de onde segue que a composição é uma rotação de ângulo  $\theta$ , uma vez que  $\theta + \pi + \pi = \theta$ .  $\square$

**Proposição 3.33** *Sejam  $r$  e  $s$  retas quaisquer. Então  $\sigma_r \sigma_s = \sigma_s \sigma_r$  se, e somente se,  $r = s$  ou  $r \perp s$ .*

### 3 Propriedades das Isometrias

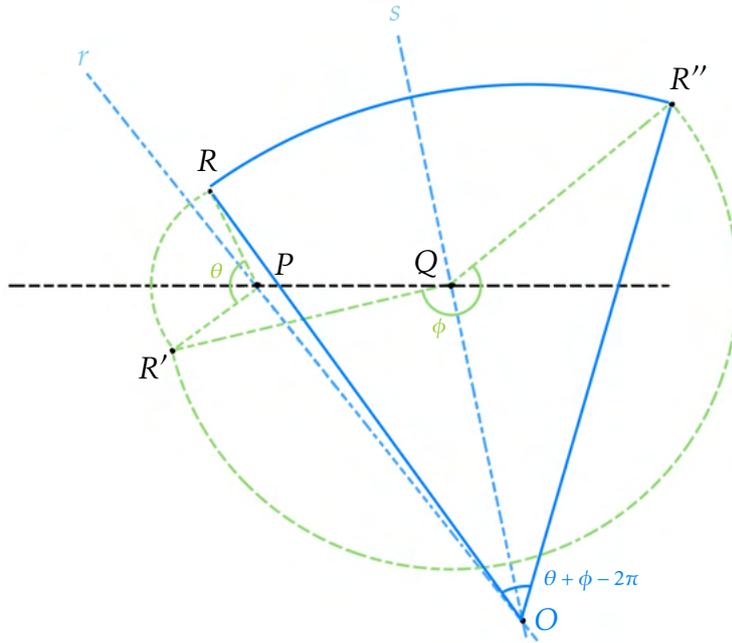


Figura 3.4: Composição entre  $\rho_{P,\theta}$  e  $\rho_{Q,\phi}$  no caso em que  $r$  e  $s$  não são paralelas.

**Demonstração:** Pelas Proposições 3.10, 3.11 e 3.29, segue que

$$\begin{aligned} \sigma_r \sigma_s = \sigma_s \sigma_r &\iff \sigma_s \sigma_r \sigma_s = \sigma_r \\ &\iff \sigma_{\sigma_s(r)} = \sigma_r \\ &\iff \sigma_s(r) = r \\ &\iff r = s \text{ ou } r \perp s. \end{aligned}$$

□

Agora que temos um repertório satisfatório sobre as composições de isometrias, podemos apresentar os resultados relacionados às reflexões transladadas.

**Proposição 3.34** *Uma reflexão transladada é um produto de três reflexões por retas  $r, s$  e  $t$  tais que  $s, t \perp r$ .*

**Demonstração:** Pela definição, uma reflexão transladada é uma composição  $\tau_{A,B}\sigma_r$  e, pela Proposição 3.19, uma translação é um produto  $\tau_{A,B} = \sigma_t\sigma_s$  onde  $s$  e  $t$  são retas paralelas e perpendiculares ao vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Logo, uma reflexão transladada pode ser escrita como um produto de três reflexões por retas distintas e, uma vez que o eixo da reflexão transladada é paralelo ao vetor de translação  $\overrightarrow{AB}$ , tem-se  $\tau_{A,B}\sigma_r = \sigma_t\sigma_s\sigma_r$

### 3 Propriedades das Isometrias

com  $s, t \perp r$ . □

**Proposição 3.35** *Uma reflexão transladada não fixa nenhum ponto.*

**Demonstração:** Sejam  $r, s$  e  $t$  retas com  $s, t \perp r$  e  $\tau_{A,B}\sigma_r = \sigma_t\sigma_s\sigma_r$  uma reflexão transladada e tome  $P \in \Pi$  um ponto. Se  $P \in r$ , então  $\sigma_t\sigma_s\sigma_r(P) = \sigma_t\sigma_s(P) = \tau_{A,B}(P)$  que, pela Proposição 3.6, não fixa nenhum ponto. Suponha, então,  $P \notin r$  e, por absurdo, que  $P = \sigma_t\sigma_s\sigma_r(P)$ . Então, tomando  $\sigma_r(P) = P'$ , temos

$$\sigma_t\sigma_s\sigma_r(P) = P \Rightarrow \sigma_s\sigma_t(P') = \sigma_r(P').$$

Como  $r$  divide  $\Pi$  em dois semiplanos distintos e  $\sigma_s\sigma_t$  é uma translação por um vetor paralelo a  $r$ , segue que  $\sigma_s\sigma_t(P)$  e  $P$  pertencem ao mesmo semiplano. Por outro lado, por  $\sigma_r$  ser uma reflexão pela reta  $r$ , então  $\sigma_r(P)$  e  $P$  devem estar em semiplanos distintos, uma contradição. Portanto, uma reflexão transladada não fixa nenhum ponto. □

**Proposição 3.36** *Sejam  $\tau_{A,B}\sigma_r = \sigma_t\sigma_s\sigma_r$  uma reflexão transladada e  $P \in \Pi$  um ponto tal que  $\tau_{A,B}\sigma_r(P) = P'$ . Então o ponto médio de  $\overline{PP'}$  pertence ao eixo da reflexão transladada.*

**Demonstração:** Seja  $a$  a reta perpendicular a  $r$  que contenha  $P$ . Assim, pela Proposição 3.20, existe uma reta  $b//a$  tal que  $\sigma_t\sigma_s = \sigma_b\sigma_a$ . Definindo  $\{Q\} = b \cap r$  temos que, além de  $P$  e  $Q$  serem pontos distintos, pela Proposição 3.25 temos que

$$P' = \sigma_t\sigma_s\sigma_r(P) = \sigma_b\sigma_a\sigma_r(P) = \sigma_b\sigma_r(P) = \sigma_Q(P),$$

uma vez que  $\sigma_r(P) \in a$  e as retas  $r$  e  $b$  são perpendiculares em  $Q$ . Logo, pela definição de reflexão por ponto,  $Q$  é ponto médio de  $\overline{PP'}$ . □

**Proposição 3.37** *Uma reflexão transladada preserva somente a reta que é seu eixo.*

**Demonstração:** Sejam  $r, s$  e  $t$  retas e  $\tau_{A,B}\sigma_r = \sigma_t\sigma_s\sigma_r$  uma reflexão transladada que preserva uma reta  $a \subset \Pi$ . Note que, como a translação  $\tau_{A,B}$  preserva somente retas paralelas ao vetor  $\overrightarrow{AB}$ , podemos supor que  $a // \overleftrightarrow{AB}$  e, portanto,  $a // r$ . Tome  $P \in a$  e seja  $P' = \tau_{A,B}\sigma_r(P)$ . Pela Proposição 3.36, temos que, se  $M$  é o ponto médio de  $\overline{PP'}$ , então  $M \in r$ . Como a reta  $a$  é preservada pela reflexão transladada, temos que  $P, P' \in a$  e, conseqüentemente,  $M \in a$ . Tome agora  $Q \in a$  de modo que  $P-P'-Q$  e defina  $Q' = \tau_{A,B}\sigma_r(Q)$ . Assim,  $Q' \in a$  e se denotarmos  $M'$  o ponto médio de  $\overline{QQ'}$ , então  $M' \in a$  e  $M' \in r$ . Como  $P$  e  $Q$  são pontos distintos e  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QM'}$ , então  $M \neq M'$ , de onde segue que  $r$  e  $a$  se interceptam em dois pontos diferentes, o que significa



### 3 Propriedades das Isometrias

**Proposição 3.39** *Uma reflexão transladada é uma composição entre uma reflexão por reta e uma reflexão por ponto em qualquer ordem. Reciprocamente, uma composição entre uma reflexão por reta e uma reflexão por ponto fora dela em qualquer ordem é uma reflexão transladada.*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $\gamma = \sigma_t \sigma_s \sigma_r$  uma reflexão transladada. Pela Proposição 3.34, temos que  $s, t \perp r$ . Sejam  $\{S\} = s \cap r$  e  $\{T\} = t \cap r$ . Assim, pela Proposição 3.25, temos que  $\sigma_s = \sigma_s \sigma_r = \sigma_r \sigma_s$  e  $\sigma_T = \sigma_t \sigma_r$ . Segue que

$$\gamma = \sigma_t \sigma_s \sigma_r = \sigma_t \sigma_S = \sigma_t \sigma_r \sigma_s = \sigma_T \sigma_s$$

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $r$  uma reta e  $P \notin r$ . Tome  $s \perp r$  passando por  $P$  e  $t \perp s$  passando por  $P$ , de maneira que  $r, t \perp s$ . Segue que, pelas Proposições 3.33 e 3.38,  $\sigma_P \sigma_r = \sigma_s \sigma_t \sigma_r$  e  $\sigma_r \sigma_P = \sigma_r \sigma_s \sigma_t = \sigma_r \sigma_t \sigma_s$  são reflexões transladadas de eixo  $s$ .  $\square$

**Proposição 3.40** *Uma translação que preserva uma reta  $r$  comuta com uma reflexão transladada que tem a reta  $r$  como eixo. Além disso, as reflexões transladadas não são involuções.*

**Demonstração:** Seja  $\gamma = \sigma_t \sigma_s \sigma_r$  uma reflexão transladada cujo eixo é a reta  $r$ , ou seja,  $s, t \perp r$ . Suponha  $\tau$  uma translação qualquer que preserva a reta  $r$ . Pelas Proposições 3.19 e 3.33, uma translação que preserva  $r$  comuta com  $\sigma_r$  e, pela Proposição 2.9, as translações formam um grupo abeliano, logo

$$\gamma \tau = \sigma_t \sigma_s \sigma_r \tau = \sigma_t \sigma_s \tau \sigma_r = \tau \sigma_t \sigma_s \sigma_r = \tau \gamma.$$

Para a segunda parte, defina  $\{S\} = s \cap r$ ,  $\{T\} = t \cap r$  e  $T' = \tau_{S,T}(T)$  e assim, pela Proposição 3.18,  $\sigma_t \sigma_s = \tau_{S,T'}$ . Como  $S, T' \in r$ , temos que  $\tau_{S,T'}$  preserva  $r$ . Logo, basta notar que

$$\gamma^2 = (\sigma_t \sigma_s \sigma_r)^2 = \sigma_t \sigma_s \sigma_r \sigma_t \sigma_s \sigma_r = \tau_{S,T'} \sigma_r \tau_{S,T'} \sigma_r = \sigma_r \sigma_r \tau_{S,T'}^2 = \tau_{S,T'}^2 \neq id.$$

$\square$

**Proposição 3.41** *Sejam  $\gamma$  uma reflexão transladada de eixo  $r$  e  $\alpha$  uma isometria. Então  $\alpha \gamma \alpha^{-1}$  é uma reflexão transladada de eixo  $\alpha(r)$ .*

**Demonstração:** Seja  $\gamma = \sigma_t \sigma_s \sigma_r$  uma reflexão transladada cujo eixo é a reta  $r$ . Assim,

### 3 Propriedades das Isometrias

pela Proposição 3.29,

$$\alpha\gamma\alpha^{-1} = \alpha\sigma_t\sigma_s\sigma_r\alpha^{-1} = \alpha\sigma_t\alpha^{-1}\alpha\sigma_s\alpha^{-1}\alpha\sigma_r\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(t)}\sigma_{\alpha(s)}\sigma_{\alpha(r)}.$$

Como  $\alpha$  é uma isometria e  $s, t \perp r$ , então  $\alpha(s), \alpha(t) \perp \alpha(r)$  e  $\alpha(s) \neq \alpha(t)$ . Logo,  $\alpha\gamma\alpha^{-1}$  é uma reflexão transladada de eixo  $\alpha(r)$ . □

### 3.3 Paridade

**Definição 3.42 (Isometria par e ímpar)** *Uma isometria que pode ser escrita como um produto de uma quantidade par de reflexões por retas é chamada **isometria par**. Uma isometria que pode ser escrita como um produto de uma quantidade ímpar de reflexões por retas é chamada **isometria ímpar**.*

**Proposição 3.43** *Sejam  $P \in \Pi$  um ponto e  $r$  e  $s$  retas. Então existem retas  $a$  e  $b$  tais que  $P \in a$  e  $\sigma_s\sigma_r = \sigma_b\sigma_a$ .*

**Demonstração:** Se  $r \parallel s$ , então a reta  $a$  será a reta paralela a  $r$  passando por  $P$  e  $\sigma_s\sigma_r$  é uma translação, e a Proposição 3.20 garante a existência da reta  $b$  como desejado.

Se  $r$  e  $s$  são concorrentes em  $Q$ , então  $a = \overleftrightarrow{PQ}$ . Então  $\sigma_s\sigma_r$  é uma rotação com centro em  $Q$  e, pela Proposição 3.24, temos a existência de  $b$  conforme o enunciado. □

**Corolário 3.44** *Se as retas  $r, s$  e  $a$  são concorrentes em  $Q$ , então existe uma reta  $b$  tal que  $\sigma_s\sigma_r\sigma_a = \sigma_b$ .*

**Demonstração:** Da demonstração da proposição anterior, temos que  $\sigma_s\sigma_r = \sigma_b\sigma_a \Rightarrow \sigma_s\sigma_r\sigma_a = \sigma_b$ . □

**Proposição 3.45** *Um produto de quatro reflexões por retas pode ser escrito como um produto de duas reflexões por retas.*

**Demonstração:** Sejam  $p, q, r$  e  $s$  retas,  $P \in p$  e tome o produto  $\sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p$ . Pela Proposição 3.43, existem  $q'$  e  $r'$  tais que  $\sigma_r\sigma_q = \sigma_{r'}\sigma_{q'}$  e  $P \in q'$ . Também existem retas  $r''$  e  $a$  tais que  $\sigma_s\sigma_{r'} = \sigma_a\sigma_{r''}$  e  $P \in r''$ . Logo, por construção,  $p, q'$  e  $r''$  são concorrentes em  $P$ , de modo que, pelo Corolário 3.44, existe uma reta  $b$  tal que  $\sigma_{r''}\sigma_{q'}\sigma_p = \sigma_b$ . Segue que

$$\sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_s\sigma_{r'}\sigma_{q'}\sigma_p = \sigma_a\sigma_{r''}\sigma_{q'}\sigma_p = \sigma_a\sigma_b,$$

como desejado. □

### 3 Propriedades das Isometrias

**Proposição 3.46** *Uma isometria par é um produto de duas reflexões por retas. Uma isometria ímpar é uma reflexão por reta ou um produto de três reflexões por retas. Ademais, nenhuma isometria é par e ímpar ao mesmo tempo.*

**Demonstração:** Sejam  $\sigma_i$  reflexões por reta para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $\gamma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ , uma isometria. Usando a Proposição 3.45, podemos escrever  $\gamma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-4}\sigma'_1\sigma'_2$ , onde  $\sigma'_1\sigma'_2 = \sigma_{n-3}\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\sigma_n$ . Como a cada iteração desse processo subtraímos em 2 o número total de reflexões no produto, se  $n$  for par, ou seja, se  $\gamma$  for uma isometria par, então chegamos num produto de 2 reflexões por retas. Caso  $\gamma$  seja uma isometria ímpar, então chegamos num produto de 3 reflexões por reta e, caso duas reflexões consecutivas forem idênticas, obtemos apenas uma reflexão por reta.

Por fim, vamos mostrar que nenhuma isometria é par e ímpar simultaneamente. Suponha, por absurdo, que existam retas  $p, q, r, s$  e  $t$  tais que  $\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_s\sigma_t$ . Logo,  $\sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_t$  de modo que, pela Proposição 3.45, segue que existem retas  $u$  e  $v$  tais que

$$\sigma_v\sigma_u = \sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_t.$$

Mas, pelas Proposições 3.19 e 3.23,  $\sigma_v\sigma_u$  é uma translação ou uma rotação, que fixa nenhum ou um único ponto, respectivamente, enquanto  $\sigma_t$  fixa os pontos da reta  $t$ , um absurdo. Portanto, nenhuma isometria é par e ímpar ao mesmo tempo.  $\square$

### 3.4 Classificação das Isometrias

Não à toa viemos focando o estudo das isometrias apenas nestes quatro tipos de aplicações: qualquer isometria pode ser rotulada em algum deles, sendo este o principal resultado desta seção.

**Proposição 3.47** *Sejam  $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria diferente da identidade e  $P \in \Pi$  um ponto tal que  $\alpha(P) \neq P$ . Se  $P, Q = \alpha(P)$  e  $R = \alpha(Q)$  são distintos e não colineares, então  $\alpha$  é uma rotação ou uma reflexão transladada.*

**Demonstração:** Sejam os pontos  $P, Q$  e  $R$  como dados no enunciado e defina  $\alpha(R) = S$ . Temos que  $\triangle PQR \cong \triangle QRS$  pelo caso LLL de congruência de triângulos, pois

- $d(P, Q) = d(\alpha(P), \alpha(Q)) = d(Q, R)$ ;
- $d(Q, R) = d(\alpha(Q), \alpha(R)) = d(R, S)$ ;
- $d(R, P) = d(\alpha(R), \alpha(P)) = d(S, Q)$ .

### 3 Propriedades das Isometrias

Como  $P\hat{Q}R \cong Q\hat{R}S$ , então há duas posições possíveis para  $S$ :  $P$  e  $S$  pertencem ao mesmo semiplano definido pela reta  $\overleftrightarrow{QR}$  ou pertencem a semiplanos distintos.

Suponha que  $P$  e  $S$  pertençam ao mesmo semiplano. Seja  $s$  a mediatriz de  $\overline{PR}$  e note que

- $\sigma_s(P) = R$ ;
- $\sigma_s(Q) = Q$ ;
- $\sigma_s(R) = P$ .

Tome  $t$  a mediatriz de  $\overline{QR}$ , de modo que

- $\sigma_t(P) = S$ ;
- $\sigma_t(Q) = R$ ;
- $\sigma_t(R) = Q$ .

Assim, segue que

- $\sigma_t\sigma_s(P) = \sigma_t(R) = Q = \alpha(P)$ ;
- $\sigma_t\sigma_s(Q) = \sigma_t(Q) = R = \alpha(Q)$ ;
- $\sigma_t\sigma_s(R) = \sigma_t(P) = S = \alpha(R)$ .

Logo, pelo Teorema 3.2, temos que  $\alpha = \sigma_t\sigma_s$ . Note ainda que  $s$  e  $t$  são concorrentes, uma vez que  $P, Q$  e  $R$  são não colineares. Pela Proposição 3.23, concluímos que  $\sigma_t\sigma_s$  é uma rotação.

Suponha, agora, que  $P$  e  $S$  pertençam a semiplanos opostos. Tome a reta  $r$  como sendo a mediatriz de  $\overline{PQ}$ . Seja  $s$  como no caso anterior e tome  $u = \overleftrightarrow{PQ}$ . Observe que  $r \perp u$ , de maneira que, pela Proposição 3.22, temos  $\sigma_r\sigma_u = \sigma_M$ , onde  $M$  é o ponto médio de  $\overline{PQ}$ . Note que  $\sigma_M(P) = Q$  e  $\sigma_M(Q) = P$ . Defina  $\sigma_M(R) = R'$ . Vamos mostrar que  $\sigma_s(S) = R'$ . Para isso, suponha que  $\sigma_s(S) = S'$ . Temos que  $\triangle PQR \cong \triangle QPR'$  aplicando  $\sigma_M$  a cada um dos vértices, e  $\triangle QSR \cong \triangle QS'P$  aplicando  $\sigma_s$  e, por fim,  $\triangle QSR \cong \triangle PRQ$  pelo caso LLL de congruência de triângulos. Logo, temos que  $\triangle QS'P \cong \triangle QR'P$  e como  $R'$  e  $S'$  pertencem ao mesmo semiplano definido por  $u$ , então  $R' = S'$ . Portanto,  $\sigma_M(R) = R'$ .

Juntando essas informações, segue que

- $\sigma_s\sigma_M(P) = \sigma_s(Q) = Q = \alpha(P)$ ;

### 3 Propriedades das Isometrias

- $\sigma_s \sigma_M(Q) = \sigma_s(P) = R = \alpha(Q)$ ;
- $\sigma_s \sigma_M(R) = \sigma_s(R') = S = \alpha(R)$ .

