

Uma introdução às lógicas modal e *fuzzy*

Daniel Saggiomo de Caprio



Universidade Federal do ABC

Título: Uma introdução às lógicas modal e *fuzzy*

Autor: Daniel Saggiomo de Caprio

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Roque Dias

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Circulando de Souza

Universidade Federal de ..

Prof. Dr. Recirculando de Souza

Universidade Federal de ..

Santo André, 9 de maio de 2022.

1	Introdução	8
2	Lógica Fuzzy	10
2.1	Teoria de conjuntos <i>fuzzy</i>	10
2.2	Conectivos básicos da lógica <i>fuzzy</i>	11
2.3	Implicação na lógica <i>fuzzy</i>	11
2.4	Conjuntos <i>fuzzy</i>	11
2.5	Relações <i>fuzzy</i>	15
2.6	Sistemas baseados em regras <i>fuzzy</i>	15
2.7	Método de defuzzificação: centro de massa	17
2.8	Exemplo de aplicação	17
3	Lógica Modal	27
3.1	Introdução à lógica modal	27
3.2	Tipos de modelos modais	32
3.3	Sistemas axiomáticos modais	35
3.4	Método de tabelas	38
3.5	Tratando modelos como árvores	48
3.6	Teorema da Completude	53

“Todo conhecimento genuíno tem
origem na experiência direta.”
- Mao Tse Tung

Quero agradecer primeiramente as pessoas que me criaram e com quem convivi muito na infância, minha vó, Daisy, tias, Denise e Graça, minha prima Victoria e minha mãe, Valéria. Também um agradecimento a minha vó Thereza, um exemplo de juvenilidade, que levarei pra vida. Quero deixar registrado meus agradecimentos a essas mulheres incríveis que contribuíram para minha formação. Em especial a minha mãe, uma das mulheres mais fortes que conheci e conhecerei, que me presenteou com o amor pela natureza. Espero ainda ajudar a realizar muitos dos seus sonhos!

Agradeço também a família que o tempo me proveu, minhas amigas e amigos. Agradeço a Alexssandra que me acompanhou por toda minha trajetória desde antes de entrar na UFABC, me apoiando em todos os momentos, ela, juntamente com a mãe Gilda são um exemplo de resiliência e alegria que levarei pra vida. Agradeço aos meus amigos que em muitas noites me fizeram companhia depois de dias cansativos, eu agradeço por ajudarem a manterem minha sanidade, Lucas, Thiago, Victor, Leonardo e Helder. Aos amigos que fiz durante meu curso técnico que acenderam a chama por aprendizado e sempre buscar evoluir, Felipe, Alisson, Joões, Gabriel e Deimolle. Aos amigos que fiz durante a faculdade e que ainda mantenho contato, Victor e Natália, ao meu grupinho da matemática, Julia, Borgiani, Nathan, Henrique e Willyan.

Agradeço aos excelentes professores da UFABC, que tenho o privilégio de chamar alguns de amigos. Gostaria de agradecer as professoras Ana, Cláudia e Dahisy. Ao Renato, por ter me orientado estes anos e ainda seguir me orientando no mestrado. E agradeço especialmente ao Rodrigo por muitas vezes me dar conselhos que vão além do campo acadêmico. Por fim agradeço a Lucy, por me ajudar durante as matérias do mestrado me apoiando e dando força. Uma tarde com você me traz paz por semanas!

A todos os citados e aos não citados eu os tenho em minhas memórias e coração. Obrigado!

Neste trabalho de conclusão de curso estudaremos alguns aspectos básicos de duas lógicas não clássicas: a lógica *fuzzy* e a lógica modal. Na lógica *fuzzy*, também chamada lógica difusa, as afirmações não recebem apenas valores-verdade de verdadeiro ou falso, mas sim qualquer valor real no intervalo $[0, 1]$, possibilitando assim o estudo da noção de “verdades parciais”; estudaremos como isso possibilita abordagens interessantes na modelagem matemática de situações concretas. Enquanto que a lógica modal é uma extensão da lógica clássica, obtida com o acréscimo de dois operadores, comumente lidos como “necessariamente” e “possivelmente”; estudaremos, em particular, a semântica de mundos possíveis de Kripke e Hintikka.

Palavras Chaves: Lógica não clássica, Lógica modal, Lógica fuzzy, Lógica difusa

In this undergraduate thesis we will study some basic aspects of two non-classical logics: fuzzy logic and modal logic. In fuzzy logic, the statements receive not only truth-values truth or false, but any real value in the interval $[0, 1]$, thus enabling the study of the notion of “partial truths”; we will study how this leads to interesting approaches on the mathematical modeling of factual situations. Modal logic is an extension of the classical logic, obtained with the addition of two operators, commonly read as “necessarily” and “possibly”; we will study, in particular, the possible worlds semantics from Kripke and Hintikka.

Keywords: Non-classical logic, Modal logic, Fuzzy logic

A lógica *fuzzy* e a lógica modal são lógicas não clássicas que possibilitam novas formas de elaborar e interpretar afirmações. Estas lógicas fornecem ferramentas que proporcionam meios de lidar com a incerteza de diferentes maneiras: na lógica *fuzzy*, há graus de incerteza nos valores-verdade das afirmações; na lógica modal, temos algumas modalidades que possibilitam a existência de incertezas nas suas afirmações.

A lógica *fuzzy* foi desenvolvida no início do século XX, por L. Zadeh [Zadeh], sendo uma lógica na qual os valores-verdade podem ser qualquer valor real no intervalo $[0, 1]$. Esta lógica é uma extensão da lógica clássica, desenvolvida para lidar com verdades parciais, na tentativa de imitar o raciocínio humano em que o valor-verdade situa-se entre o completamente verdadeiro e o completamente falso. Além disso, alguns conceitos podem ser subjetivos quando escolhidos para ser uma característica de um conjunto, como, por exemplo, se quiséssemos considerar um conjunto A dado por

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ está próximo de } 2\}. \quad (1.1)$$

Não é evidente quais valores reais pertencem a este conjunto; o número 7 está mais próximo de 2 quando comparado a 100, mas 2,001 está mais próximo de 2 quando comparado a 7. Para solucionar este problema são definidas funções específicas para cada característica subjetiva escolhida para descrever o conjunto. Estas funções têm o objetivo de modelar a característica do conjunto e assim mostrar quanto um elemento pertence ao conjunto, o que é traduzido em um valor do intervalo $[0, 1]$ (sendo que, se o valor da função for 1, então este elemento pertence ao conjunto, e, se o valor for 0, então o elemento não pertence).

A lógica *fuzzy* possui diversas aplicações, em particular na área de modelagem, como em biomatemática. Por exemplo, imagine que queiramos definir o conjunto *fuzzy* das pessoas fumantes. Caracterizar uma pessoa como fumante é subjetivo. Para ser considerada fumante, quantos dias na semana a pessoa tem que fumar? Ou quantos maços no mês? Para isso podemos definir

1 Introdução

$$\phi_{F_1}(d) = \frac{d}{7} \quad (1.2)$$

onde $d \in \mathbb{N}$ é a quantidade de dias na semana em que a pessoa fuma. Ou poderíamos definir

$$\phi_{F_2}(n) = \begin{cases} \frac{n}{1+n}, & n < 100 \\ 1, & n \geq 100 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ é a quantidade de maços fumados no mês. Ambas as funções caracterizam um conjunto *fuzzy* e a escolha de qual seria mais apropriado depende de como se deseja definir este conjunto.

O início do estudo da lógica modal nos remete ao início do estudo da própria lógica, com Aristóteles, que escreveu alguns capítulos do livro *De Interpretatione* estudando noções de modalidade [Lemmon], que permitiam qualificar a veracidade de uma sentença. No século XIX, C. I. Lewis fundou a lógica modal moderna, em sua série de trabalhos iniciados em 1912 com “Implication and the Algebra of Logic” [Lewis]. Lewis desenvolveu a sintaxe da lógica modal implementando nela operadores simbólicos, originando em 1932 o livro “Symbolic Logic” desenvolvido com C. H. Langford [LL]. Já em 1963, S. Kripke introduziu uma semântica para a lógica modal [Kripke]; esta semântica, independentemente proposta por J. Hintikka, é comumente chamada de semântica dos “mundos possíveis”. Com isso, Kripke obteve uma versão do teorema da completude para lógica modal, relacionando a sintaxe de Lewis e a semântica de mundos possíveis.