Assim, pela Proposição 3.39,  $\alpha = \sigma_s \sigma_M$  é uma reflexão transladada.  $\square$

**Proposição 3.48** *Sejam  $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria diferente da identidade e  $P \in \Pi$  um ponto tal que  $\alpha(P) \neq P$ . Se  $P, Q = \alpha(P)$  e  $R = \alpha(Q)$  são distintos e colineares, então  $\alpha$  é uma translação ou uma reflexão transladada.*

**Demonstração:** Primeiramente, note que  $P-Q-R$  e  $Q$  é ponto médio de  $\overline{PR}$ , uma vez que  $d(P, Q) = d(\alpha(P), \alpha(Q)) = d(Q, R)$  e  $P \neq R$ . Além disso, temos que  $\alpha(r) = r$  pois  $\alpha(r)$  é uma reta que contém  $\alpha(P) = Q$  e  $\alpha(Q) = R$ . Considere o vetor  $\overrightarrow{PQ}$  e a restrição da translação pelo vetor  $\overrightarrow{PQ}$  à reta  $r$ , denotada por  $\tau_{P,Q} \upharpoonright_r$ . Assim, temos que  $\tau_{P,Q} \upharpoonright_r (P) = Q = \alpha(P)$  e  $\tau_{P,Q} \upharpoonright_r (Q) = R = \alpha(Q)$ . Tomando  $\phi = (\tau_{P,Q} \upharpoonright_r)^{-1} \alpha \upharpoonright_r$ , temos

$$\phi(P) = (\tau_{P,Q} \upharpoonright_r)^{-1} \alpha(P) = (\tau_{P,Q} \upharpoonright_r)^{-1} (\tau_{P,Q} \upharpoonright_r)(P) = P$$

e

$$\phi(Q) = (\tau_{P,Q} \upharpoonright_r)^{-1} \alpha(Q) = (\tau_{P,Q} \upharpoonright_r)^{-1} (\tau_{P,Q} \upharpoonright_r)(Q) = Q.$$

Afirmamos então que  $\phi = id_r$  pois, do contrário, existiria  $A \in r$  tal que  $\phi(A) \neq A$ , de modo que

$$d(P, A) = d(\phi(P), \phi(A)) = d(P, \phi(A)),$$

ou seja,  $P$  é ponto médio de  $\overline{A\phi(A)}$ . De modo análogo, teríamos que  $Q$  é ponto médio de  $\overline{A\phi(A)}$ , de onde segue que  $P = Q$ , um absurdo. Logo,  $id_r = \phi = (\tau_{P,Q} \upharpoonright_r)^{-1} \alpha \upharpoonright_r$  o que implica que  $\alpha \upharpoonright_r = \tau_{P,Q} \upharpoonright_r$ .

Seja, agora,  $S \notin r$ . Então o triângulo  $\Delta PQS$  é congruente ao triângulo formado pelos vértices  $\alpha(P) = Q, \alpha(Q) = R$  e  $\alpha(S) = S'$ . Há duas posições possíveis para  $S'$ :  $S$  e  $S'$  pertencem ao mesmo semiplano definido pela reta  $r$  ou pertencem a semiplanos distintos.

Suponha que  $S$  e  $S'$  pertençam ao mesmo semiplano. Então  $\square PQS'S$  é um paralelogramo pois  $d(P, S) = d(\alpha(P), \alpha(S)) = d(Q, S')$  e  $\overline{PS} \parallel \overline{QS'}$ , dado que os ângulos  $\widehat{SPQ}$  e  $\widehat{S'QR}$  são congruentes. Note que  $\tau_{P,Q}$  é tal que

- $\tau_{P,Q}(P) = Q = \alpha(P)$ ;
- $\tau_{P,Q}(Q) = R = \alpha(Q)$ ;
- $\tau_{P,Q}(S) = S' = \alpha(S)$ .

### 3 Propriedades das Isometrias

Portanto, pelo Teorema 3.2,  $\alpha = \tau_{P,Q}$  é uma translação.

Suponha, agora, que  $S$  e  $S'$  não pertençam ao mesmo semiplano. Assim, temos que  $\triangle PQS$  é congruente ao triângulo de vértices  $\sigma_r(P) = P$ ,  $\sigma_r(Q) = Q$  e  $\sigma_r(S) = S''$ . Segue então, de maneira semelhante ao caso anterior, que  $S' = \tau_{P,Q}(S'')$ . Assim sendo,

- $\tau_{P,Q}\sigma_r(P) = Q = \alpha(P)$ ;
- $\tau_{P,Q}\sigma_r(Q) = R = \alpha(Q)$ ;
- $\tau_{P,Q}\sigma_r(S) = S' = \alpha(S)$ .

Portanto, pelo Teorema 3.2,  $\alpha = \tau_{P,Q}\sigma_r$  é uma reflexão transladada. □

**Proposição 3.49** *Sejam  $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria diferente da identidade e  $P \in \Pi$  um ponto tal que  $\alpha(P) \neq P$ . Se  $Q = \alpha(P)$  e  $P = \alpha(Q)$ , então  $\alpha$  é uma reflexão por reta ou uma rotação.*

**Demonstração:** Temos que  $\alpha(\overline{PQ}) = \overline{\alpha(P)\alpha(Q)} = \overline{PQ}$ . Seja  $M$  o ponto médio do segmento  $\overline{PQ}$ , ou seja, temos que  $P-M-Q$ . Pela Proposição 1.7, segue que  $\alpha(P)-\alpha(M)-\alpha(Q)$ . Além disso,

$$d(\alpha(P), \alpha(M)) = d(P, M) = d(Q, M) = d(\alpha(Q), \alpha(M)),$$

de modo que  $\alpha(M) = M$ . Note que se tomarmos  $M'$  na mediatriz  $r$  de  $\overline{PQ}$  mas que não pertença ao segmento, temos que  $d(P, M') = d(Q, M')$ . Então,

$$d(P, \alpha(M')) = d(\alpha(Q), \alpha(M')) = d(Q, M') = d(P, M') = d(\alpha(P), \alpha(M')) = d(Q, \alpha(M')).$$

Dessa forma,  $\alpha$  preserva  $r$ , ou seja,  $\alpha(r) = r$ . Seja  $N \in r$ ,  $M \neq N$  e observe que  $d(M, N) = d(\alpha(M), \alpha(N)) = d(M, \alpha(N))$ . Note que  $P, Q$  e  $N$  não são colineares. Temos então dois casos a considerar: se  $\alpha(N) = N$  ou se  $\alpha(N) = \sigma_M(N)$ .

Suponha  $\alpha(N) = N$ . Como

- $\sigma_r(P) = Q = \alpha(P)$ ;
- $\sigma_r(Q) = P = \alpha(Q)$ ;
- $\sigma_r(N) = N = \alpha(N)$ ,

então pelo Teorema 3.2, segue que  $\alpha = \sigma_r$  é uma reflexão por reta.

Suponha, agora, que  $\alpha(N) = \sigma_M(N)$ . Observe que

- $\alpha(N) = \sigma_M(N)$ ;

### 3 Propriedades das Isometrias

- $\sigma_M(P) = Q = \alpha(P)$ ;
- $\sigma_M(Q) = P = \alpha(Q)$ .

Logo, pelo Teorema 3.2, temos que  $\alpha = \sigma_M = \rho_{M,\pi}$  é uma rotação.  $\square$

**Teorema 3.50** *Dada uma isometria  $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$  é possível classificá-la em quatro tipos além da identidade: translação, reflexão, rotação e reflexão transladada.*

**Demonstração:** Suponha  $\alpha \neq id$ . Então existe um ponto  $P \in \Pi$  tal que  $\alpha(P) \neq P$ . Tome  $Q = \alpha(P)$  e  $R = \alpha(Q)$ .

Se  $P, Q$  e  $R$  são distintos e não colineares, pela Proposição 3.47 temos que  $\alpha$  é uma rotação ou uma reflexão transladada.

Se  $P, Q$  e  $R$  são distintos e colineares, pela Proposição 3.48 temos que  $\alpha$  é uma translação ou uma reflexão transladada.

Se  $R = \alpha(Q) = P$ , pela Proposição 3.49 temos que  $\alpha$  é uma reflexão por reta ou uma rotação.

Portanto, com exceção da identidade, existem apenas quatro tipos de isometrias: translações, reflexões, rotações e reflexões transladadas.  $\square$

Como consequência dessa classificação e o conteúdo da sessão anterior, podemos afirmar que uma isometria par deve necessariamente ser uma translação ou uma rotação (e, particularmente, uma reflexão por ponto) e uma isometria ímpar deve necessariamente ser uma reflexão por reta ou uma reflexão transladada.

Neste último capítulo, chegaremos ao objetivo final de classificar as simetrias do plano, mas antes disso é necessário definirmos os Grupos de Papel de Parede e mostrar o Teorema da Restrição Cristalográfica, que facilitará as análises durante a classificação. A principal referência utilizada foi [5].

Para simplificar o texto, as reflexões por retas serão mencionadas apenas como reflexões, visto que as reflexões por ponto podem ser encaradas como casos particulares de rotações.

## 4.1 Restrição Cristalográfica

**Definição 4.1 (Grupo de papel de parede)** Um grupo de isometrias  $\mathcal{W}$  cujas translações são exatamente as pertencentes a  $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ , onde  $\tau_1 = \tau_{A,B}$  e  $\tau_2 = \tau_{A,C}$ , sendo  $A, B$  e  $C$  pontos não colineares, é chamado **grupo de papel de parede**.

**Definição 4.2 (Reticulado de translação)** Dado um ponto  $P$ , chamamos de **reticulado de translações** determinado pelo ponto  $P$  o conjunto de todas as imagens de  $P$  em relação às translações em  $\mathcal{W}$ .

**Observação 4.3** Toda translação em  $\mathcal{W}$  é da forma  $\tau_2^j \tau_1^i$ , com  $i, j \in \mathbb{Z}$ , de modo que todos os pontos  $A_{ij} := \tau_2^j \tau_1^i(A)$ , sendo  $A \in \Pi$  um ponto fixo, formam um reticulado de translação.

**Definição 4.4 (Célula Unitária)** Uma **célula unitária** de  $\mathcal{W}$  em relação ao ponto  $A$  é a região delimitada pelo paralelogramo de vértices  $A_{ij}$ ,  $A_{i+1,j}$ ,  $A_{i,j+1}$  e  $A_{i+1,j+1}$ . Se o paralelogramo for um retângulo, chamamos de **célula unitária retangular**; se for um losango, chamamos de **célula unitária losangular**.

**Definição 4.5** Dado  $\tau_{A,B}$ , dizemos que  $AB$  é o **comprimento da translação**. Além disso, a translação  $\tau_{A,B}$  é **mais curta** do que a translação  $\tau_{C,D}$  se  $AB < CD$ .

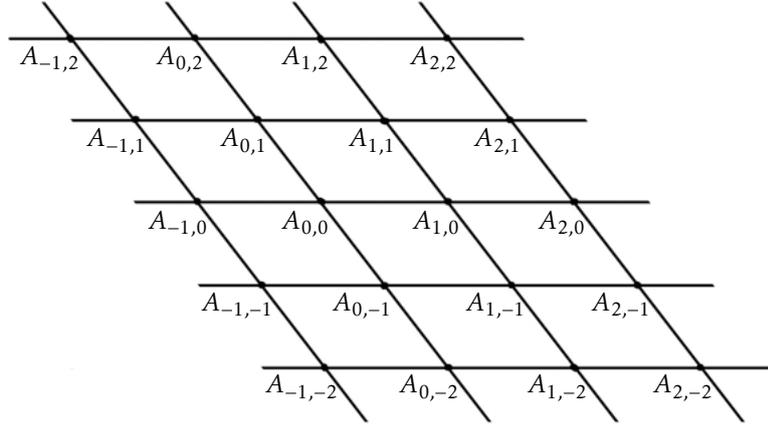


Figura 4.1: Reticulado de translação.

**Proposição 4.6** *Seja  $r$  uma reta. Se  $\sigma_r$  pertence a  $\mathcal{W}$ , então  $r$  é paralela à diagonal de uma célula unitária losangular ou contém um lado de uma célula unitária retangular.*

**Demonstração:** Seja  $A \in r$  um ponto. Defina  $\tau_{A,P}$  a menor translação possível em  $\mathcal{W}$  diferente da identidade. Temos então três casos:

1.  $\overleftrightarrow{AP} \neq r$  e  $\overleftrightarrow{AP}$  não é perpendicular a  $r$ .

Seja  $Q = \sigma_r(P)$ . Pela Proposição 3.30 temos que  $\sigma_r \tau_{A,P} \sigma_r = \tau_{\sigma_r(A), \sigma_r(P)} = \tau_{A,Q}$ . Logo,  $\tau_{A,Q} \in \mathcal{W}$ .

Agora, como  $Q = \sigma_r(P)$ , segue que  $AP = AQ$  e, além disso,  $A, P$  e  $Q$  são não colineares pois  $\overleftrightarrow{AP}$  não é perpendicular a  $r$ . Dessa forma,  $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,Q} \rangle$  é o grupo de todas as translações de  $\mathcal{W}$ . Note ainda que a reta  $r$  contém a diagonal de uma célula unitária losangular delimitada pelo losango de vértices  $P, A, Q$  e  $\tau_{A,P} \tau_{A,Q}(A)$ .

2.  $\overleftrightarrow{AP} = r$ .

Sejam  $s$  a reta perpendicular a  $\overleftrightarrow{AP}$  em  $A$ ,  $m$  a mediatriz de  $\overline{AP}$  e  $n = \sigma_s(m)$ . Tome  $\tau_{A,R}$  a menor translação em  $\mathcal{W}$  tal que  $\tau_{A,R} \notin \langle \tau_{A,P} \rangle$ . Então o ponto  $R$  pertence a  $m, n$  ou está entre  $m$  e  $n$ , do contrário,  $\tau_{A,P}^{\pm 1} \tau_{A,R}$  seria uma translação mais curta do que  $\tau_{A,R}$  em  $\mathcal{W}$ . Como  $\tau_{A,R}^{-1}$  também pertence à  $\mathcal{W}$ , tomando a composição com  $\sigma_r$  quando necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $R$  pertence a  $m, n$  ou está entre  $m$  e  $s$ . Seja  $S = \sigma_r(R)$ .

Consideremos, então, o caso em que  $R$  está entre as retas  $m$  e  $s$ . Como  $\overleftrightarrow{AP} = r$ , temos que  $\tau_{A,S} \tau_{A,R}$  seria uma translação mais curta que  $\tau_{A,P}$  em  $\mathcal{W}$ . Segue que  $R \in m, R \in n$  ou  $R \in s$ .

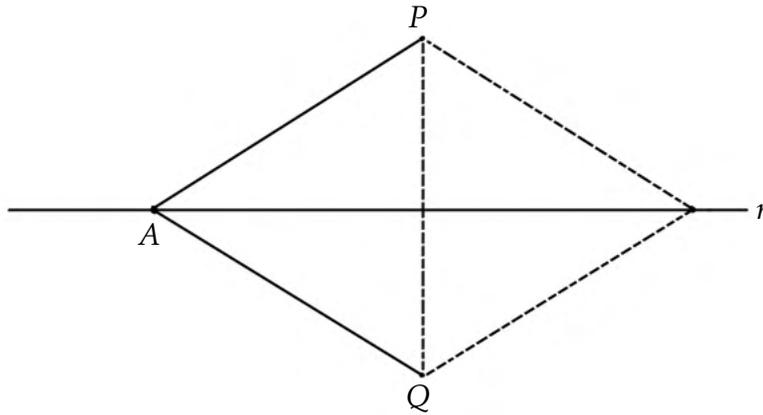


Figura 4.2: Construção do caso 1.

Suponha  $R \in m$ . Assim, temos que  $\square ASPR$  é um losango e, pela Proposição 1.17, segue que  $\tau_{A,S} = \tau_{R,P}$  e  $\tau_{A,R} = \tau_{S,P}$ . Dessa forma, pelo Teorema 1.16, temos que

$$\tau_{A,S}\tau_{A,R} = \tau_{R,P}\tau_{A,R} = \tau_{A,P}.$$

Portanto,  $\langle \tau_{A,R}, \tau_{A,S} \rangle = \langle \tau_{A,R}, \tau_{A,P} \rangle$ . Perceba que  $r$  contém a diagonal da célula unitária losangular  $\square ASPR$ .

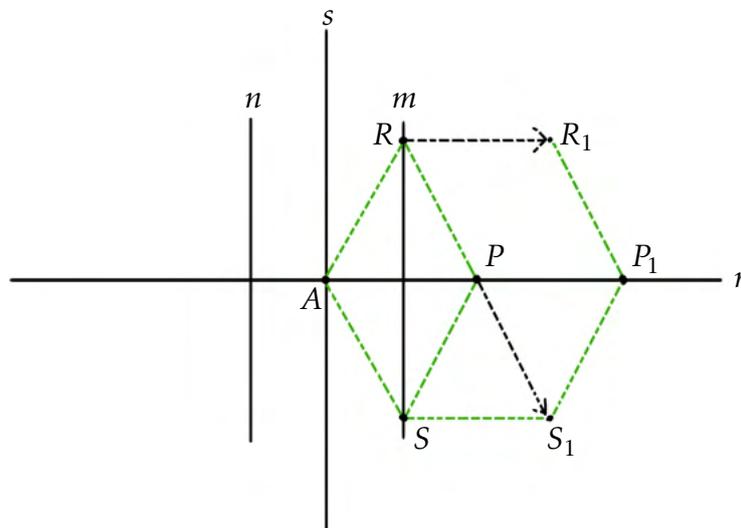


Figura 4.3: Construção do caso 2 onde  $R \in m$ .

No caso em que  $R \in n$ , basta tomar  $R' = \tau_{A,P}(R)$  no lugar de  $R$  no caso anterior para obter o resultado.

#### 4 Grupos de Papel de Parede

Suponha, agora,  $R \in s$ . Então  $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$  é o grupo de translações em  $\mathcal{W}$  e  $r$  contém um lado de uma célula unitária retangular, pois  $s$  é perpendicular a  $\overleftrightarrow{AP}$  em ambos os casos.

3.  $\overleftrightarrow{AP} \perp r$ .

Seguindo a construção feita no item anterior até a parte onde definimos  $S = \sigma_r(R)$ , continuamos com a hipótese de que  $R$  pertence às retas  $m, n$  ou está entre  $m$  e  $s$ . Caso  $R$  esteja entre  $m$  e  $s$ , então, como  $\overleftrightarrow{AP} \perp r$ , ou seja, como  $r = s$ , teríamos que  $\tau_{S,A}\tau_{A,R}$  seria uma translação mais curta que  $\tau_{A,P}$ . Segue que  $R \in m$ ,  $R \in n$  ou  $R \in s$ .

Suponha  $R \in m$ . Assim como no item anterior,  $\tau_{S,A}\tau_{A,R} = \tau_{A,P}$ , basta seguir de modo análogo. Tomando  $S_1 = \tau_{A,R}(S)$  segue que  $r$  contém a diagonal da célula unitária losangular  $\square ASS_1R$ .

Se  $R \in n$ , novamente, basta tomar  $R' = \tau_{A,P}(R)$  no lugar de  $R$  no caso anterior para obter o resultado.

Suponha, agora,  $R \in s$ . Então, do mesmo modo,  $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$  é o grupo de translações em  $\mathcal{W}$  e  $r$  contém um lado de uma célula unitária retangular, pois  $s$  é perpendicular a  $\overleftrightarrow{AP}$ .