Visualizando a lógica modal como uma expansão da lógica clássica, observamos várias possibilidades de modalidades, como, por exemplo, quanto a eventualidade, acreditabilidade e ao tempo. As modalidades mais comuns são de necessidade e possibilidade, também chamadas de modalidades aléticas. Muitas modalidades são descritas através da simbologia \Box e \Diamond . Nas modalidades aléticas, \Box representa necessidade e \Diamond possibilidade. Assim quando temos $\Box P$ lemos “é necessário que P ”, e quando temos $\Diamond P$ lemos “é possível que P ”.

Este trabalho se propõe a fazer uma exploração inicial de aspectos básicos dessas duas lógicas, ilustrando assim as possibilidades que se apresentam a partir de suas abordagens. Para a lógica *fuzzy* nosso objetivo será de apresentarmos um exemplo de aplicação, enquanto que para lógica modal, demonstraremos o teorema da completude desta lógica.

Teoria de conjuntos *fuzzy*

O conteúdo a seguir está baseado no livro escrito por Bassanezi [BBL].

Começaremos nosso estudo sobre lógica *fuzzy* apresentando as definições básicas, e veremos como se diferenciam a lógica clássica da lógica *fuzzy* já nas primeiras definições. Seguiremos apresentando conceitos importantes e que serão utilizados para a conclusão da nossa proposta. Por ter um viés mais prático, temos o objetivo de apresentar uma aplicação para a lógica *fuzzy* ao fim do estudo.

Nossa primeira definição trata do modo como podemos verificar se um elemento pertence a um conjunto. Na lógica clássica, fazemos isso através da função característica.

Definição 2.1 (função característica) Consideraremos que a função característica de um conjunto $A \subset U$, onde U é o conjunto universo, é dada por $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$, $\forall x \in U$.

Já para a lógica *fuzzy*, um elemento tem mais possibilidades de relação ao conjunto do que somente pertencer ou não pertencer, podendo ter uma relação de pertencimento que é traduzida através de um valor real. Damos a isso o nome de grau de pertencimento.

Definição 2.2 (função de pertencimento) Seja U o conjunto universo. O subconjunto *fuzzy* F de U é caracterizado pela função de pertencimento $\psi_F : U \rightarrow [0, 1]$. O valor de $\psi_F \in [0, 1]$ indica o grau com que o elemento $x \in U$ pertence a F .

Desta forma, para $x \in U$, dado um conjunto *fuzzy* A , quando $\psi_A(x) = 0$, consideramos que x não pertence ao conjunto A , e quando $\psi_A(x) = 1$, x pertence ao conjunto A .

Conectivos básicos da lógica *fuzzy*

Vamos definir os conectivos básicos da lógica clássica que servirão de base para a lógica *fuzzy*.

Definição 2.3 (Conectivo “e”) Representaremos o conectivo “e” pela simbologia \wedge . Este é dado por $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ com $(p, q) \mapsto \wedge(p, q) = p \wedge q = \min\{p, q\}$.

Definição 2.4 (Conectivo “ou”) Representaremos o conectivo “ou” pela simbologia \vee . Este é dado por $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ com $(p, q) \mapsto \vee(p, q) = p \vee q = \max\{p, q\}$.

Implicação na lógica *fuzzy*

A implicação, uma importante ferramenta para lógica, possui diversas abordagens na lógica *fuzzy*. Mostraremos a abordagem mais natural. Pelo fato da implicação na lógica clássica, $p \Rightarrow q$, possui uma equivalência lógica à $\neg p \vee q$, vamos modular-la para lógica *fuzzy* através da seguinte função, dados $x, y \in [0, 1]$:

$$I(x, y) = \max\{1 - x, y\}. \quad (2.1)$$

Este modelo para implicação tem o nome de implicação Kleene-Dienes.