□

**Proposição 4.7** *Se  $\mathcal{W}$  não possui reflexões mas contém uma reflexão transladada, então  $\mathcal{W}$  possui apenas células unitárias retangulares ou losangulares.*

**Demonstração:** Suponha que  $\mathcal{W}$  não possui reflexões mas contém uma reflexão transladada  $\alpha$  cujo eixo é  $l$ . Seja  $\tau$  a menor translação em  $\mathcal{W}$  que preserva a reta  $l$ . Como  $\alpha^2$  é uma translação que preserva a reta  $l$ , então podemos escrever  $\alpha^2 = \tau^n$  para algum inteiro  $n > 0$ . Caso  $n$  seja par, então é da forma  $2k$ , para algum  $k$  inteiro. Pela Proposição 3.40,  $\alpha$  e  $\tau$  comutam, de modo que  $(\alpha\tau^{-k})^2 = id$ . Então  $\alpha\tau^{-k}$  é uma isometria involutiva ímpar que, pela Proposição 3.26, deve ser  $\sigma_l$  pois  $l$  é preservada, uma contradição pois por hipótese,  $\mathcal{W}$  não possui reflexões. Logo,  $n$  é ímpar e então podemos escrever  $n = 2k + 1$ , com  $k$  um inteiro, e  $\alpha^2 = \tau^{2k+1}$ . Segue que  $(\tau^{-k}\alpha)^2 = \tau$ . Assim, definindo  $\gamma = \tau^{-k}\alpha$ , temos que  $\gamma$  é uma isometria ímpar cujo quadrado é  $\tau$ . Logo,  $\gamma$  é uma reflexão transladada que preserva  $l$ . Note que  $\gamma^2$  é uma das menores translações que preserva  $l$ . Tome um ponto  $A$  em  $l$  e  $a$  a reta perpendicular a  $l$  em  $A$ . Sejam  $m = \gamma(a)$ ,  $p = \gamma^2(a)$  e  $P = \gamma^2(A)$ . Temos então  $\tau_{A,P}$  uma das translações mais curtas no subgrupo  $\langle \gamma \rangle$ . Tome, agora,  $\tau_{A,B}$  uma das

## 4 Grupos de Papel de Parede

menores translações em  $\mathcal{W}$  que não pertencem a  $\langle \gamma^2 \rangle$ . Além disso, como  $\tau_{A,P}^{\pm 1} \tau_{A,B}$  não pode ser mais curta do que  $\tau_{A,B}$  podemos supor que  $B$  pertence a  $a$  ou está entre  $a$  e  $p$ . Caso  $B \in a$ , então  $\mathcal{W}$  possui célula unitária retangular e  $l$  é paralela a um dos lados de tal retângulo. Caso  $B$  esteja entre  $a$  e  $p$ , defina  $C = \sigma_l(B)$ . Pela Proposição 3.30, segue que  $\gamma \tau_{A,B} \gamma^{-1} = \tau_{\gamma(A), \gamma(B)}$ . Note que  $A' = \gamma(A)$  pertence à intersecção de  $l$  e  $m$  e tomando  $B' = \gamma(B)$ , temos que  $\square ACB'A'$  é um paralelogramo. Assim, pela Proposição 1.17, temos que  $\tau_{A,C} = \tau_{\gamma(A), \gamma(B)}$  e, portanto,  $\tau_{A,C} \in \mathcal{W}$ . Desse modo, segue que  $\tau_{A,B} \tau_{A,C} \in \mathcal{W}$ . Note que  $B \in m$  pois, do contrário, caso  $B$  esteja entre  $a$  e  $m$ , então  $\tau_{A,B} \tau_{A,C}$  seria uma translação mais curta do que  $\tau_{A,P}$ ; caso  $B$  esteja entre  $m$  e  $p$ , então  $\tau_{A,P}^{-1} \tau_{A,B} \tau_{A,C}$  seria uma translação mais curta que  $\tau_{A,P}$ . Deste modo,  $\square ACPB$  é uma célula unitária losangular cuja diagonal é a reta  $l$ .  $\square$

**Proposição 4.8** *Se uma reflexão transladada em  $\mathcal{W}$  preserva o reticulado de translação de  $\mathcal{W}$ , então  $\mathcal{W}$  contém uma reflexão.*

**Demonstração:** Suponha  $\gamma$  uma reflexão transladada que toma o ponto  $A$  e leva em  $P$  no reticulado de translação determinado por  $A$ . Então, como  $\gamma \tau_{P,A}$  é uma isometria ímpar que fixa o ponto  $A$ , segue que  $\gamma \tau_{P,A}$  é uma reflexão, uma vez que as reflexões transladadas não fixam nenhum ponto. Portanto,  $\mathcal{W}$  contém uma reflexão.  $\square$

**Definição 4.9** *Uma reta  $r$  é uma **reta de simetria** para um conjunto de pontos  $S$  se  $\sigma_r$  preserva  $S$ .*

**Definição 4.10** *Um ponto  $P$  é chamado  **$n$ -centro** de um grupo de isometrias  $\mathcal{G}$  se as rotações em  $\mathcal{G}$  com centro em  $P$  formam um grupo cíclico finito  $C_n$ , com  $n > 1$ . Um **centro de simetria** é um  $n$ -centro para algum  $n$ .*

**Observação 4.11** *O grupo cíclico finito  $C_n$  da definição anterior possui o elemento  $\rho_{P, \frac{2\pi}{n}}$  como um gerador.*

**Observação 4.12** *Se um ponto  $P$  é um  $n$ -centro de um grupo de simetrias de determinado conjunto de pontos, então  $P$  também é dito um  $n$ -centro para tal conjunto.*

**Proposição 4.13** *Se  $P$  é um  $n$ -centro de um grupo de isometrias  $\mathcal{G}$  que contém uma isometria que leva o ponto  $P$  em  $Q$ , então  $Q$  é também um  $n$ -centro de  $\mathcal{G}$ . Analogamente, se  $r$  é uma reta de simetria para um conjunto de pontos e o grupo de isometrias de tal conjunto possui uma isometria que leva  $r$  em  $s$ , então  $s$  é também uma reta de simetria para o conjunto.*

## 4 Grupos de Papel de Parede

**Demonstração:** Seja  $\alpha \in \mathcal{G}$  tal que  $\alpha(P) = Q$ . Pela Proposição 3.30, segue que

$$\alpha \rho_{P,\theta} \alpha^{-1} = \rho_{\alpha(P),\pm\theta} = \rho_{Q,\pm\theta}.$$

Para a segunda parte, note que, se  $\sigma_r, \beta \in \mathcal{G}$  e  $\beta$  é tal que  $\beta(r) = s$ , então, pela Proposição 3.29,

$$\beta \sigma_r \beta^{-1} = \sigma_{\beta(r)} = \sigma_s.$$

Logo,  $s$  é uma reta de simetria. □

**Proposição 4.14** *Sejam os pontos  $A, P \in \Pi$  distintos e  $n > 1$  inteiro. Se  $\rho_{A, \frac{2\pi}{n}}, \rho_{P, \frac{2\pi}{n}} \in \mathcal{W}$ , então  $2AP$  é maior ou igual ao comprimento da menor translação diferente da identidade em  $\mathcal{W}$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\rho_{P, \frac{2\pi}{n}}, \rho_{A, \frac{2\pi}{n}} \in \mathcal{W}$  rotações com  $A \neq P$  e  $n > 1$ . Então  $\mathcal{W}$  contém o produto  $\rho_{P, \frac{2\pi}{n}} \rho_{A, -\frac{2\pi}{n}}$  que, pelo Teorema 3.31, é uma translação diferente da identidade. Podemos escrever então  $\rho_{P, \frac{2\pi}{n}} \rho_{A, -\frac{2\pi}{n}} = \tau_2^j \tau_1^i$  com  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Segue que  $\rho_{P, \frac{2\pi}{n}} = \tau_2^j \tau_1^i \rho_{A, \frac{2\pi}{n}}$  e assim,

$$\rho_{P, \frac{2\pi}{n}}(A) = \tau_2^j \tau_1^i \rho_{A, \frac{2\pi}{n}}(A) = A_{ij}.$$

Assim, temos que se  $n = 2$ , ou seja, é uma rotação por  $\pi$ , então  $P$  é o ponto médio do segmento  $AA_{ij}$ . Se  $n > 2$ , então  $\triangle APA_{ij}$  é um triângulo isósceles. Em ambos os casos, usando a Desigualdade Triangular, segue que

$$2AP = AP + PA_{ij} \geq AA_{ij} > 0.$$

Portanto, a mais curta translação diferente da identidade em  $\mathcal{W}$  possui comprimento de no mínimo  $2AP$ . □

**Teorema 4.15 (Restrição Cristalográfica)** *Se  $P$  é um  $n$ -centro de um grupo de papel de parede  $\mathcal{W}$ , então  $n = 2, 3, 4$  ou  $6$ .*

**Demonstração:** Dado  $P$  um  $n$ -centro de  $\mathcal{W}$ , pela Proposição 4.13, podemos tomar um  $n$ -centro  $Q \neq P$  à menor distância possível de  $P$ . Defina  $R = \rho_{Q, \frac{2\pi}{n}}(P)$ . Então  $PQ = QR$ , de modo que  $R$  também é um  $n$ -centro. Da mesma forma, se  $S = \rho_{R, \frac{2\pi}{n}}(Q)$ , então  $S$  é um  $n$ -centro e  $RQ = QS$ .

Caso  $S = P$ , então o triângulo  $\triangle PQR$  é equilátero pois  $PQ = QR$  e  $RQ = RS = RP$ . Assim, seus ângulos internos medem  $\frac{2\pi}{6}$ , ou seja,  $n = 6$ .

#### 4 Grupos de Papel de Parede

Caso  $S \neq P$ , então  $SP \geq PQ = QR$  pela escolha do ponto  $Q$ . Dessa forma, devemos ter  $n < 6$  pois do contrário  $SP < PQ$ . Se  $n = 5$  então  $\square PQRS$  é um trapézio e  $SP < QR$ , contradição. Se  $n = 4$ , então  $\square PQRS$  é um quadrado, de modo que  $SP = PQ$ . Se  $n = 3$  então o segmento  $SP$  é uma das diagonais maiores de um hexágono regular, ou seja,  $SP = 2PQ > PQ$ . Se  $n = 2$  então

$$SP = PQ + QR + RS > PQ.$$

Portanto, os únicos valores que  $n$  admite são 2, 3, 4 e 6.

□

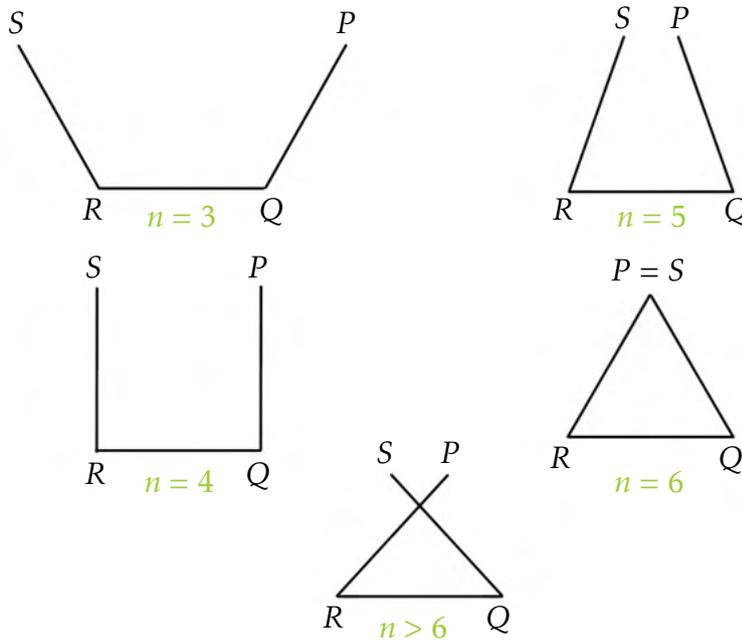


Figura 4.4: Intuição geométrica para os valores de  $n$  na Restrição Cristalográfica.

**Corolário 4.16** Se um grupo de papel de parede  $\mathcal{W}$  possui um 4-centro, então  $\mathcal{W}$  não pode ter 3-centros nem 6-centros.

**Demonstração:** Pela Restrição Cristalográfica, as rotações  $\rho_{P, \frac{2\pi}{4}}$ ,  $\rho_{Q, \frac{2\pi}{3}}$  e  $\rho_{Q, \frac{2\pi}{6}}$  não podem estar no mesmo grupo, pois a composição  $\rho_{P, \frac{2\pi}{4}} \rho_{Q, \frac{2\pi}{3}}$  resulta numa rotação de ângulo  $\frac{-2\pi}{12}$  e a composição  $\rho_{P, \frac{2\pi}{4}} \rho_{Q, \frac{-2\pi}{6}}$  resulta numa rotação de ângulo  $\frac{2\pi}{12}$ . □

Dado o conteúdo do teorema e corolário anterior, podemos ver que a Restrição Cristalográfica reduz significativamente os casos a serem considerados para a classificação, uma vez que não precisamos considerar  $n$ -centros maiores do que 6 e que 4-centros não se misturam com 3-centros nem com 6-centros.

## 4.2 Grupos de Papel de Parede

Para o restante deste trabalho, assumiremos que  $\mathcal{W}$  é um grupo de papel de parede, não sendo necessário destacar essa informação nos resultados.

**Definição 4.17** Dizemos que um centro de simetria  $G$  é **determinado** por um conjunto  $S$  de centros de simetrias quando:

- É da forma  $\alpha(A)$ , com  $A \in S$  e  $\alpha \in \mathcal{W}$ ;
- Pode ser definido como o centro de rotação numa composição de rotações cujos centros pertencem a  $S$ ;
- É uma combinação finita dos itens anteriores.

**Teorema 4.18** Seja  $A$  um 6-centro de  $\mathcal{W}$ . Então o  $n$ -centro mais próximo de  $A$  é um 2-centro  $M$  e  $A$  é o centro de um hexágono regular cujos vértices são 3-centros e cujas arestas possuem 2-centros como ponto médio. Todos os centros de simetria de  $\mathcal{W}$  são determinados por  $A$  e  $M$ .

**Demonstração:** Pelo Corolário 4.16, temos que  $\mathcal{W}$  não possui 4-centros. Seja  $M$  o  $n$ -centro mais próximo de  $A$ . Caso  $M$  seja um 3-centro ou um 6-centro, pelo Teorema 3.31, existiria um  $n$ -centro  $F$  tal que  $\rho_{M, \frac{2\pi}{3}} \rho_{A, \frac{\pi}{3}} = \rho_{F, \pi}$  ou  $\rho_{M, \frac{\pi}{3}}^2 \rho_{A, \frac{\pi}{3}} = \rho_{F, \pi}$  e, além disso, a reflexão pelo ponto  $F$  leva  $M$  em  $\rho_{A, \frac{\pi}{3}}^{-1}(M)$  e vice-versa. Dessa forma,  $F$  seria o ponto médio entre os pontos  $M$  e  $\rho_{A, \frac{\pi}{3}}^{-1}(M)$ , o que o tornaria um 2-centro mais próximo de  $A$  do que  $M$ , uma contradição. Logo,  $M$  é necessariamente um 2-centro.

Seja, agora,  $G$  o ponto tal que  $\rho_{M, \pi} \rho_{A, \frac{\pi}{3}}^{-1} = \rho_{G, \frac{2\pi}{3}}$ . Então  $G$  é um 3-centro ou um 6-centro. Note que, se  $G$  for um 6-centro, então a composição  $\rho_{G, \frac{\pi}{3}} \rho_{A, \frac{\pi}{3}} = \rho_{J, \frac{2\pi}{3}}$  seria tal que  $J$  estaria no segmento  $\overline{AM}$ , logo, seria um 3-centro ou 6-centro mais próximo de  $A$  do que  $M$ . De fato, seja  $a' = \overleftrightarrow{AM}$ . Escrevendo a rotação  $\rho_{A, \frac{\pi}{3}}$  como produto de duas retas, segundo a Proposição 3.24, podemos escolher a reta  $a'$  e a outra reta  $a$  pode ser obtida tomando  $a = \rho_{A, -\frac{\pi}{6}}(a')$ , ou seja, temos que  $\rho_{A, \frac{\pi}{3}} = \sigma_{a'} \sigma_a$ . Para a rotação  $\rho_{G, \frac{2\pi}{3}}$ , escolhendo a reta  $m = \overleftrightarrow{GM}$ , encontramos a reta  $a'' = \rho_{G, -\frac{\pi}{3}}(m)$ , ou seja,  $\rho_{G, \frac{2\pi}{3}} = \sigma_m \sigma_{a''}$ . Com isso, podemos escrever  $\rho_{G, \frac{\pi}{3}} = \sigma_m \sigma_{m'}$ , onde  $m'$  é a bissetriz do menor ângulo (em módulo) formado pelas retas  $a''$  e  $m$ . Agora, note que

$$\rho_{G, \frac{\pi}{3}} = \rho_{G, \frac{\pi}{3}}^{-1} \rho_{G, \frac{2\pi}{3}} = \sigma_{m'} \sigma_m \sigma_m \sigma_{a''} = \sigma_{m'} \sigma_{a''}.$$

Observe que, para a rotação  $\rho_{M, \pi}$ , escolhendo a reta  $a'$ , obtemos uma reta  $n$  que é perpendicular a  $a'$  em  $M$ , uma vez que a rotação se dá por um ângulo  $\pi$ . Como

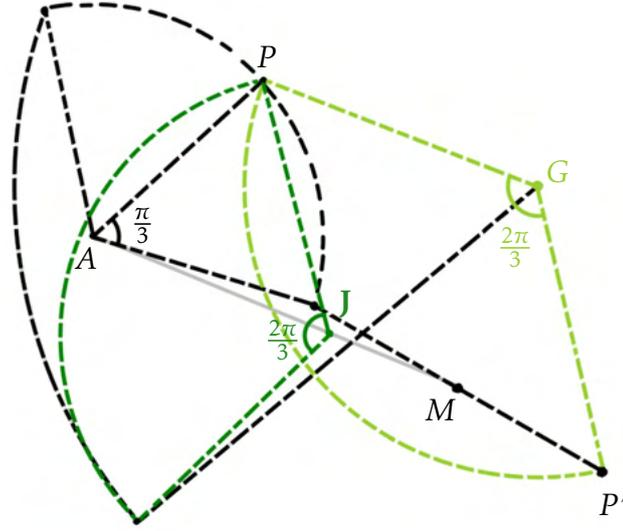


Figura 4.5: Rotações  $\rho_{G, \frac{2\pi}{3}}$  e  $\rho_{J, \frac{2\pi}{3}}$  no caso em que  $G$  é um 6-centro.

$\rho_{M, \pi} \rho_{A, \frac{\pi}{3}}^{-1} = \rho_{G, \frac{2\pi}{3}}$ , segue que

$$\sigma_m \sigma_{a''} = \rho_{G, \frac{2\pi}{3}} = \rho_{M, \pi} \rho_{A, \frac{\pi}{3}}^{-1} = \sigma_n \sigma_{a'} \sigma_a \sigma_{a'}.$$

Pelo Corolário 3.44, podemos escrever  $\sigma_{a'} \sigma_a \sigma_{a'} = \sigma_b$ , para alguma reta  $b$ . Assim,  $\sigma_m \sigma_{a''} = \sigma_n \sigma_b$  é uma rotação com centro em  $G$ , ou seja, as retas  $m, n, a''$  e  $b$  devem conter  $G$ . Portanto,  $m = n$ ,  $m$  é perpendicular a  $a'$  em  $M$  e  $b = a''$ . Além disso, pela Proposição 3.29, segue  $\sigma_{a''} = \sigma_{a'} \sigma_a \sigma_{a'} = \sigma_{\sigma_{a'}(a)}$ , de modo que  $A \in a''$ . Note que, como  $\sigma_{a'} \sigma_a \sigma_{a'} = \sigma_{a''}$ , temos que  $\sigma_{a''} \sigma_{a'} \sigma_a = \sigma_{a'}$ . Então,

$$\rho_{J, \frac{2\pi}{3}} = \rho_{G, \frac{\pi}{3}} \rho_{A, \frac{\pi}{3}} = \sigma_{m'} \sigma_{a''} \sigma_{a'} \sigma_a = \sigma_{m'} \sigma_{a'}.$$

Portanto,  $J \in \overline{AM}$  pois a reta  $m'$ , sendo bissetriz do ângulo oposto ao segmento  $\overline{AM} \subset a'$ , deve cruzar tal segmento.

Logo,  $G$  é um 3-centro. Segue que as imagens de  $G$  por potências de  $\rho_{A, \frac{\pi}{3}}$  são os vértices do hexágono descrito no enunciado e, pela Proposição 4.13, cada um dos vértices é um 3-centro. Da mesma maneira, as imagens de  $M$  por potências de  $\rho_{A, \frac{\pi}{3}}$  são 2-centros e são os pontos médios das arestas do hexágono.

Por último, temos que  $B = \sigma_M(A)$  e  $C = \rho_{A, \frac{\pi}{3}}(B)$  são 6-centros e  $N = \rho_{A, \frac{\pi}{3}}(M)$  é um 2-centro, de modo que os demais centros de simetria são encontrados compondo-se com as rotações obtidas na demonstração.

□

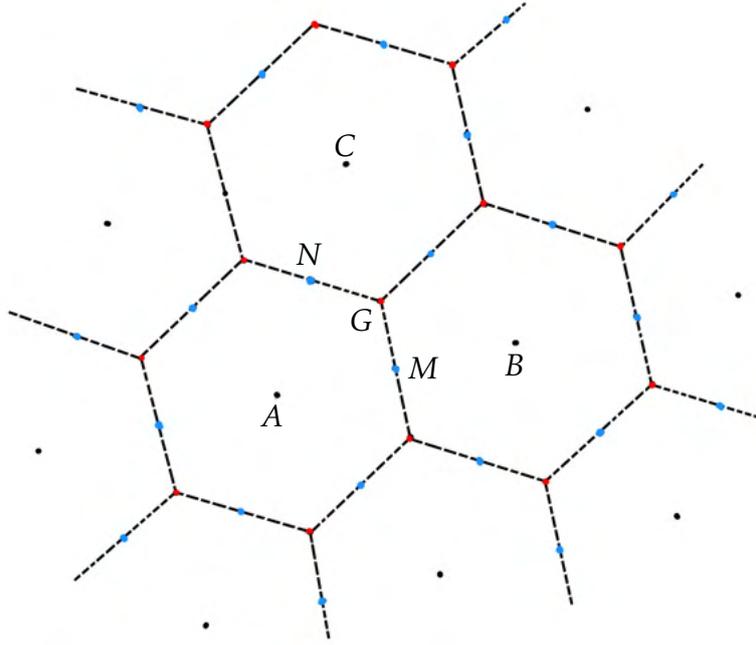


Figura 4.6: Disposição dos centros de simetria obtidos a partir dos pontos A e M.