Exemplo 2.5 Vamos tratar neste exemplo de percepções térmicas. Seja A o conjunto *fuzzy* de dia ensolarado e B o conjunto *fuzzy* de temperatura alta no local. Dado uma pessoa que considere o dia 50% ensolarado e com 20% de temperatura alta, ou seja $\psi_A(x) = 0.5$ para $x \in A$ e $\psi_B(x) = 0.2$, para $x \in B$. Temos que a implicação “Dia ensolarado \Rightarrow temperatura alta” é dada por

$$I(\psi_A(x), \psi_B(x)) = \max\{1 - \psi_A(x), \psi_B(x)\} = \max\{0.5, 0.2\} = 0.5.$$

Conjuntos *fuzzy*

Daremos um nome específico a conjuntos clássicos na lógica *fuzzy*.

Definição 2.6 (conjunto nítido) Chamamos um conjunto clássico na lógica *fuzzy* (em que a função de relação é uma função característica) de conjunto nítido.

Vamos apresentar as operações básicas entre conjuntos *fuzzy*, iniciando pelo tratamento do conjunto vazio e o conjunto universo.

Definição 2.7 (conjuntos vazio e universo *fuzzy*) Definimos $\psi_\emptyset(x) = 0 \forall x \in U$ para o conjunto vazio \emptyset e $\psi_U(x) = 1, \forall x \in U$ para o conjunto universo U .

Descrevemos a relação de conjuntos *fuzzy* através de comparações entre suas funções de relação.

Definição 2.8 (relação entre conjuntos) *Sejam A e B conjuntos fuzzy com suas respectivas funções de relação ψ_A e ψ_B . Dizemos que $A \subset B$ se $\forall x \in U \psi_A(x) \leq \psi_B(x)$, onde U é o conjunto universo.*

Assim, dado um conjunto *fuzzy* $A \neq \emptyset$ qualquer, temos que $\psi_{\emptyset}(x) \leq \psi_A(x) \leq \psi_U(x)$, $\forall x \in U$, logo $\emptyset \subset A \subset U$. Além disso para mostrarmos que dois conjuntos *fuzzy* A e B são iguais, é necessário mostrar que $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja $\psi_A(x) \leq \psi_B(x)$ e $\psi_B(x) \leq \psi_A(x) \forall x \in U$, sendo assim, $\psi_A(x) = \psi_B(x) \forall x \in U$.

Definição 2.9 (suporte) *Seja F um conjunto fuzzy. Um subconjunto clássico de U chamado de suporte é dado por $\text{supp}F = \{x \in U : \psi_F(x) > 0\}$.*

Este conjunto conecta a teoria clássica de conjuntos a teoria *fuzzy* de conjuntos. E podemos verificar um resultado sobre sua ordenação na proposição a seguir.

Proposição 2.10 *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U . Se $A \subset B$ então $\text{supp}A \subset \text{supp}B$.*

Demonstração: Dado que $A \subset B$ então $\psi_A(x) \leq \psi_B(x)$, $\forall x \in U$. Seja $y \in \text{supp}A$; logo $\psi_A(y) > 0$. Assim $\psi_B(y) > 0$, e, conseqüentemente $y \in \text{supp}B$. Portanto $\text{supp}A \subset \text{supp}B$. \square

Definiremos a união e interseção de conjuntos *fuzzy* através da análise dos valores das funções de relação de cada conjunto. Isto ocorre por meio das funções de máximo e mínimo.

Definição 2.11 (união de conjuntos fuzzy) *A união entre dois conjuntos fuzzy A e B , subconjuntos de U (conjunto universo no sentido clássico), possui a seguinte função relação: $\psi_{A \cup B}(x) = \max\{\psi_A(x), \psi_B(x)\}$, com $x \in U$.*

Notemos com isso que $A, B \subset A \cup B \subset U$.

Definição 2.12 (interseção de conjuntos fuzzy) *A interseção de dois conjuntos fuzzy A e B , subconjuntos de U (conjunto universo no sentido clássico), tem a função relação dada por $\psi_{A \cap B}(x) = \min\{\psi_A(x), \psi_B(x)\}$, com $x \in U$.*

Logo $A \cap B \subset A, B \subset U$.

Por fim, resta definir como é dado o complemento de conjuntos *fuzzy*.

Definição 2.13 (complemento $A \subset B$) O complemento do conjunto A em relação ao conjunto B , onde $A \subset B$, é dado por $\psi_{A_B^c}(x) = \psi_B(x) - \psi_A(x)$, com $x \in U$. Isto garante que $\psi_{A_B^c}(x) \in [0, 1]$.

Notemos que, dado um conjunto *fuzzy* A , o caso em que $\psi_{A^c}(x) = \psi_A(x)$ para algum $x \in U$ é quando se tem mais dúvida a qual conjunto x pertence, pois este pertence e não pertence a A com o mesmo grau de relação. Esta é a maior diferença entre a teoria dos conjuntos *fuzzy* e a teoria dos conjuntos clássica, onde um elemento pertence a um conjunto ou ao complementar deste, sendo ambas as situações mutualmente excludentes.

Proposição 2.14 As operações entre conjuntos fuzzy satisfazem as seguintes propriedades:

1. $A \cup B = B \cup A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
5. $A \cup A = A$;
6. $A \cap A = A$;
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
9. $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cup \emptyset = A$;
10. $A \cap U = A$ e $A \cup U = U$;
11. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Lei de DeMorgan).

Demonstração: Provaremos os itens 7 e 11; fica a cargo do leitor a demonstração dos outros itens, mas suas provas ocorrem de maneira semelhante, utilizando as seguintes propriedades das funções máximo e mínimo:

$$\begin{cases} \max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b + |a - b|], \\ \min\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b - |a - b|]. \end{cases}$$

2 Lógica Fuzzy

Com $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos $a = \psi_A(x)$, $b = \psi_B(x)$ e $c = \psi_C(x)$.

(7) A função relação do conjunto $A \cup (B \cap C)$ é dada por

$$\psi_{A \cup (B \cap C)}(x) = \max\{a, \min\{b, c\}\},$$

para essa prova, analisaremos caso a caso.

1. Caso $a = \max\{a, \min\{b, c\}\}$:

a) Caso $b = \min\{b, c\}$: temos então que $a = \max\{a, b\}$.

i. Caso $a = \max\{a, c\}$: então $a =$

$$\min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\} = \psi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x).$$

ii. Caso $c = \max\{a, c\}$: então $a = \min\{a, c\}$, logo $a = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\} =$

$$\psi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x).$$

b) Caso $c = \min\{b, c\}$: análogo.

2. Caso $\min\{b, c\} = \max\{a, \min\{b, c\}\}$:

a) Caso $b = \min\{b, c\}$: temos que $b = \max\{a, b\}$ e $c = \max\{a, c\}$, logo $b = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\} = \psi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x)$.

b) $c = \min\{b, c\}$: análogo.

(11) Para este item, analisaremos de outra forma. Notemos que a função relação do conjunto $(A \cup B)^c$ é dado por

$$\begin{aligned} \psi_{(A \cup B)^c}(x) &= 1 - \psi_{A \cup B}(x) \\ &= 1 - \max\{a, b\} \\ &= 1 - \frac{1}{2}[a + b + |a - b|] \\ &= \frac{1}{2}[2 - a - b - |a - b|] \\ &= \frac{1}{2}[(1 - a) + (1 - b) - |(1 - a) - (1 - b)|] \\ &= \min\{(1 - a), (1 - b)\} \\ &= \min\{\psi_{A^c}(x), \psi_{B^c}(x)\} \\ &= \psi_{A^c \cap B^c}(x), \end{aligned}$$

que é a expressão da função de pertencimento do conjunto $A^c \cap B^c$. Logo $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

A prova para $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ é análoga. □

Relações fuzzy

A construção de relação *fuzzy* é semelhante à de relação de teoria dos conjuntos, sendo esta um caso particular das relações *fuzzy* caso as funções relação sejam funções características. A relação clássica diz que existe ou não uma relação entre dois elementos, enquanto na relação *fuzzy* é indicado em adicional o grau desta relação.