**Teorema 4.19** *Seja A um 3-centro de um grupo de papel de parede  $\mathcal{W}$  que não possui 6-centros. Então todo centro de simetria é um 3-centro e A é o centro de um hexágono regular cujos vértices são 3-centros. Todos os centros de simetria de  $\mathcal{W}$  são determinados por A e o 3-centro mais próximo.*

**Demonstração:** Todo centro de simetria  $P$  ser um 3-centro segue do Corolário 4.16 e do fato de que a composição  $\rho_{A, \frac{-2\pi}{3}} \rho_{P, \pi}$  não pode estar em  $\mathcal{W}$ , uma vez que resulta numa rotação de  $\frac{\pi}{3}$  e, por hipótese,  $\mathcal{W}$  não possui 6-centros.

Tome  $G$  o 3-centro mais próximo de  $A$  e defina  $J$  um 3-centro tal que  $\rho_{G, \frac{2\pi}{3}} \rho_{A, \frac{2\pi}{3}} = \rho_{J, \frac{4\pi}{3}}$ . Pela Proposição 3.24, podemos escolher a reta  $a = \overleftrightarrow{AG}$  e obter uma outra reta  $a'$  para afirmar que  $\rho_{A, \frac{2\pi}{3}} = \sigma_{a'} \sigma_a$ . Pela Proposição 3.22, o menor ângulo entre as retas  $a$  e  $a'$  deve ser  $\frac{\pi}{3}$ . Da mesma forma, podemos escrever  $\rho_{G, \frac{2\pi}{3}} = \sigma_{a''} \sigma_a$  para alguma reta  $a''$  que contém o ponto  $G$  e que forma um ângulo de  $\frac{\pi}{3}$  com a reta  $a$ . Note que, como as duas rotações são positivas, as retas  $a'$  e  $a''$  são paralelas. Assim, pela Proposição 3.29, segue que

$$\rho_{J, \frac{4\pi}{3}} = \rho_{G, \frac{\pi}{3}} \rho_{A, \frac{\pi}{3}} = \sigma_{a''} (\sigma_a \sigma_{a'} \sigma_a) = \sigma_{a''} \sigma_{\sigma_a(a')} = \sigma_{a''} \sigma_b,$$

onde  $b$  é uma reta que passa pelo ponto  $A$ . Além disso, como a rotação é centrada em  $J$ , as retas  $a''$  e  $b$  devem conter tal ponto. Agora, a reta  $b$  é imagem da reta  $a'$  pela reflexão  $\sigma_a$ , de modo que o ângulo entre  $a$  e  $b$  na parte interna do triângulo

#### 4 Grupos de Papel de Parede

$\triangle AGJ$  é  $\frac{\pi}{3}$ . Como dito anteriormente, o ângulo entre  $a$  e  $a''$  também mede  $\frac{\pi}{3}$ , de onde concluímos que  $\triangle AGJ$  é um triângulo equilátero, de modo que as imagens de  $G$  e  $J$  por potências de  $\rho_{A, \frac{2\pi}{3}}$  são os vértices do hexágono descrito no enunciado.

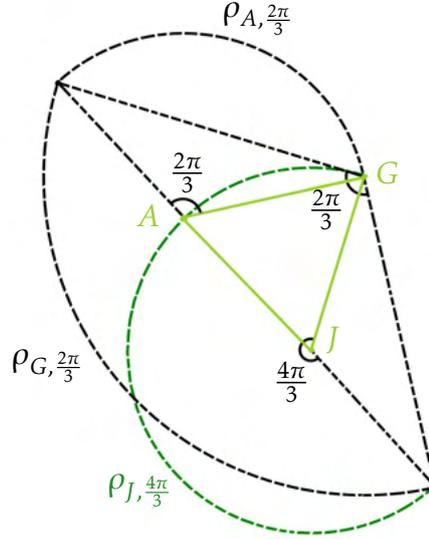


Figura 4.7: Composição  $\rho_{G, \frac{2\pi}{3}} \rho_{A, \frac{2\pi}{3}} = \rho_{J, \frac{4\pi}{3}}$  aplicada ao ponto  $G$ .

Por último, pela construção feita no parágrafo anterior, é imediato (pela escolha de  $G$ ) que os centros de simetria de  $\mathcal{W}$  são obtidos por  $A$  e por  $G$ , finalizando a demonstração.  $\square$

**Teorema 4.20** *Seja  $A$  um 4-centro de  $\mathcal{W}$ . Então o centro de simetria mais próximo de  $A$  é um 2-centro  $M$  e  $A$  é o centro de um quadrado cujos vértices são 4-centros e as arestas possuem 2-centros como ponto médio. Todos os centros de simetria de  $\mathcal{W}$  são determinados por  $A$  e  $M$ .*

**Demonstração:** Pelo Corolário 4.16, os centros de simetria de  $\mathcal{W}$  são 2-centros ou 4-centros. Seja  $M$  o centro de simetria mais próximo de  $A$ . Se  $M$  é um 4-centro, então existe um centro de simetria  $K$  definido  $\rho_{M, \frac{\pi}{2}} \rho_{A, \frac{\pi}{2}} = \sigma_K$  que está mais próximo de  $A$ , pois, seguindo a construção feita no Teorema 3.31,  $\triangle AKM$  é retângulo em  $K$  e isósceles, de modo que o segmento  $\overline{AM}$  é maior que  $\overline{AK}$ , uma contradição. Logo,  $M$  é um 2-centro.

O ponto  $E$  definido por  $\rho_{M, \pi} \rho_{A, \frac{\pi}{2}} = \rho_{E, \frac{\pi}{2}}$  é um 4-centro e as imagens de  $E$  pela rotação  $\rho_{A, \frac{\pi}{2}}$  são os vértices do quadrado descrito no enunciado, enquanto as imagens de  $M$  são os pontos médios.

## 4 Grupos de Papel de Parede

Por fim, seguindo a construção feita até aqui, é imediato (pela escolha de  $M$ ) notar que todos os centros de simetria são obtidos por  $A$  e por  $M$ .  $\square$

Com todos os resultados apresentados, podemos finalmente enunciar nosso objetivo.

**Teorema 4.21** *Existem apenas 17 grupos de papel de parede.*

**Demonstração:** Para esta demonstração, separaremos a classificação em tópicos de acordo com os  $n$ -centros contidos em cada grupo que, segundo a Restrição Cristalográfica, podem admitir os valores 2, 3, 4 ou 6. Ao longo de cada item, definiremos um grupo da categoria e encontraremos os demais adicionando isometrias. Note que é irrelevante considerar adições de isometrias pares (rotações e translações), pois todas as translações são provenientes do subgrupo  $\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$ , e as rotações estão sendo consideradas nos  $n$ -centros de cada grupo. Dito isso, estenderemos os grupos apenas adicionando isometrias ímpares (reflexões e reflexões transladadas).

- Grupos que contêm 6-centros.

Suponha que  $A$  seja um 6-centro em  $\mathcal{W}$ . Pelo Teorema 4.18, se  $M$  é o  $n$ -centro mais próximo de  $A$ , então  $M$  é um 2-centro. Tomando  $B = \sigma_M(A)$  e  $C = \rho_{A, \frac{\pi}{3}}(B)$ , temos que, pela Proposição 4.13,  $B$  e  $C$  são 6-centros. Pela Proposição 3.14 e pelo fato de  $M$  ser ponto médio de  $\overline{AB}$  e  $N$  ser ponto médio de  $\overline{AC}$ , temos que

$$\sigma_M \rho_{A, \frac{\pi}{3}}^3 = \sigma_M \sigma_A = \tau_{A,B}$$

e

$$\sigma_N \rho_{A, \frac{\pi}{3}}^3 = \sigma_N \sigma_A = \tau_{A,C}$$

são translações e, pelo Teorema 4.18, são as menores translações em  $\mathcal{W}$ , ou seja, geram o subgrupo de translações de  $\mathcal{W}$ . Assim temos o primeiro grupo de papel de parede da nossa classificação:

$$\mathcal{W}_6 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A, \frac{\pi}{3}} \rangle,$$

com  $\triangle ABC$  equilátero e  $M$  ponto médio de  $\overline{AB}$ . Veja as Figuras 4.8 e 4.9.

Vamos estender  $\mathcal{W}_6$  para um outro grupo  $\mathcal{W}$ . Como o reticulado de translações determinado pelos 6-centros deve ser preservado pelas isometrias em  $\mathcal{W}$  e adicionaremos apenas reflexões e reflexões transladadas, pela Proposição 4.8,

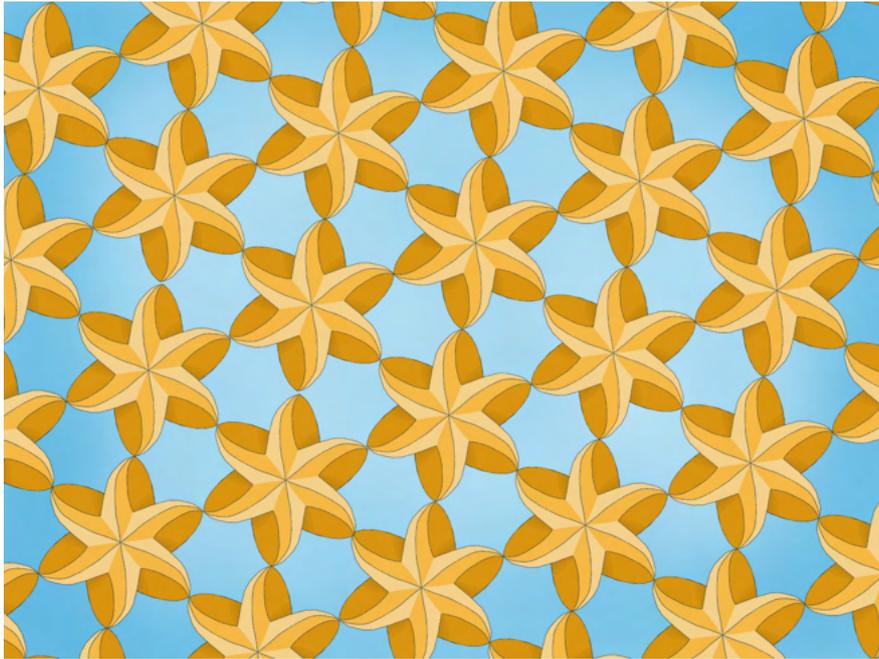


Figura 4.8: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_6$ .

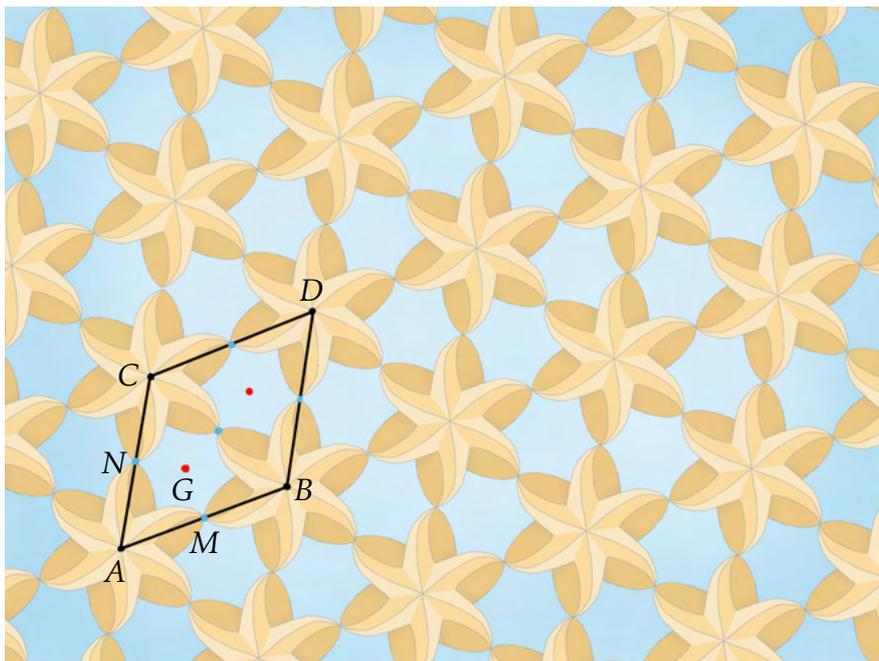


Figura 4.9: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_6$ .

tais extensões são obtidas adicionando-se reflexões em  $\mathcal{W}_6$  que fixam o reticulado. Seja  $\square ABDC$  uma célula unitária losangular e  $G$  como na demonstração do Teorema 4.18. Note que, ao adicionarmos a reflexão pela reta  $\overleftrightarrow{MG}$ , todas as outras possíveis reflexões também são introduzidas ao grupo. De fato,

#### 4 Grupos de Papel de Parede

temos que  $\overleftrightarrow{AG} = \rho_{B, \frac{2\pi}{3}}(\overleftrightarrow{MG})$  é uma reta de simetria, de acordo com a Proposição 4.13, e podemos escrever  $\sigma_{AC}^{\overleftrightarrow{AG}} = \rho_{A, \frac{\pi}{3}}\sigma_{AG}^{\overleftrightarrow{AG}}$ , bastando notar que os pontos  $A, B$  e  $C$  satisfazem a hipótese do Teorema 3.2. Qualquer outra reflexão deve ser como descrita na Proposição 4.6 e pode ser obtida através de composições. Segue então o segundo grupo da classificação:

$$\mathcal{W}_6^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A, \frac{\pi}{3}}, \sigma_{MC}^{\overleftrightarrow{AG}} \rangle.$$

Veja as Figuras 4.10 e 4.11.

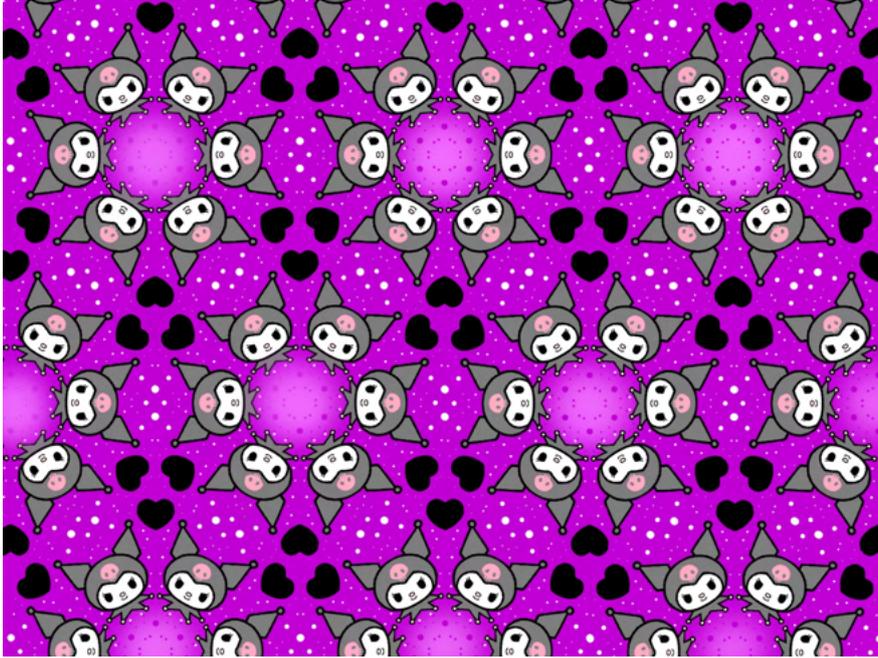


Figura 4.10: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_6^1$ .

Com isso, concluímos que um grupo de papel de parede que contém um 6-centro possui grupo de simetria  $\mathcal{W}_6$  ou  $\mathcal{W}_6^1$ .

- Grupos que contêm 3-centros e não possuem 6-centros.

Suponha que  $A$  seja um 3-centro em  $\mathcal{W}$ . Pelo Teorema 4.19, todo centro de simetria é um 3-centro. Tomando  $G$  e  $J$  como na demonstração de tal teorema, então, como  $\rho_{G, \frac{2\pi}{3}}\tau_{A,G} = \rho_{Q, \frac{2\pi}{3}}$  e  $\rho_{J, -\frac{2\pi}{3}}\tau_{A,J} = \rho_{Q, -\frac{2\pi}{3}}$ , com  $Q$  o centro de massa do triângulo  $\triangle AGJ$ , segue que  $\tau_{A,G}$  e  $\tau_{A,J}$  não pertencem a  $\mathcal{W}$ , do contrário,  $Q$  seria um 3-centro mais próximo de  $A$  do que  $G$ . Agora, se  $\tau_{A,B}$  é uma das translações mais curtas em  $\mathcal{W}$ , então  $B$  é um 3-centro que não é vértice do

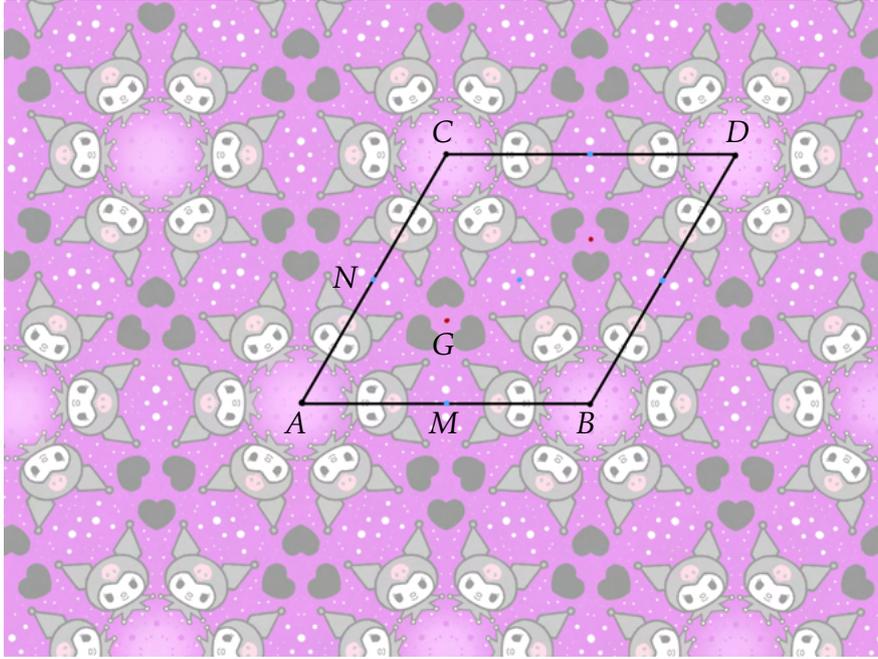


Figura 4.11: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}^1_6$ .

hexágono descrito no Teorema 4.19. Defina, então,  $B$  e  $C$  de modo que

$$\tau_{A,B} = \rho_{G, \frac{2\pi}{3}} \rho_{A, \frac{-2\pi}{3}}$$

e

$$\tau_{A,C} = \rho_{G, \frac{-2\pi}{3}} \rho_{A, \frac{2\pi}{3}}$$

são as translações mais curtas não paralelas em  $\mathcal{W}$ . Assim,

$$\mathcal{W}_3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A, \frac{2\pi}{3}} \rangle$$

é o nosso terceiro grupo de papel de parede da classificação. Veja as Figuras 4.12 e 4.13.

Vamos estender  $\mathcal{W}_3$  para um outro grupo  $\mathcal{W}$  adicionando uma reflexão transladada. Pela Proposição 4.8, a reflexão transladada deve levar o 3-centro  $A$  em um outro 3-centro que não pertence ao reticulado de translações definido por  $A$ . Ao compor tal reflexão transladada com translações (e possivelmente rotações em torno de  $A$ ), podemos assumir que existe em  $\mathcal{W}$  uma reflexão transladada que leva  $A$  em  $G$  ou  $J$  pois, caso contrário, se o ponto  $A$  fosse levado a um ponto diferente de  $G$  ou  $J$  (dentro ou fora da célula unitária  $\square ABDC$ ), compondo com as translações presentes no grupo, poderíamos en-

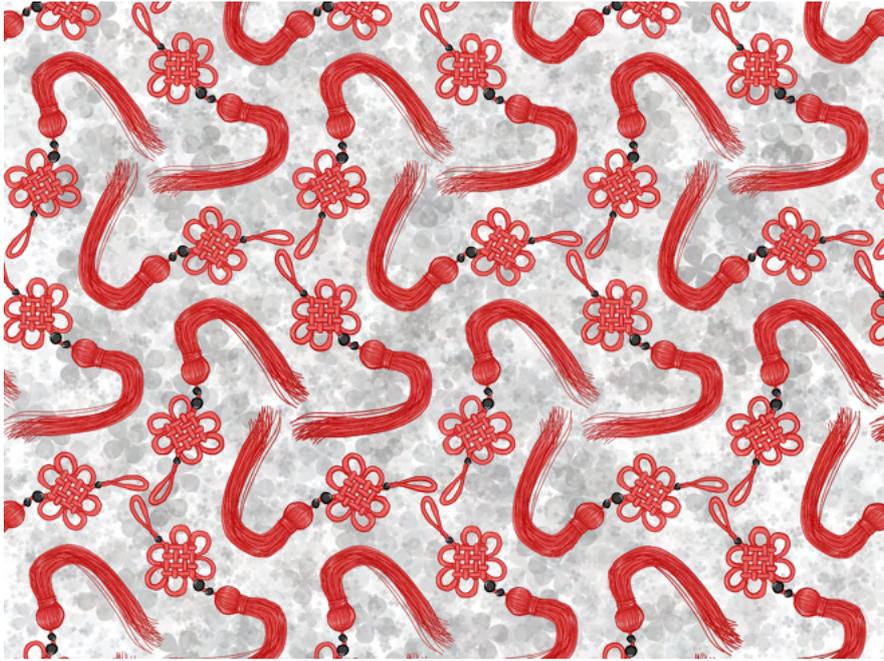


Figura 4.12: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_3$  (desconsiderando as flores ao fundo).

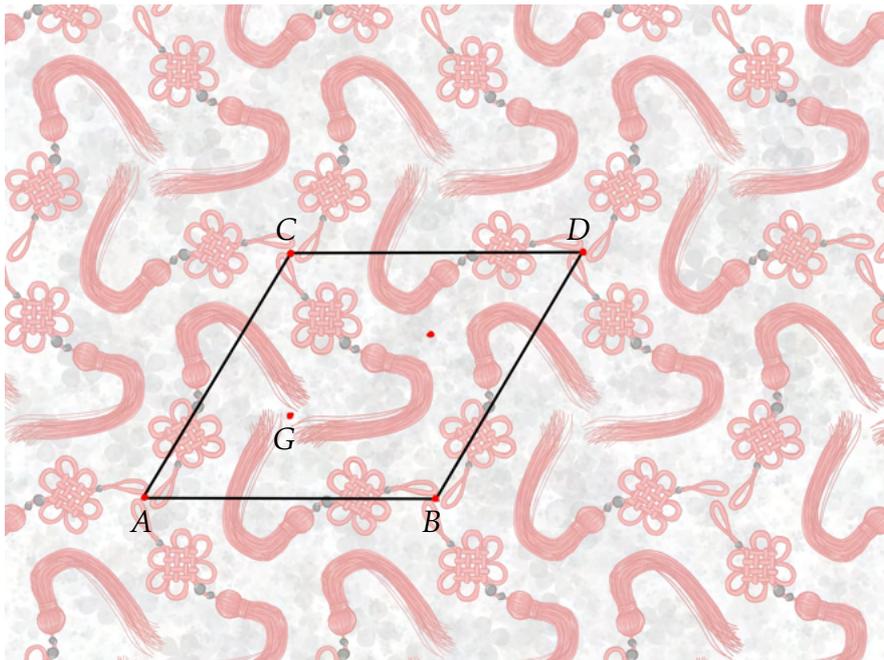


Figura 4.13: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_3$ .

contrar um 3-centro em  $\square ABDC$  cuja distância a outro 3-centro seria menor do que a distância de  $A$  a  $G$ , uma contradição. Suponha  $\gamma$  a reflexão transladada que leva  $A$  em  $G$ . Pela Proposição 3.39, podemos escrever  $\gamma = \sigma_t \sigma_T$ , com

#### 4 Grupos de Papel de Parede

$T$  ponto médio de  $\overline{AG}$  e  $t$  uma reta que contém  $G$ . Note que  $\sigma_T$  preserva o conjunto de todos os 3-centros, logo,  $\sigma_t$  também deve preservar, uma vez que  $\gamma$  preserva o conjunto de 3-centros. Compondo  $\sigma_t$  com uma rotação em torno de  $G$ , podemos assumir  $t = \overline{GJ}$  ou  $t$  é a mediatriz de  $\overline{JB}$ . Se  $t$  é a mediatriz de  $\overline{JB}$ , então  $\overleftrightarrow{AG}$  é o eixo de  $\gamma$  e  $\tau_{B,A}\gamma^2$  seria uma translação de tamanho  $AG$ , ou seja, menor do que  $\tau_{A,B}$ , uma contradição. Logo,  $t = \overleftrightarrow{GJ}$ . Observe que, escolhendo a reta  $t$ , a reta  $\overleftrightarrow{AG}$  satisfaz a igualdade  $\rho_{G, \frac{-2\pi}{3}} = \sigma_{\overleftrightarrow{AG}}\sigma_t$ , de onde segue que

$$\rho_{G, \frac{-2\pi}{3}}\gamma = \sigma_{\overleftrightarrow{AG}}\sigma_t\sigma_t\sigma_T = \sigma_{\overleftrightarrow{AG}}\sigma_T = \sigma_{\overleftrightarrow{TJ}}.$$

Note que, escolhendo a reta  $\overleftrightarrow{AG}$ , a reta  $\overleftrightarrow{TJ}$  satisfaz  $\sigma_T = \sigma_{\overleftrightarrow{AG}}\sigma_{\overleftrightarrow{TJ}}$  nesta ordem, segundo as Proposições 3.23 e 3.24. Assim,

$$\rho_{G, \frac{-2\pi}{3}}\gamma = \sigma_{\overleftrightarrow{AG}}\sigma_T = \sigma_{\overleftrightarrow{TJ}}.$$

De forma análoga, se  $\gamma$  é tal que  $\gamma(A) = J$ , então  $\mathcal{W}$  contém a reflexão pela mediatriz de  $\overline{AJ}$ .

Ou seja, ao adicionarmos uma reflexão transladada a  $\mathcal{W}_3$ , então tal extensão contém uma reflexão por uma reta que, pela Proposição 4.6, deve conter a diagonal de uma célula unitária losangular. Se quisermos estender  $\mathcal{W}_3$  adicionando  $\sigma_l$ , então  $l$  é uma reta de simetria para o conjunto de todos os 3-centros e deve conter pelo menos um 3-centro. Suponha, sem perda de generalidade, que  $l$  passa por  $A$ . Dessa forma, esta extensão deve ser uma das duas seguintes:

$$\mathcal{W}_3^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A, \frac{2\pi}{3}}, \sigma_{\overleftrightarrow{AG}} \rangle$$

ou

$$\mathcal{W}_3^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A, \frac{2\pi}{3}}, \sigma_{\overleftrightarrow{AB}} \rangle.$$

Veja as Figuras 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17, respectivamente.

Perceba que cada um destes grupos contém a reflexão por apenas uma das diagonais da célula unitária losangular, pois se adicionarmos a reflexão por ambas as diagonais, introduziríamos 6-centros e 2-centros. Assim, qualquer grupo de papel de parede que contém somente 3-centros deve ser  $\mathcal{W}_3$ ,  $\mathcal{W}_3^1$  ou  $\mathcal{W}_3^2$ .

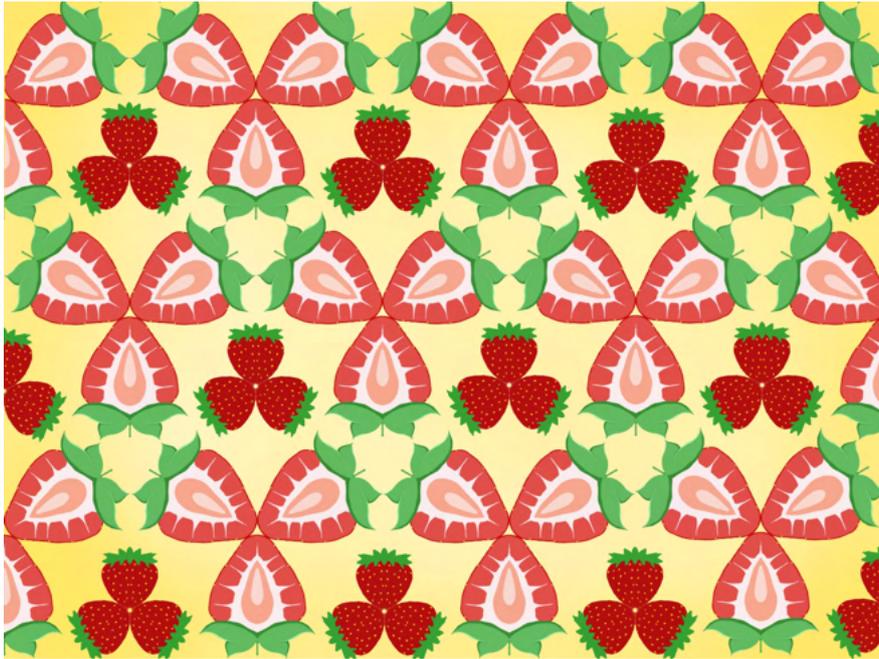


Figura 4.14: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_3^1$ .

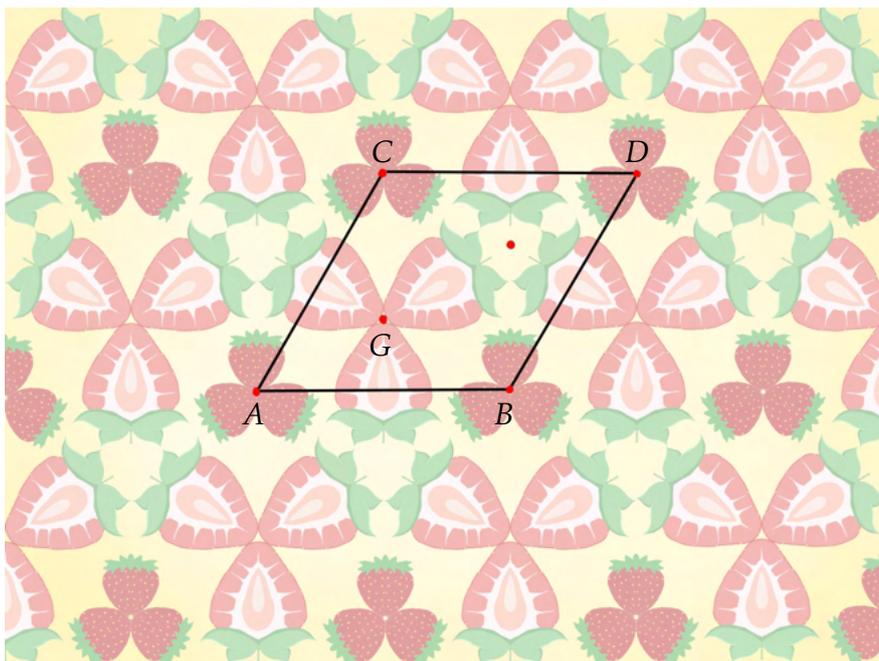


Figura 4.15: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_3^1$ .

- Grupos que contêm 4-centros.

Suponha, agora, que  $A$  seja um 4-centro em um grupo  $\mathcal{W}$ . Pelo Teorema 4.20, o centro de simetria mais próximo de  $A$  é um 2-centro  $M$ . Seja  $E$  um 4-centro como na demonstração de tal teorema. A translação  $\tau_{A,E}$  não pertence a  $\mathcal{W}$ ,

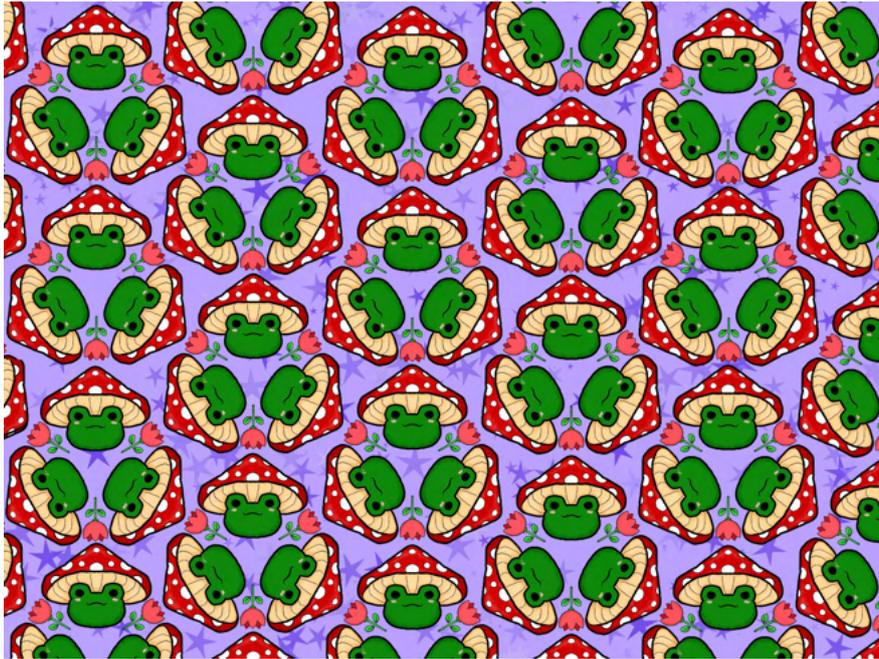


Figura 4.16: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathscr{W}_3^2$  (desconsiderando as estrelas ao fundo).

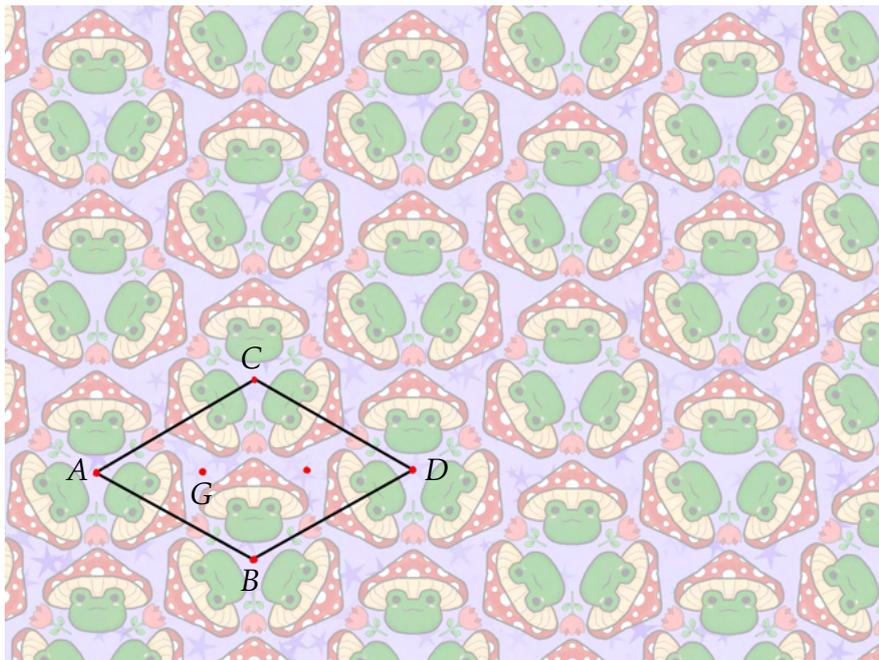


Figura 4.17: Célula unitária em um grupo  $\mathscr{W}_3^2$ .

do contrário existiria um centro de simetria  $Z$  definido por  $\tau_{A,E}\sigma_A = \sigma_Z$  que estaria mais próximo de  $A$  do que  $M$ . Defina  $N = \rho_{A,\frac{\pi}{2}}(M)$ . Se  $B$  e  $C$  são tais que  $M$  é ponto médio de  $\overline{AB}$  e  $N$  é ponto médio de  $\overline{AC}$  então, pela Proposição

#### 4 Grupos de Papel de Parede

3.14, segue que  $\tau_{A,B} = \sigma_M \sigma_A$  e  $\tau_{A,C} = \sigma_N \sigma_A$ . Assim,  $\tau_{A,B}$  e  $\tau_{A,C}$  são as menores translações do grupo. Defina  $D = \tau_{A,C} \tau_{A,B}(A)$ . Segue então o próximo grupo da classificação:

$$\mathcal{W}_4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A, \frac{\pi}{2}} \rangle.$$

Veja as Figuras 4.18 e 4.19.

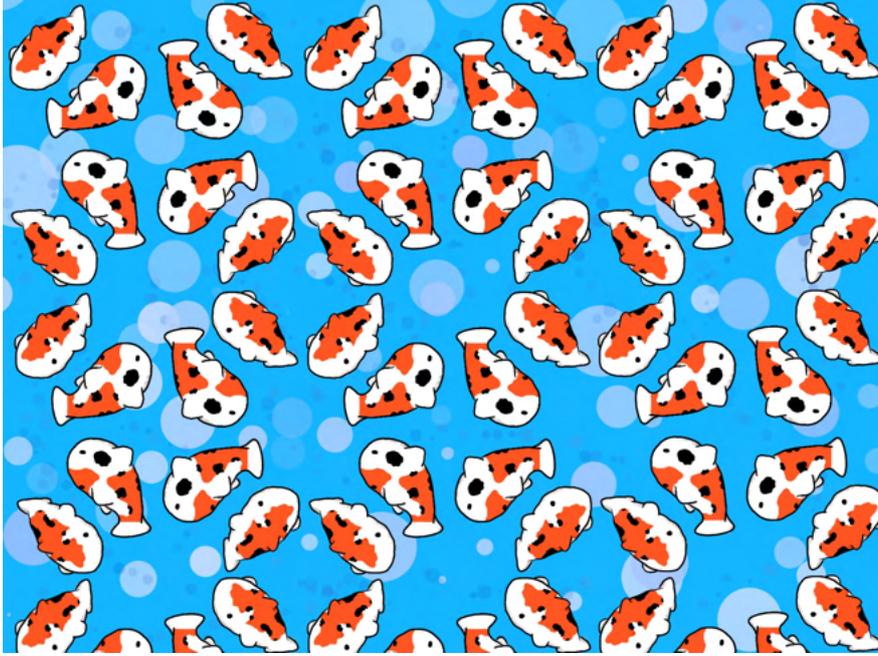


Figura 4.18: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_4$  (desconsiderando os círculos ao fundo).

Vamos estender  $\mathcal{W}_4$  para um outro grupo  $\mathcal{W}$  adicionando isometrias ímpares. Suponha que a reflexão  $\sigma_l$  seja adicionada. Então  $l$  deve ser uma reta de simetria para o conjunto de todos os 4-centros de  $\mathcal{W}$ . Assim,  $l$  contém pelo menos um 4-centro ou  $l$  não contém nenhum 4-centro. Suponha, sem perda de generalidade, que  $l = \overleftrightarrow{AE}$  ou  $l = \overleftrightarrow{MN}$ . Então obtemos os seguintes grupos:

$$\mathcal{W}_4^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A, \frac{\pi}{2}}, \sigma_{\overleftrightarrow{AE}} \rangle$$

e

$$\mathcal{W}_4^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A, \frac{\pi}{2}}, \sigma_{\overleftrightarrow{MN}} \rangle.$$

Veja as Figuras 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23, respectivamente.

Note que, se  $\sigma_{\overleftrightarrow{AE}}$  e  $\sigma_{\overleftrightarrow{MN}}$  fossem ambos adicionados a  $\mathcal{W}_4$ , então a intersecção entre  $\overleftrightarrow{AE}$  e  $\overleftrightarrow{MN}$  seria um centro de simetria mais próximo de  $A$  do que  $M$ .

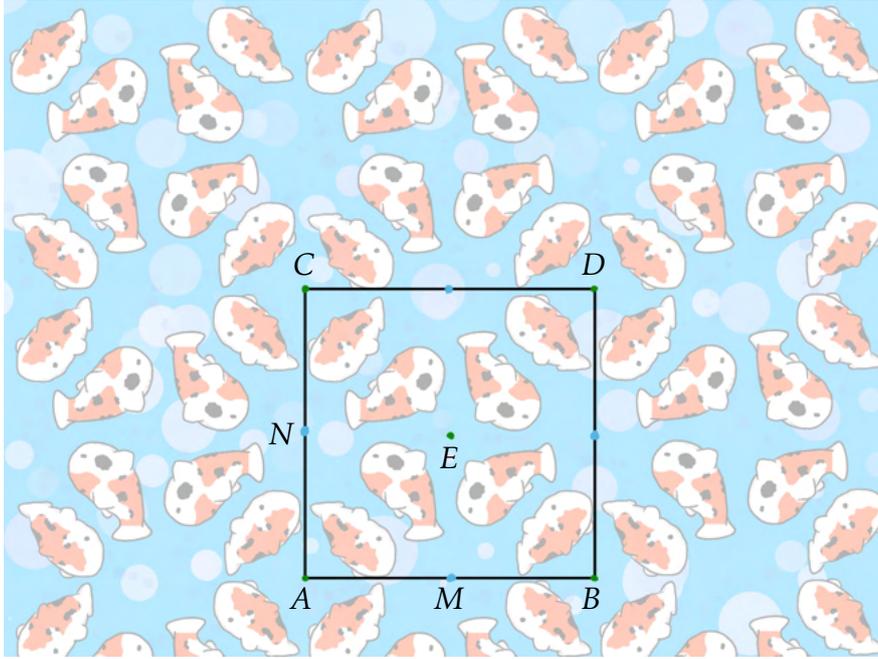


Figura 4.19: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_4$ .