Definição 2.15 (Relação clássica) *Uma relação clássica \mathcal{R} é uma correspondência de elementos entre conjuntos. Dados conjuntos U_1, U_2, \dots, U_n temos que $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n$ se relacionam se $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathcal{R}$.*

Definição 2.16 (Relação fuzzy) *Uma relação fuzzy \mathcal{R} é uma correspondência de elementos entre conjuntos. Dados conjuntos U_1, U_2, \dots, U_n temos que $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n$ se relacionam se $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathcal{R}$. Desta forma, a relação fuzzy é definida por uma função de relação $\psi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$.*

Exemplo 2.17 Dados os conjuntos U_1 e U_2 , com funções de pertencimento ψ_{U_1} e ψ_{U_2} e elementos $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$, respectivamente. A seguinte função $\psi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2$ dada por

$$\psi_{\mathcal{R}}(u_1, u_2) = \frac{\psi_{U_1}(u_1) + \psi_{U_2}(u_2)}{2} \in [0, 1]$$

define uma relação *fuzzy* sobre esses elementos.

Sistemas baseados em regras fuzzy

Nesta seção apresentaremos como a lógica *fuzzy* pode ser usada para tratar informações imprecisas de modo a se tomar decisões baseadas nelas. Para isso utilizaremos um sistema baseado em regras *fuzzy* (SBRF) para que se tenha uma ação a cada condição, tendo por trás regras da lógica *fuzzy*. Informalmente, teremos fatores, que, com sua combinação, culminarão no resultado final. Este conjunto de fatores e resultado final, que podem possuir diversos cenários, é reunido na base de regras *fuzzy*. O resultado final que é obtido da combinação dos fatores é identificado através do controlador *fuzzy*.

Definição 2.18 (Base de regras fuzzy) *Uma base de regras fuzzy segue o modelo da tabela 2.1.*

Onde cada proposição fuzzy têm a forma: *Se “combinação de condições” então “ação”*. Cada “condição” e cada “ação” tem um valor fuzzy atribuído pelas suas funções de per-

R_1	“Proposição <i>fuzzy</i> 1”
R_2	“Proposição <i>fuzzy</i> 2”
\vdots	\vdots
R_r	“Proposição <i>fuzzy</i> r ”

Tabela 2.1: Forma geral de uma base de regras *fuzzy*.

tencimento baseadas em seus conjuntos fuzzy respectivos.

Vamos agora tratar da metodologia dos controladores *fuzzy* descrevendo sua construção.

Definição 2.19 (Controlador *fuzzy*) *Controladores fuzzy são sistemas fuzzy cujas entradas são as condições do sistema e cujas saídas são as “ações” que devem ser tomadas. Podemos visualizar como uma função que vai de \mathbb{R}^n (com n entradas) a \mathbb{R}^m (com m saídas).*

Esta função é gerada pelo seguinte processo:

1. Módulo de Fuzzificação

Sendo o primeiro passo da construção, as entradas do sistema são associadas a conjuntos *fuzzy* obtendo-se suas funções de relação. Se neste caso for possível associar as entradas a conjuntos clássicos suas funções serão funções características.

2. Módulo de regras básicas

Neste passo são montadas as proposições para o sistema, onde são tratados os diversos casos de combinações das variáveis em cada conjunto *fuzzy* (dados no passo anterior) usando as funções de relação. Podemos observar na tabela 2.3 um exemplo de base de regras. Neste exemplo, cada linha é uma combinação de fatores: nível de chuva acumulada; salinidade inicial de um estuário; vazão de um rio que deságua sobre o estuário; esta combinação culmina no nível de salinidade final, apresentado na última coluna dessa linha.

3. Módulo de inferência *fuzzy*

Aqui são usados conectivos lógicos para se obter relações *fuzzy* de saídas para o sistema.

4. Módulo de defuzzificação

Por fim, temos que, dado um conjunto de entradas, obtemos que a saída pertence a um conjunto *fuzzy*, restando sua “tradução” para um valor real através

da função de relação relativa a este conjunto. Vamos apresentar um método, que será utilizado em nosso modelo, posteriormente.