Agora, se quiséssemos estender com isometrias ímpares mas sem reflexões, então, pela Proposição 4.8, podemos supor que existe uma reflexão transladada  $\gamma$  que leva  $A$  em um 4-centro que não pertence ao reticulado de translações determinado por  $A$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\gamma$  leva  $A$  em  $E$ . Tomando  $T$  ponto médio de  $\overline{AE}$  e  $t$  uma reta que passa por  $E$  mas não por  $A$ , então, seguindo a demonstração da Proposição 3.39, temos que  $\gamma = \sigma_t \sigma_T$ . Note que  $t = \overleftrightarrow{ME}$ ,  $t = \overleftrightarrow{BE}$  ou  $t = \overleftrightarrow{NE}$  pois  $\gamma$  preserva o conjunto de 4-centros do grupo. No entanto, obtemos a reflexão por  $\overleftrightarrow{MN}$  ao compormos  $\gamma$  com  $\rho_{E, \frac{\pi}{2}}$ ,  $\rho_{E, \pi}$  ou  $\rho_{E, \frac{3\pi}{2}}$ , correspondendo respectivamente às retas citadas anteriormente. Portanto, como em qualquer extensão de  $\mathcal{W}_4$  existem reflexões por retas, pela Proposição 4.6, essas reflexões devem conter a diagonal ou o lado de uma célula unitária. Por conta disso, todas as extensões de  $\mathcal{W}_4$  por isometrias ímpares devem ser  $\mathcal{W}_4^1$  ou  $\mathcal{W}_4^2$ .

- Grupos que contêm apenas 2-centros.

Seja, agora,  $\mathcal{W}$  um grupo onde  $A$  e todos os outros centros de simetria são 2-centros. Tomando  $\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$  o subgrupo de translações e, como  $\sigma_A \in \mathcal{W}$ , usando a Proposição 3.14, defina  $M$  e  $N$  de modo que  $\sigma_M = \tau_{A,B} \sigma_A$  e  $\sigma_N = \tau_{A,C} \sigma_A$ , ou seja, os pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente. Usando a Proposição 3.15, defina  $E$  tal que  $\sigma_E = \sigma_N \sigma_A \sigma_M$ . Segue que  $M, N$  e  $E$

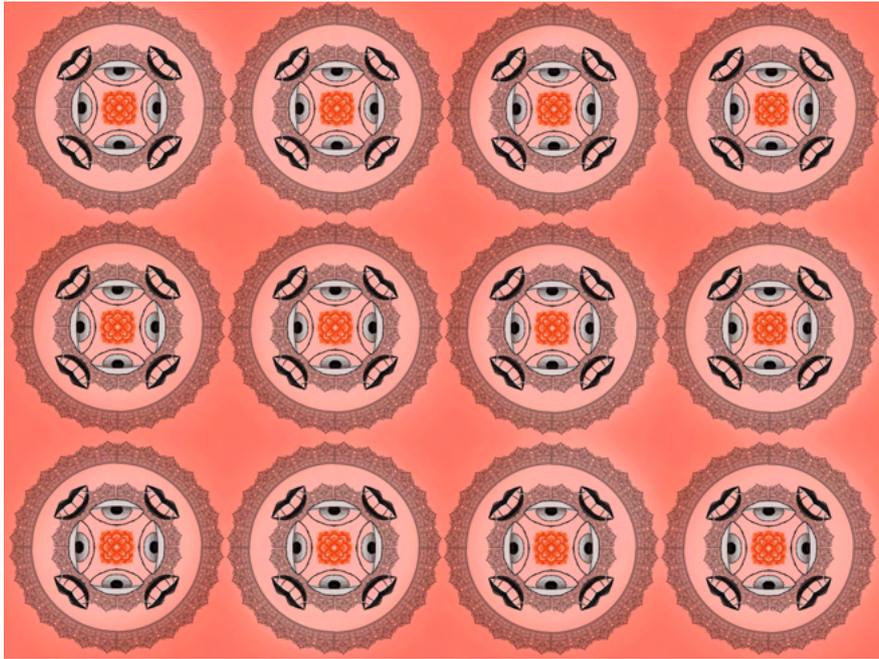


Figura 4.20: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathscr{W}_4^1$ .

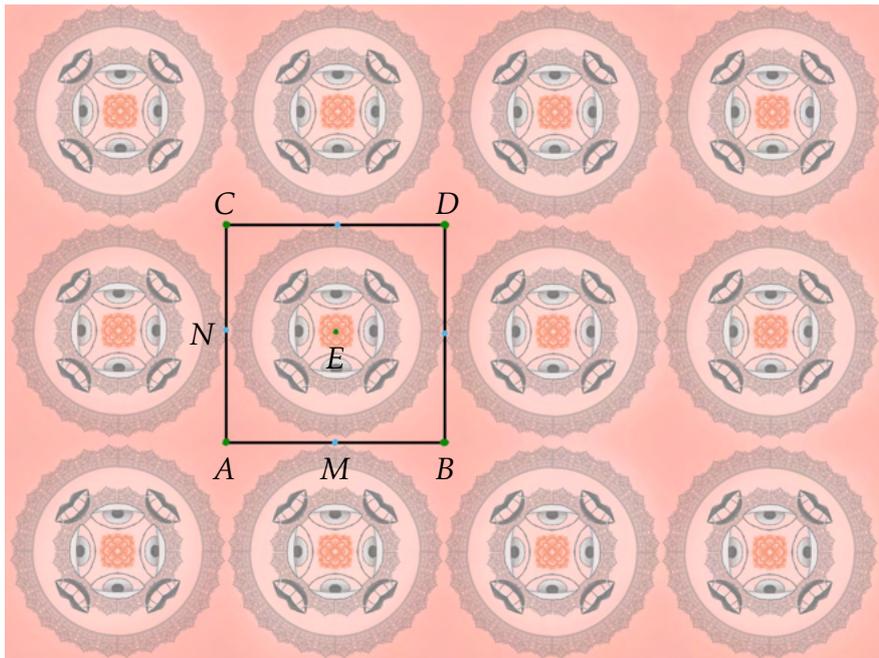


Figura 4.21: Célula unitária em um grupo  $\mathscr{W}_4^1$ .

são 2-centros, assim como os demais centros de simetria e pontos médios entre quaisquer pontos no reticulado de translações determinado por  $A$ . Obtemos

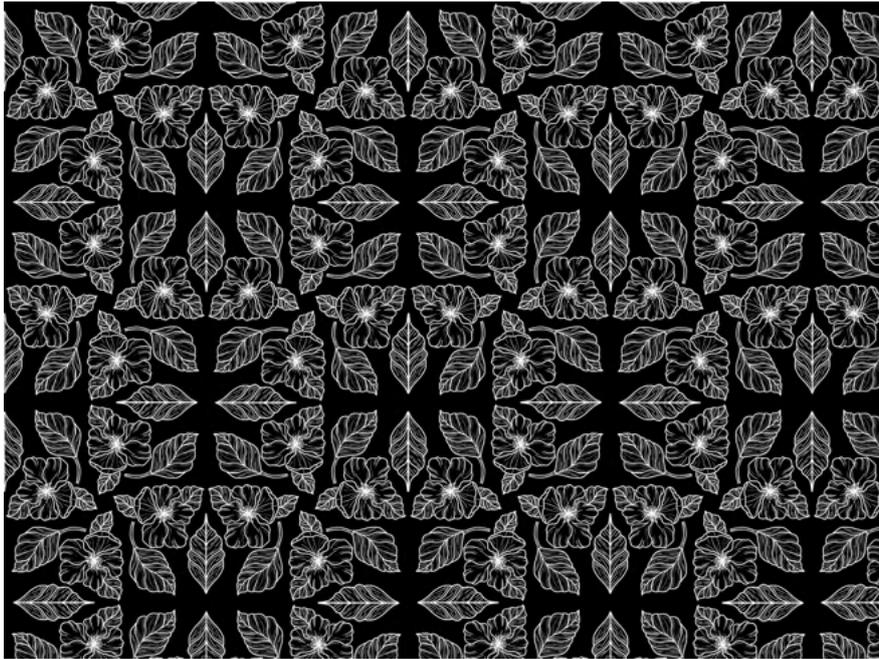


Figura 4.22: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_4^2$ .

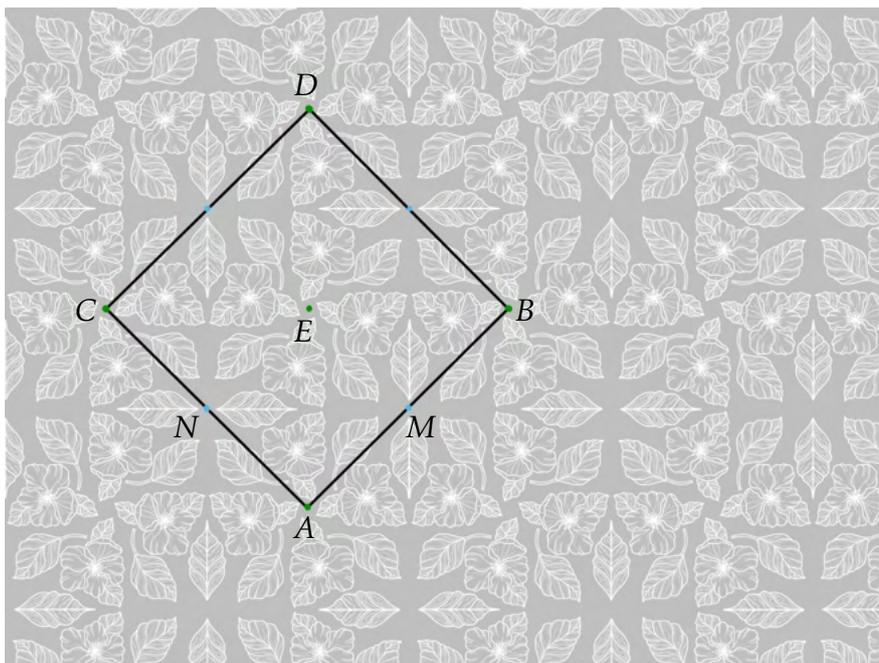


Figura 4.23: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_4^2$ .

então o próximo grupo da classificação:

$$\mathcal{W}_2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A \rangle.$$

## 4 Grupos de Papel de Parede

Veja as Figuras 4.24 e 4.25.

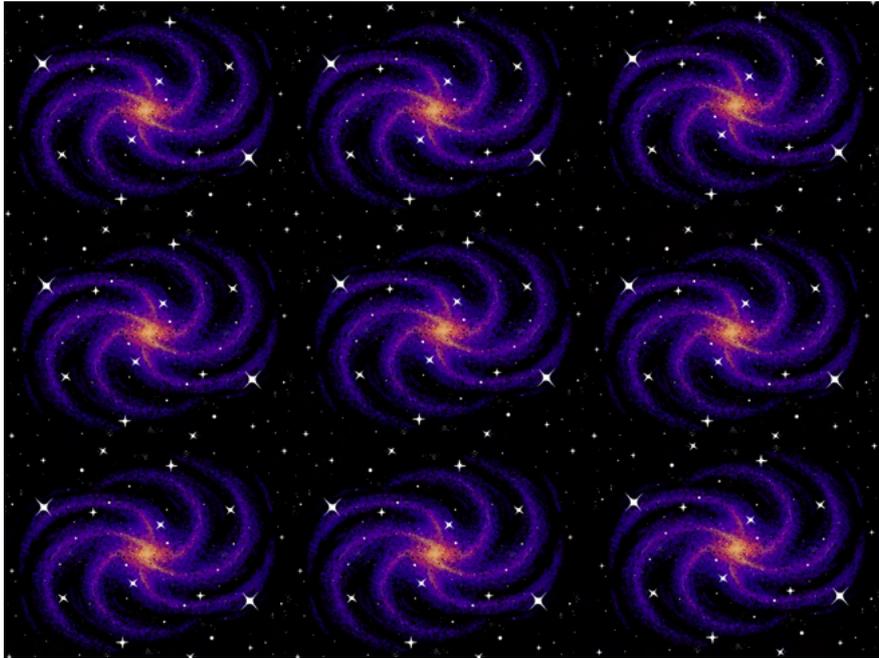


Figura 4.24: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_2$ .

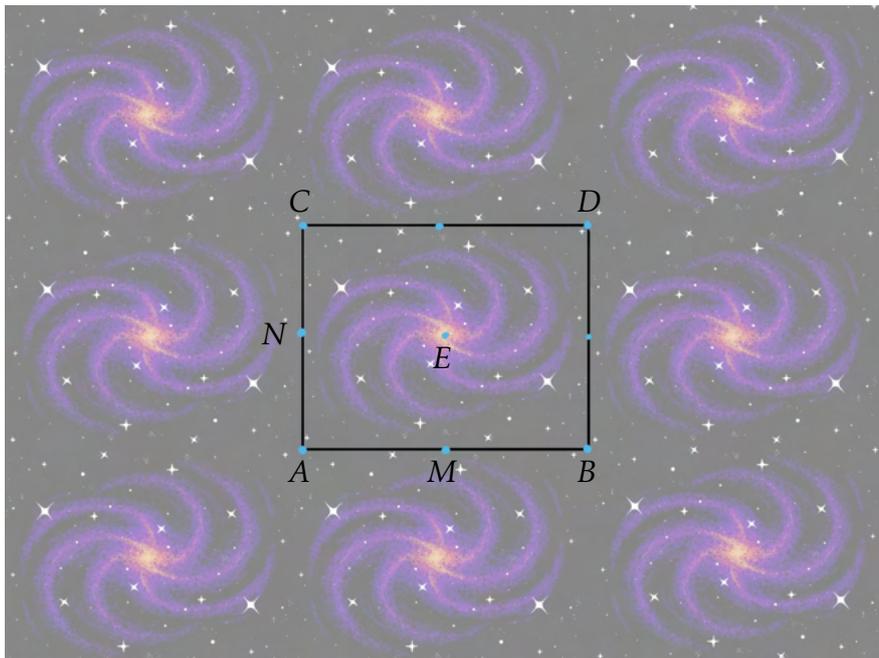


Figura 4.25: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_2$ .

Vamos estender  $\mathcal{W}_2$  para um outro grupo  $\mathcal{W}$  adicionando isometrias ímpares. Suponha que  $\sigma_l$  seja adicionado. Neste caso, pela Proposição 4.6,  $\mathcal{W}$

#### 4 Grupos de Papel de Parede

possui células unitárias retangulares ou losangulares. Vamos analisar primeiramente o caso em que o reticulado possui células unitárias losangulares.

Supondo que  $l$  é paralela à diagonal de uma célula unitária losangular não retangular, então  $l$  contém pelo menos um 2-centro, uma vez que  $\sigma_l$  deve preservar o conjunto de 2-centros de  $\mathcal{W}$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $A \in l$ , de modo que  $l$  contém o segmento  $\overline{AE}$  da diagonal da célula unitária definida pelo reticulado de translações de  $\mathcal{W}$ . Como o ponto médio das diagonais de tal célula é também um 2-centro, então necessariamente temos que incluir a reflexão pela outra diagonal, uma vez que podemos escrever uma rotação por um ângulo  $\pi$  como o produto de duas reflexões por retas perpendiculares. Temos então mais um grupo:

$$\mathcal{W}_2^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overline{AE}}, \sigma_{\overline{BE}} \rangle.$$

Veja as Figuras 4.26 e 4.27.



Figura 4.26: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_2^1$ .

As extensões de  $\mathcal{W}_2$  só podem conter a reflexão pela reta que passa pela diagonal de uma célula unitária quando esta é losangular, de acordo com a Proposição 4.6. Além disso, não podem conter ambas as reflexões pela reta que contém a diagonal e por uma reta paralela a um dos lados da célula unitária ao mesmo tempo pois introduziria rotações por ângulos diferentes de múltiplos

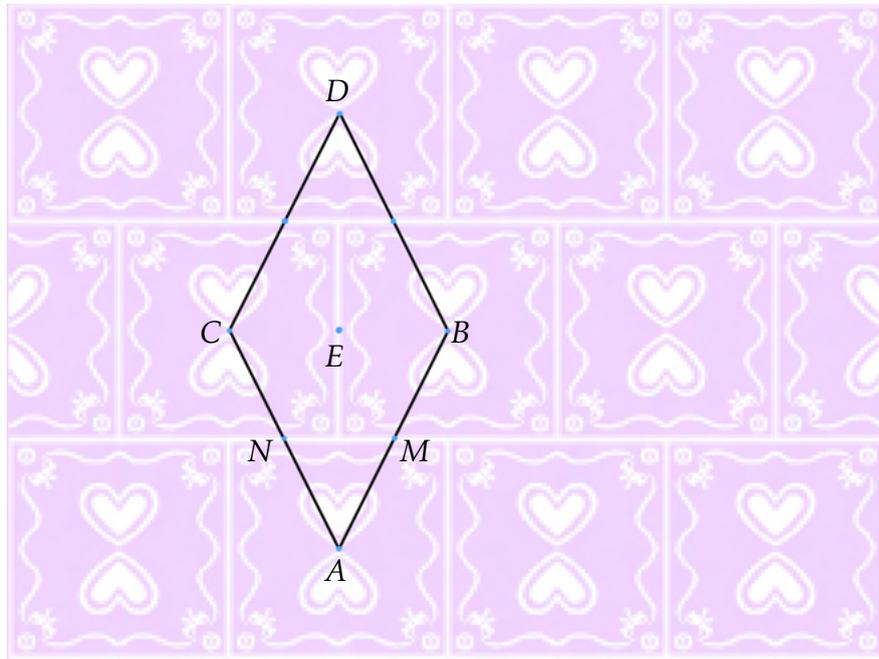


Figura 4.27: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_2^1$ .

inteiros de  $\pi$ , o que estaria em desacordo com o fato de que todos os centros de simetria são 2-centros.

Resta então verificar o caso em que a célula unitária é retangular e há no grupo uma reflexão por uma reta paralela a um dos lados da célula. Como a célula unitária quadrada é um caso particular da célula unitária retangular, vamos tratar conjuntamente a seguir. Então, suponha que  $l$  seja paralela a um lado da célula retangular. Temos dois casos:  $l$  contém um 2-centro ou  $l$  não contém nenhum centro de simetria. No primeiro caso, podemos considerar sem perda de generalidade que  $l$  contém o segmento  $\overleftrightarrow{AM}$ . Assim como anteriormente, ao adicionarmos a reflexão por  $l$ , então também precisamos adicionar a reflexão pela reta que contém o segmento  $\overleftrightarrow{AN}$  pois os centros de simetria são 2-centros. Definimos então

$$\mathcal{W}_2^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AM}}^{\leftarrow}, \sigma_{\overleftrightarrow{AN}}^{\leftarrow} \rangle.$$

Veja as Figuras 4.28 e 4.29.

#### 4 Grupos de Papel de Parede

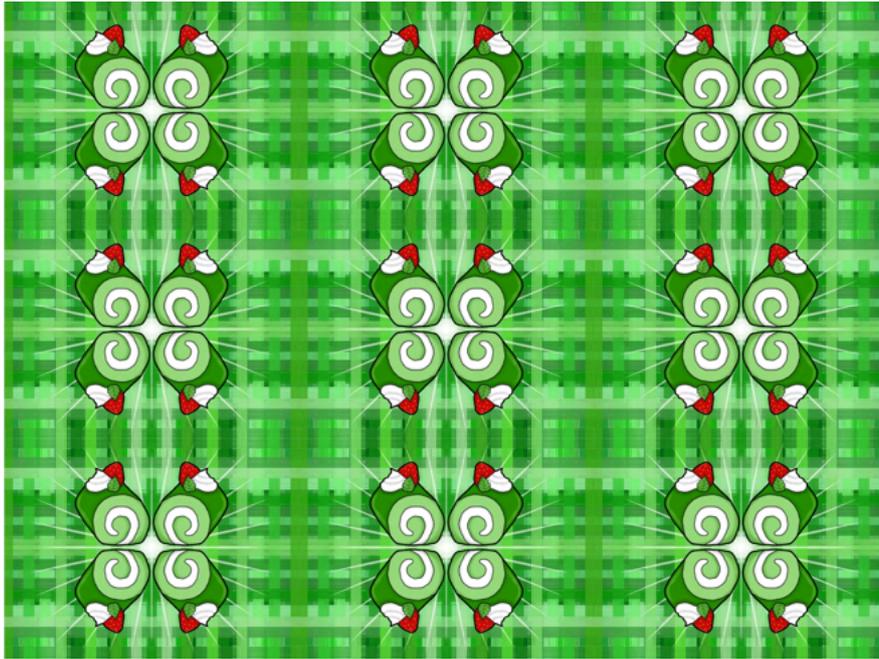


Figura 4.28: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_2^2$ .

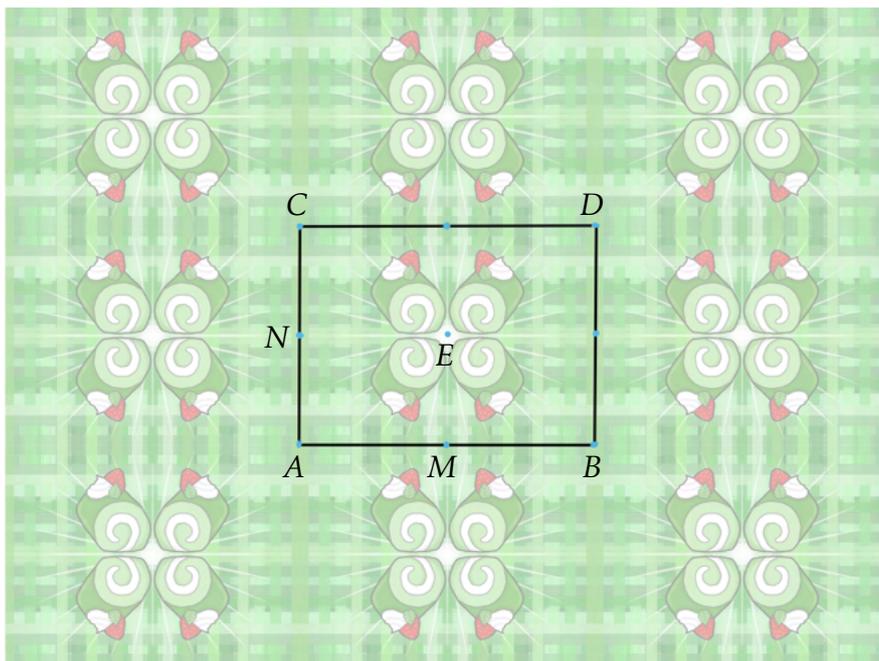


Figura 4.29: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_2^2$ .

No segundo caso,  $l$  não possui nenhum centro de simetria, de modo que podemos considerar, sem perda de generalidade, que  $l$  seja paralela a  $\overleftrightarrow{AN}$ . Assim,

#### 4 Grupos de Papel de Parede

se  $p$  é mediatriz de  $\overline{AM}$ , definimos

$$\mathscr{W}_2^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \sigma_p \rangle.$$

Veja as Figuras 4.30 e 4.31.

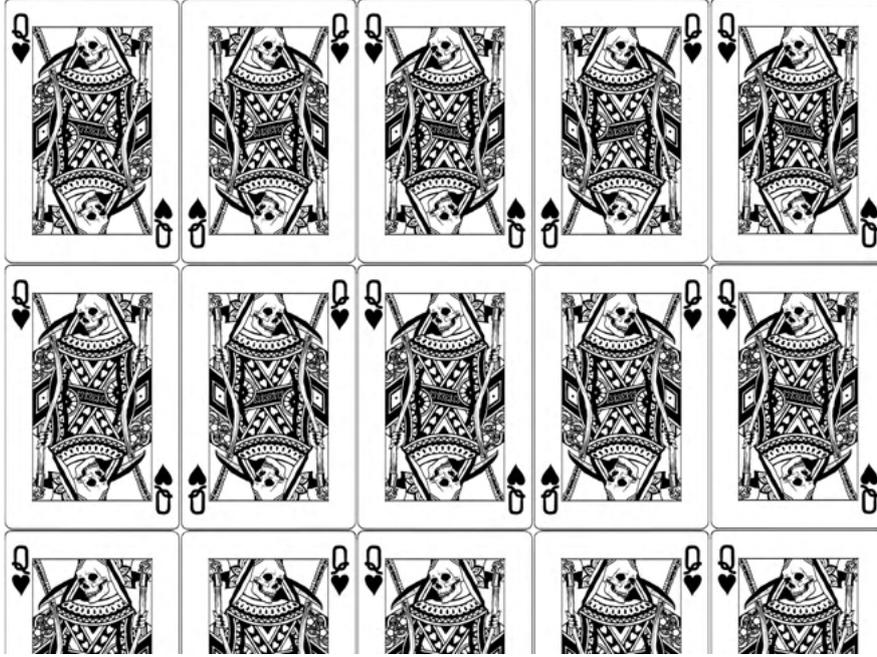


Figura 4.30: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathscr{W}_2^3$ .

Assim, pelo fato de que as reflexões devem preservar o conjunto de 2-centros, temos que as únicas possibilidades de extensão por reflexões são as três anteriores. Vamos, então, estender adicionando uma reflexão transladada  $\gamma$  em  $\mathscr{W}_2^3$  tendo a cautela de não introduzir uma reflexão ao grupo. Como  $\gamma^2 \in \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$ , temos que, se  $\gamma$  passar por um 2-centro, então  $\gamma$  preserva o reticulado de translações de  $\mathscr{W}_2^3$  e, pela Proposição 4.8, uma reflexão apareceria no grupo também. Dessa forma, o eixo de  $\gamma$  está situado entre duas colunas adjacentes de 2-centros. Além disso, ao escolher  $\gamma$  com determinado eixo, podemos obter as outras possibilidades de eixos através de composições, como será visto a seguir. Sejam  $p$  a mediatriz de  $\overline{AM}$  e  $q$  a mediatriz de  $\overline{AN}$ . Se  $\gamma_p$  é a reflexão transladada de eixo  $p$  que leva  $M$  em  $C$ , então teríamos  $\tau_{C,A}\gamma_p = \sigma_p$ , ou seja, introduziria uma reflexão no grupo. Suponha, então, que  $\gamma$  é uma reflexão transladada tal que  $\gamma(M) = N$  e  $\gamma(A) = E$ . Note que, se as células unitárias forem losangulares, então não é possível obter tal reflexão transladada, pois o eixo seria paralelo ao segmento  $\overline{AE}$  ou  $\overline{MN}$ . Segue que as células unitárias

#### 4 Grupos de Papel de Parede

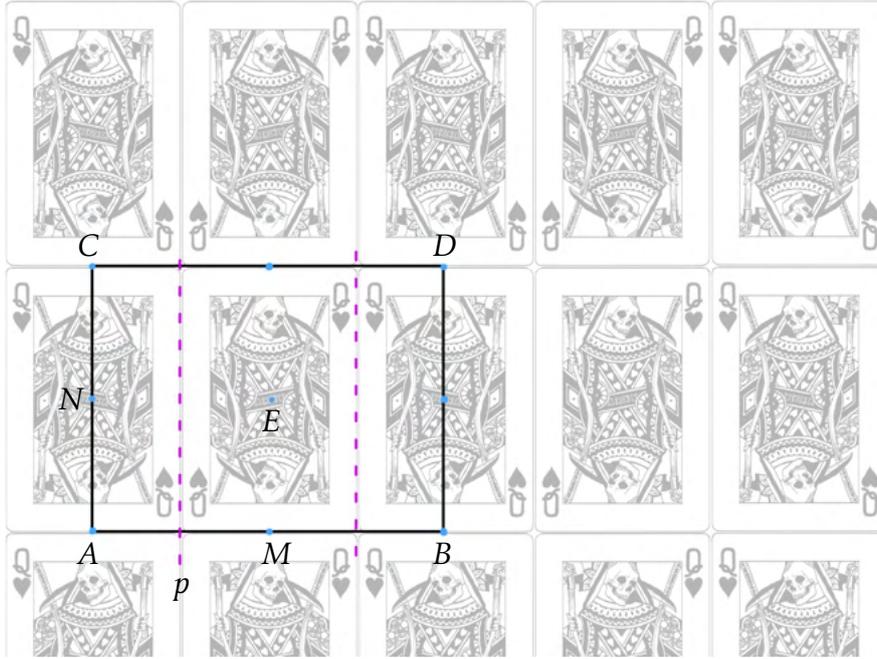


Figura 4.31: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}^3_2$ .

devem ser retangulares e o eixo de  $\gamma$  é a reta  $p$  e  $\gamma^2 = \tau_{A,C}$ . Defina também  $\varepsilon$  a reflexão transladada que leva  $\varepsilon(N) = M$  e  $\varepsilon(A) = E$  e, de modo análogo, o eixo de  $\varepsilon$  é a reta  $q$  e  $\varepsilon^2 = \tau_{A,B}$ . Assim,  $\gamma\sigma_A = \varepsilon$ . Basta notar que

- o  $\gamma\sigma_A(A) = \gamma(A) = E = \varepsilon(A)$ .
- o Se  $N' = \sigma_A(N)$ , segue que

$$\gamma^2\sigma_A(N) = \tau_{A,C}\sigma_A(N) = \tau_{A,C}(N') = N$$

e

$$\gamma\varepsilon(N) = \gamma(M) = N.$$

Dessa forma,

$$\gamma^2\sigma_A(N) = \gamma\varepsilon(N) \Rightarrow \gamma\sigma_A(N) = \varepsilon(N).$$

- o Se  $M' = \tau_{B,A}(M)$ , então

$$\varepsilon\gamma\sigma_A(M') = \varepsilon\gamma(M) = \varepsilon(N) = M$$

e

$$\varepsilon^2(M') = \tau_{A,B}(M') = M.$$

#### 4 Grupos de Papel de Parede

Assim,

$$\varepsilon\gamma\sigma_A(M') = \varepsilon^2(M') \Rightarrow \gamma\sigma_A(M') = \varepsilon(M').$$

Pelo Teorema 3.2, segue que  $\gamma\sigma_A = \varepsilon$ . Deste modo, concluímos que as demais reflexões transladadas que possuem outros eixos são obtidas através de composições com  $\gamma$ . Assim, temos

$$\mathcal{W}_2^4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \gamma \rangle$$

o próximo grupo da classificação. Veja as Figuras 4.32 e 4.33.

Todas as extensões de  $\mathcal{W}_2$  por isometrias ímpares devem ser  $\mathcal{W}_2^1$ ,  $\mathcal{W}_2^2$ ,  $\mathcal{W}_2^3$  ou  $\mathcal{W}_2^4$ .

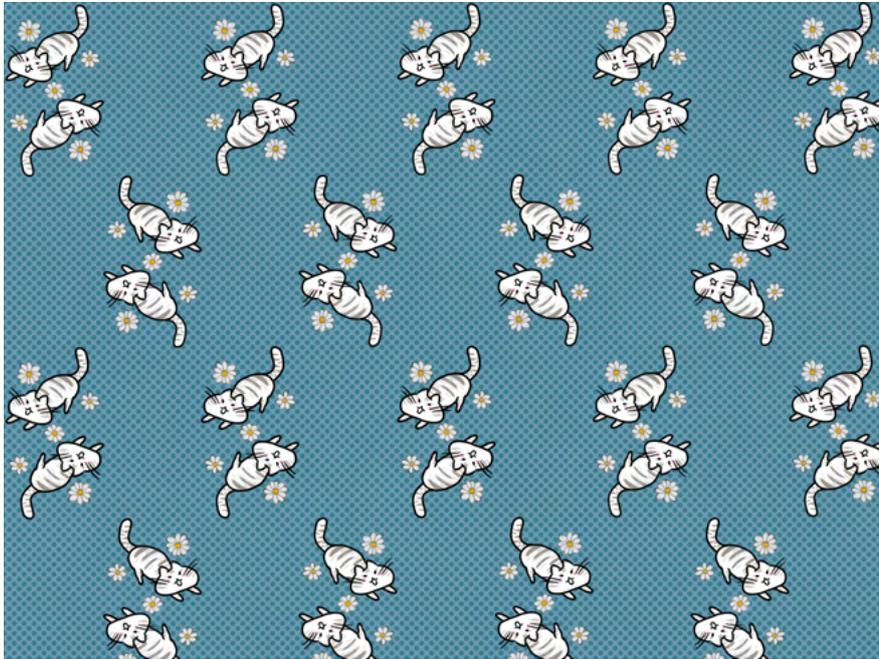


Figura 4.32: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_2^4$ .

- Grupos que não possuem centros de simetria.

Por último, vamos verificar os grupos que não possuem centros de simetria. Para esta parte, escolheremos o ponto  $A$  da seguinte maneira: se  $\sigma_l$  pertence a  $\mathcal{W}$ , tome o ponto  $A \in l$ ; se  $\mathcal{W}$  não contém uma reflexão, mas contém uma reflexão transladada, tome  $A$  em seu eixo.

O primeiro grupo desta parte é o caso mais simples: quando  $\mathcal{W}$  contém ape-

#### 4 Grupos de Papel de Parede

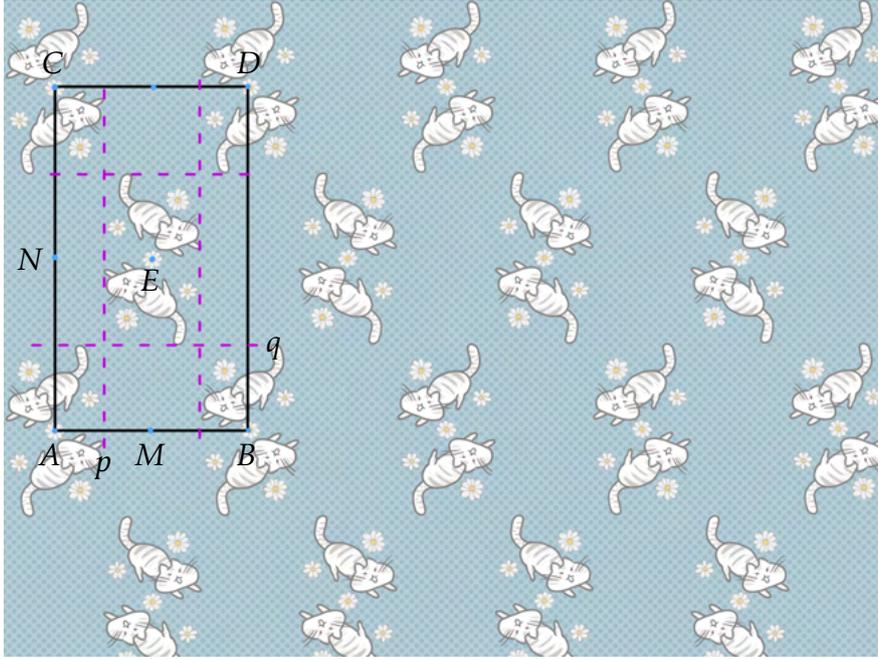


Figura 4.33: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W} \frac{4}{2}$ .

nas translações. Assim, definimos

$$\mathcal{W}_1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle,$$

com  $A$  arbitrário e  $A, B$  e  $C$  não colineares. Veja as Figuras 4.34 e 4.35.

Para estender  $\mathcal{W}_1$  para um outro grupo  $\mathcal{W}$  vamos adicionar isometrias ímpares. Se  $\sigma_l$  pertence a  $\mathcal{W}$ , com  $A \in l$ , então, pela Proposição 4.6,  $\mathcal{W}$  possui célula unitária losangular  $\square ABDC$  considerando, sem perda de generalidade,  $l = \overleftrightarrow{AD}$  ou possui célula unitária retangular com  $l = \overleftrightarrow{AC}$ . Note que, se  $\square ABDC$  é um quadrado, então  $\sigma_{\overleftrightarrow{AD}}$  e  $\sigma_{\overleftrightarrow{AC}}$  não podem estar no grupo conjuntamente, pois  $\mathcal{W}$  não possui centros de simetria. Temos então os seguintes grupos:

$$\mathcal{W}_1^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AD}} \rangle,$$

e

$$\mathcal{W}_1^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AC}} \rangle.$$

Veja as Figuras 4.36, 4.37, 4.38 e 4.39, respectivamente.

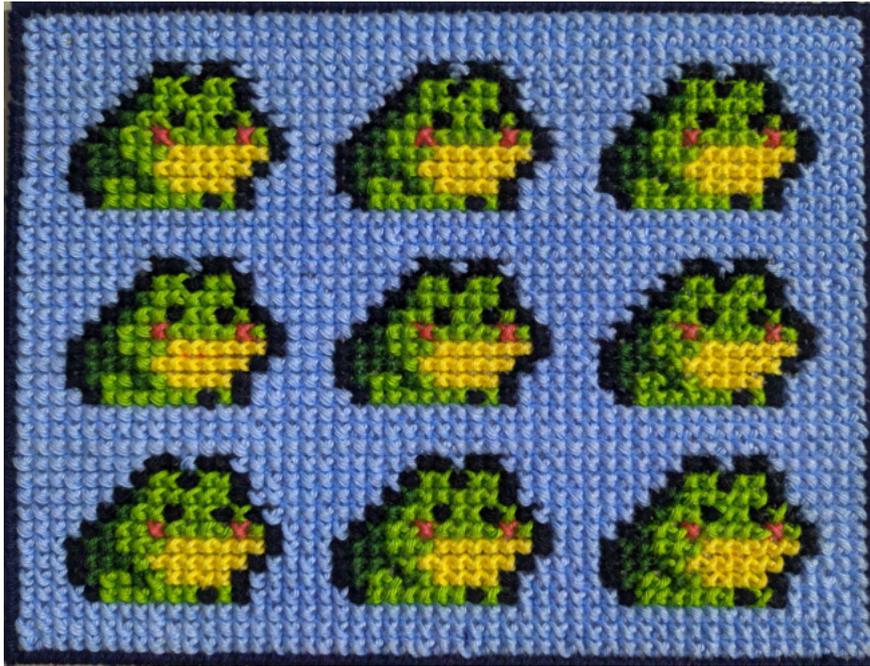


Figura 4.34: Exemplo de bordado em ponto cruz cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_1$ .

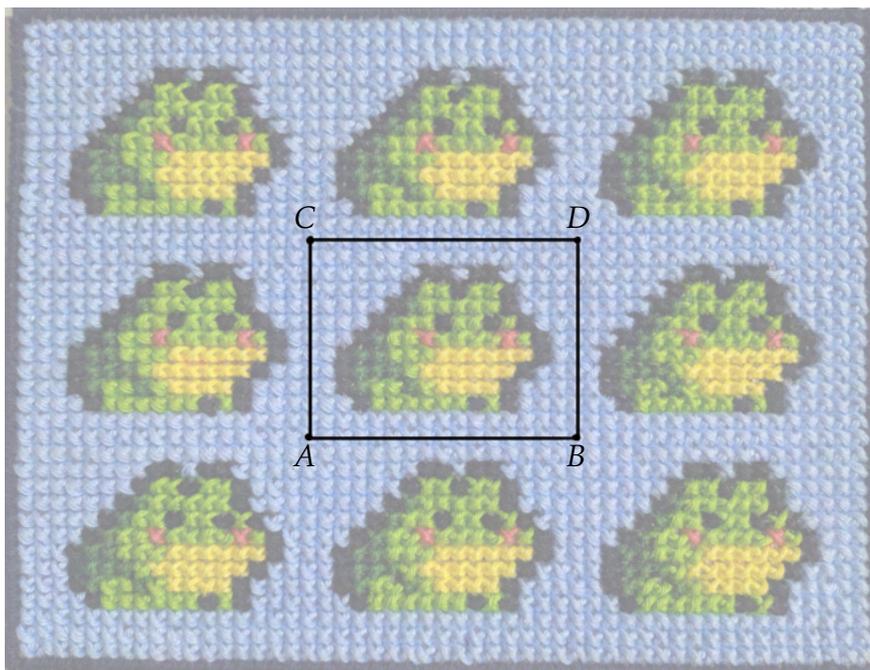


Figura 4.35: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_1$ .

Ao adicionarmos estas reflexões, também são adicionadas reflexões transladadas aos grupos. De fato, para  $\mathcal{W}_1$ , tomando  $N$  o ponto médio de  $\overline{AC}$  e  $K$  o ponto médio de  $\overline{CD}$ , defina  $\gamma$  a reflexão transladada de eixo  $\overleftrightarrow{NK}$  tal que  $\gamma(N) = K$ . Então  $\gamma^2 = \tau_{A,D}$ ,  $\gamma\sigma_{\overline{AD}} = \tau_{A,C}$  e  $\sigma_{\overline{AD}}\gamma = \tau_{A,B}$ , basta notar que, como

#### 4 Grupos de Papel de Parede

$\overleftrightarrow{NK}$  é o eixo de  $\gamma$  e é paralelo à reta  $\overleftrightarrow{AD}$ , então  $\sigma_{\overleftrightarrow{NK}}\sigma_{\overleftrightarrow{AD}}$  é uma translação por um vetor perpendicular a essas retas, cujo módulo é o dobro da distância entre elas, segundo a Proposição 3.17. Definindo o ponto  $E$  como a intersecção das diagonais de  $\square ABDC$ , temos que

- $\sigma_{\overleftrightarrow{NK}}\sigma_{\overleftrightarrow{AD}}(E) = C = \tau_{E,C}(E)$ ;
- $\sigma_{\overleftrightarrow{NK}}\sigma_{\overleftrightarrow{AD}}(B) = E = \tau_{E,C}(B)$ ;
- $\sigma_{\overleftrightarrow{NK}}\sigma_{\overleftrightarrow{AD}}(M) = N = \tau_{E,C}(M)$ .

Pelo Teorema 3.2, segue que  $\sigma_{\overleftrightarrow{NK}}\sigma_{\overleftrightarrow{AD}} = \tau_{E,C}$  e, portanto,

$$\sigma_{\overleftrightarrow{AD}}\sigma_{\overleftrightarrow{NK}} = (\sigma_{\overleftrightarrow{NK}}\sigma_{\overleftrightarrow{AD}})^{-1} = (\tau_{E,C})^{-1} = \tau_{C,E}.$$

Logo,

$$\gamma\sigma_{\overleftrightarrow{AD}} = \tau_{N,K}\sigma_{\overleftrightarrow{NK}}\sigma_{\overleftrightarrow{AD}} = \tau_{N,K}\tau_{E,C} = \tau_{A,C}$$

e

$$\sigma_{\overleftrightarrow{AD}}\gamma = \sigma_{\overleftrightarrow{AD}}\sigma_{\overleftrightarrow{NK}}\tau_{N,K} = \tau_{C,E}\tau_{N,K} = \tau_{A,B}.$$

Assim, temos que  $\gamma \in \mathcal{W}_1^1$ .

Agora, para  $\mathcal{W}_1^2$ , pelas Proposições 3.38 e 2.9, podemos rearranjar os termos  $\tau_{A,C}\sigma_{\overleftrightarrow{AC}} = \sigma_{\overleftrightarrow{AC}}\tau_{A,C}$  e  $\tau_{A,C}\tau_{A,B} = \tau_{A,B}\tau_{A,C}$ . Além disso,

$$\tau_{A,B}\sigma_{\overleftrightarrow{AC}} = \sigma_{\overleftrightarrow{ME}}\sigma_{\overleftrightarrow{AC}}\sigma_{\overleftrightarrow{AC}} = \sigma_{\overleftrightarrow{ME}} = \sigma_{\overleftrightarrow{AC}}\sigma_{\overleftrightarrow{AC}}\sigma_{\overleftrightarrow{ME}} = \sigma_{\overleftrightarrow{AC}}\tau_{B,A} = \sigma_{\overleftrightarrow{AC}}\tau_{A,B}^{-1}.$$

Assim, as reflexões transladadas em  $\mathcal{W}_1^2$  são da forma  $(\sigma_{\overleftrightarrow{AC}}\tau_{A,B}^j)\tau_{A,C}^i$ , com  $i \neq 0$ .

Note que a reta  $\overleftrightarrow{NK}$  não é uma reta de simetria para  $\mathcal{W}_1^1$ . Todavia, em  $\mathcal{W}_1^2$  os eixos das reflexões transladadas são retas de simetria. Por conta da semelhança entre esses dois grupos, essa característica fornece uma forma de distinguir se um padrão possui  $\mathcal{W}_1^2$  ou  $\mathcal{W}_1^1$  como grupo de simetria.

Vamos verificar as extensões de  $\mathcal{W}_1$  para um outro grupo  $\mathcal{W}$  adicionando apenas reflexões transladadas, mas sem acrescentar reflexões por retas. Como comentado na construção do grupo  $\mathcal{W}_2^4$ , consideramos apenas as células unitárias retangulares. Os eixos dessas reflexões transladadas devem ser paralelos entre si, do contrário, seria possível compor uma rotação. Suponha que uma das translações geradoras do subgrupo de translações seja o quadrado de uma reflexão transladada  $\gamma$ , ou seja,  $\gamma^2 = \tau_{A,B}$  com  $\gamma(A) = M$  e cujo eixo é a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

#### 4 Grupos de Papel de Parede

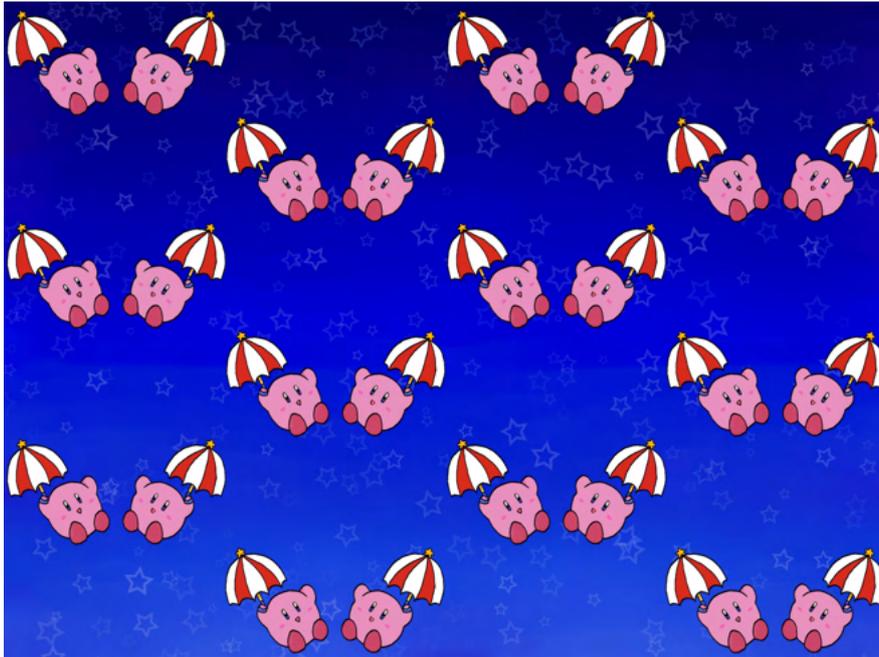


Figura 4.36: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_1^1$  (desconsiderando o fundo).

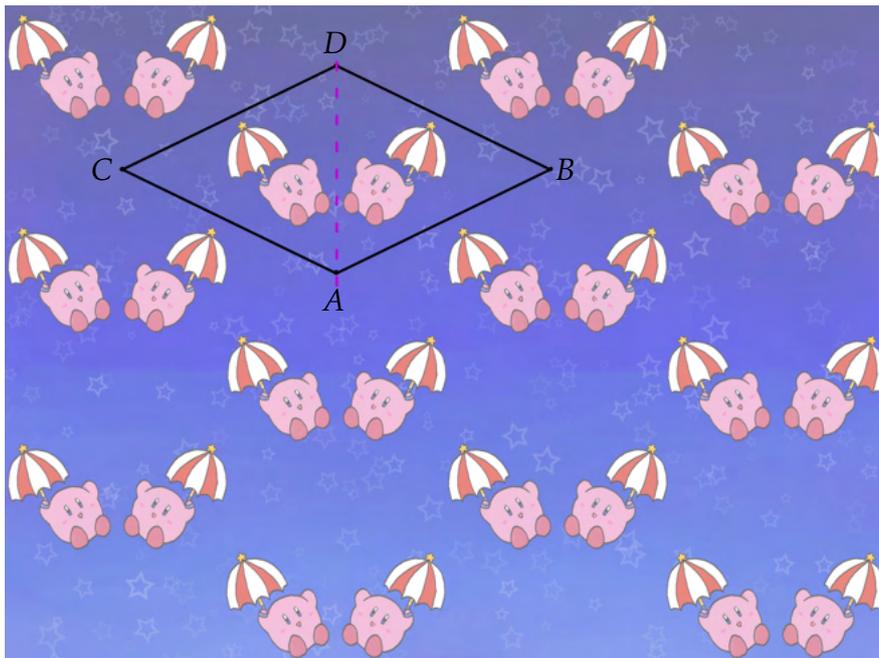


Figura 4.37: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_1^1$ .

Temos então

$$\mathcal{W}_1^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \gamma \rangle$$

o último grupo da nossa classificação. Veja as Figuras 4.40 e 4.41.

#### 4 Grupos de Papel de Parede



Figura 4.38: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_1^2$ .

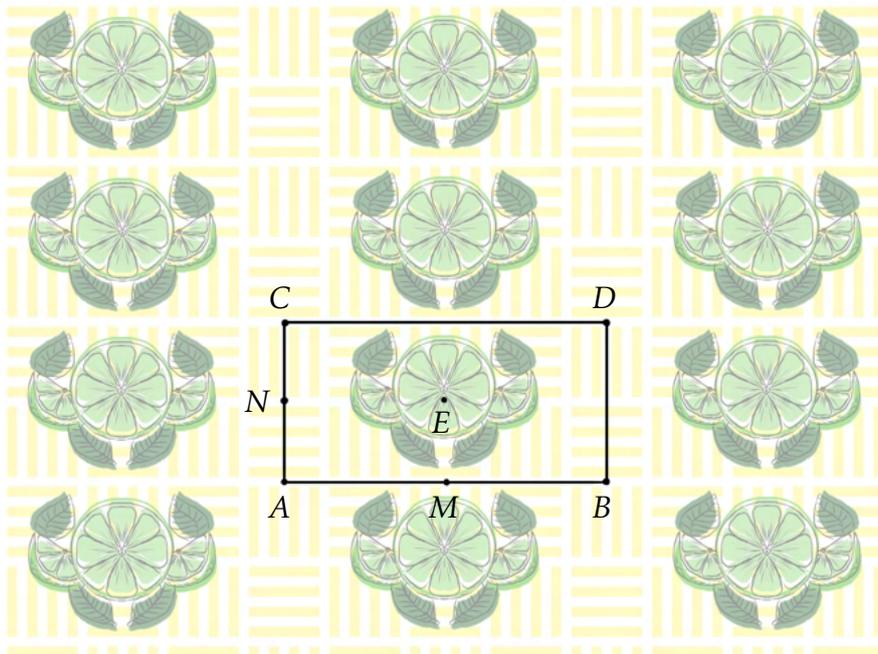


Figura 4.39: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_1^2$ .

#### 4 Grupos de Papel de Parede

Tomando  $N$  o ponto médio de  $\overline{AC}$  e  $\varepsilon$  a reflexão transladada tal que  $\varepsilon(N) = E$  e cujo eixo é a reta  $\overleftrightarrow{NE}$ , verifica-se, de modo análogo ao grupo  $\mathcal{W}_2^4$ , que  $\varepsilon = \tau_{A,B}\gamma$ , de onde podemos concluir que  $\mathcal{W}_1^3$  contém todas as possíveis reflexões transladadas.

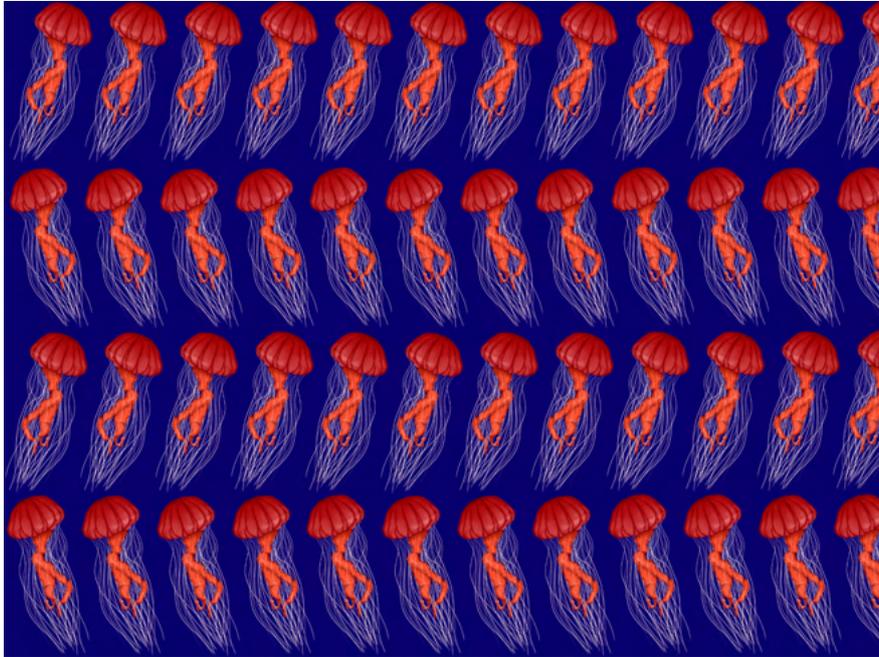


Figura 4.40: Exemplo de padrão cujo grupo de simetria é  $\mathcal{W}_1^3$ .

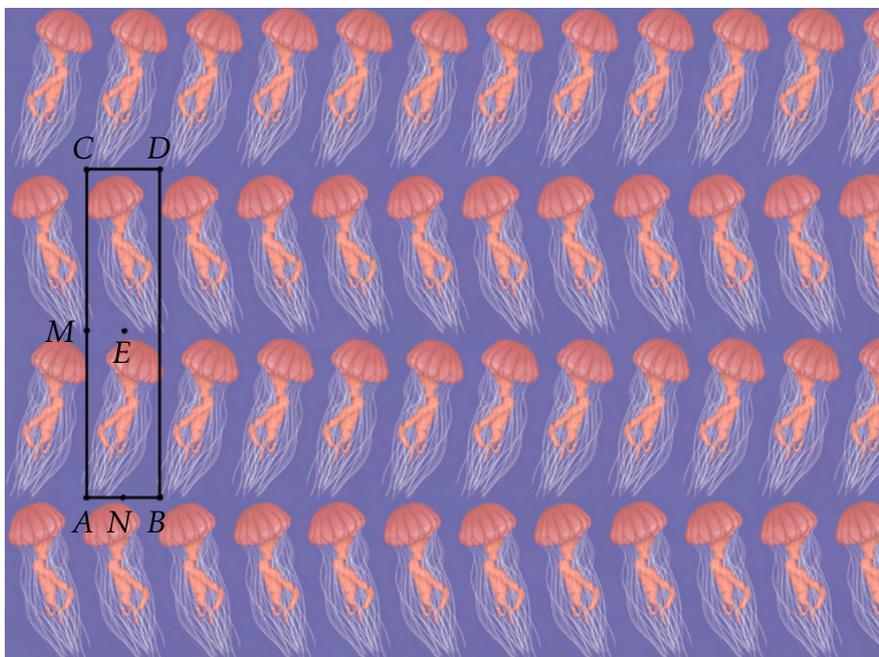


Figura 4.41: Célula unitária em um grupo  $\mathcal{W}_1^3$ .

#### 4 Grupos de Papel de Parede

Portanto, as extensões de  $\mathcal{W}_1$  por isometrias ímpares devem ser  $\mathcal{W}_1^1$ ,  $\mathcal{W}_1^2$  ou  $\mathcal{W}_1^3$ .

□

Definidos os 17 grupos de simetrias do plano, reconhecê-los à primeira vista pode parecer uma tarefa complicada. O fluxograma apresentado a seguir, baseado na tabela encontrada em [5], mostra uma maneira resumida de se encontrar o grupo de simetria de padrões no plano apenas com algumas perguntas.

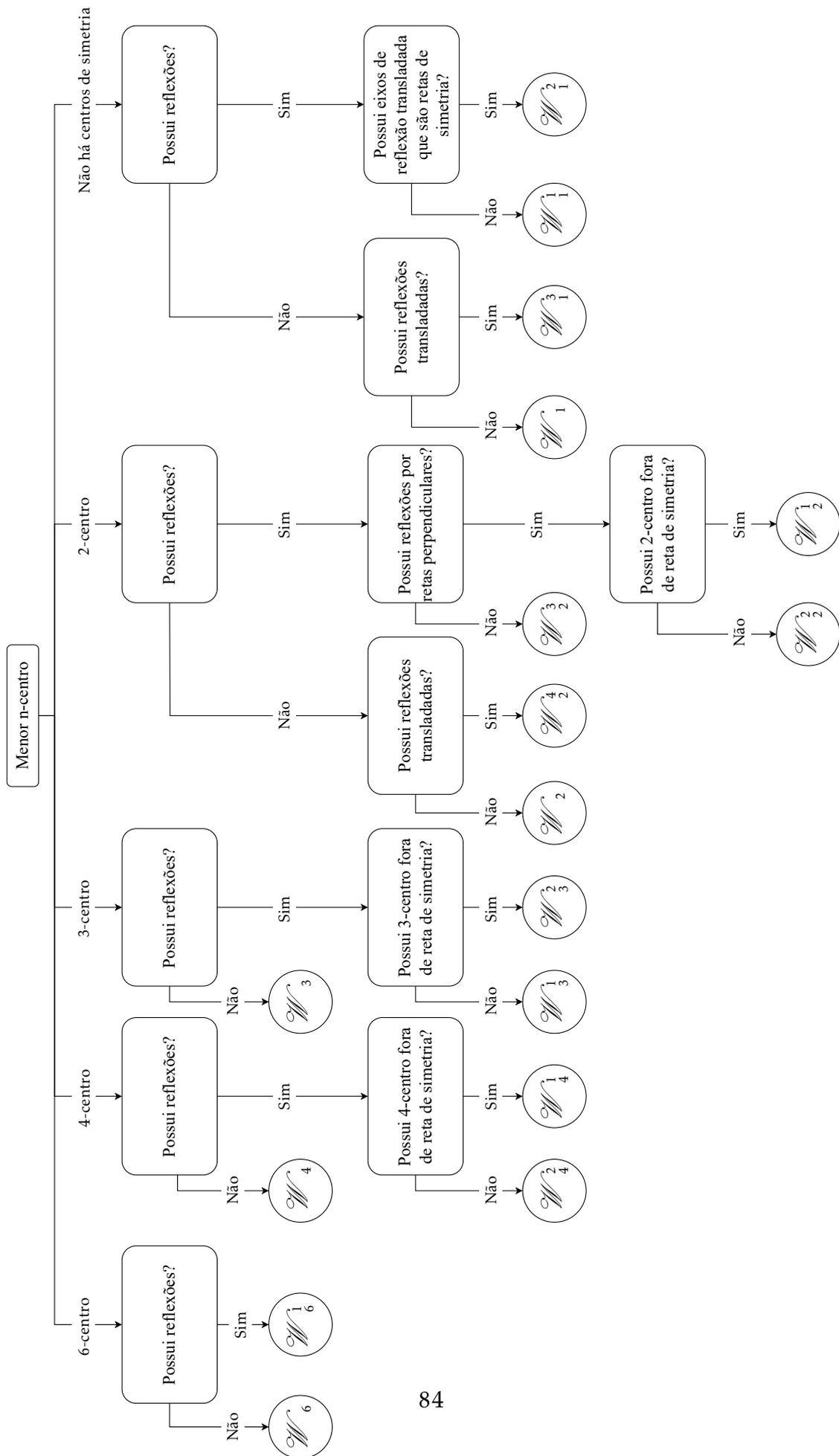


Figura 4.42: Fluxograma da classificação das simetrias no plano.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bonner, Jay. *Islamic Geometric Patterns: Their Historical Development and Traditional Methods of Construction*. Springer. 2017. p.183.
- [2] Ernst, Bruno. *O Espelho Mágico de M. C. Escher*. Taschen. 1978.
- [3] E. Fedorov, *Simmetrija na ploskosti (symmetrie in der ebene)*, Zapiski Imperatorskogo Sant-Petersburgskogo Mineralogicheskogo Obshchestva, vol. 28, no. 245-291, 1891. Disponível em: <<https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=umn.31951t00080576a&view=1up&seq=357>>
- [4] Humphreys, J., Liu, Q., and Ern e, R. *A Course in Group Theory*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 1996.
- [5] Martin, G. E. *Transformation Geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1982.
- [6] M. C. Escher - The Official Website. *Biography*, Disponível em: <<https://mcescher.com/about/biography/>>
- [7] Moraes, G. C. d. *Isometrias e Grupos de Friso*. 2013. Monografia (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do ABC (UFABC), São Paulo.
- [8] Pólya G. XII. * ber die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*. Zeitschrift für Kristallographie - Crystalline Materials. 1924;60(1-6): 278-282. <https://doi.org/10.1524/zkri.1924.60.1.278>
- [9] Silva, R. O. *Isometrias*. 2016. Monografia (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal da Campina Grande (UFCG), Paraíba.