Método de defuzzificação: centro de massa

Temos como resposta ao modelo, seguindo os métodos do controlador *fuzzy*, um conjunto saída *fuzzy*, restando apenas passá-lo a um valor real. Para isso, precisamos defuzzificar esta informação. O método de defuzzificação centro de massa ($G(B)$) é semelhante a tomar uma média aritmética para uma sequência de distribuição de uma dada variável, onde os pesos das distribuições são o grau de relação da variável com seu conjunto *fuzzy*, $\psi_B(u_i)$ (grau de relação entre u_i e o conceito modelado pelo conjunto *fuzzy* B). Temos as seguintes equações 2.2 e 2.3 para domínios discretos e contínuos respectivamente.

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \psi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_B(u_i)}. \quad (2.2)$$

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \psi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \psi_B(u) du}. \quad (2.3)$$

Exemplo de aplicação

Vamos demonstrar a utilização da lógica *fuzzy* através de um exemplo. Veremos a aplicação dos conceitos apresentados até aqui. Exploraremos um modelo criado para realizar previsões da salinidade de um estuário em Cananeia e Ilha Comprida (litoral paulista). Um estuário é um corpo d'água formado pelo encontro das águas doces de rios e córregos com as águas salgadas dos oceanos.

O modelo é baseado em um sistema *fuzzy* usando o método de defuzzificação centro de massa. As variáveis de entrada são: as chuvas, a salinidade inicial e o quociente de vazão do Rio Ribeira de Iguape. A variável de saída é a salinidade final do estuário. Temos que as variáveis são dadas por valores *fuzzy*, cujas funções de relação são dadas por formas triangulares ou trapezoidais (figura 2.2). Com os dados passados podemos através de uma base de regras, relacioná-los e, com isso, estimar um valor para a salinidade final. Essa previsão será dada pelo processo de defuzzificação centro de massa. Na figura 2.1 vemos a estrutura do modelo e na tabela 2.2 relacionamos a simbologia com os nomes dos conjuntos *fuzzy*.

Agora iremos dar um exemplo de como este modelo opera. Vamos considerar as seguintes variáveis de entrada: o valor da precipitação acumulada é de 300 mm, a

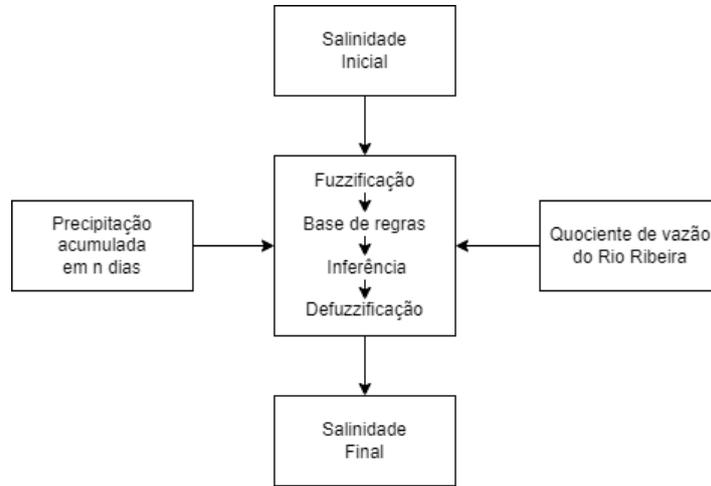


Figura 2.1: Arquitetura do modelo de previsão do nível de salinidade do estuário de Cananeia e Ilha Comprida.

Chuva acumulada	Sal. inicial	Quoc. de vazão	Sal. final
Baixa = C_b	Muito baixa = SI_{mb}	Baixa = V_b	Muito baixa = SF_{mb}
Média = C_m	Baixa = SI_b	Média = V_m	Baixa = SF_b
Média alta = C_{ma}	Média baixa = SI_{meb}	Média alta = V_{ma}	Média baixa = SF_{meb}
Alta = C_a	Média = SI_m	Alta = V_a	Média = SF_m
Muito alta = C_{al}	Alta = SI_a	Muito alta = V_{al}	Alta = SF_a

Tabela 2.2: Simbologia para as classificações das variáveis analisadas.

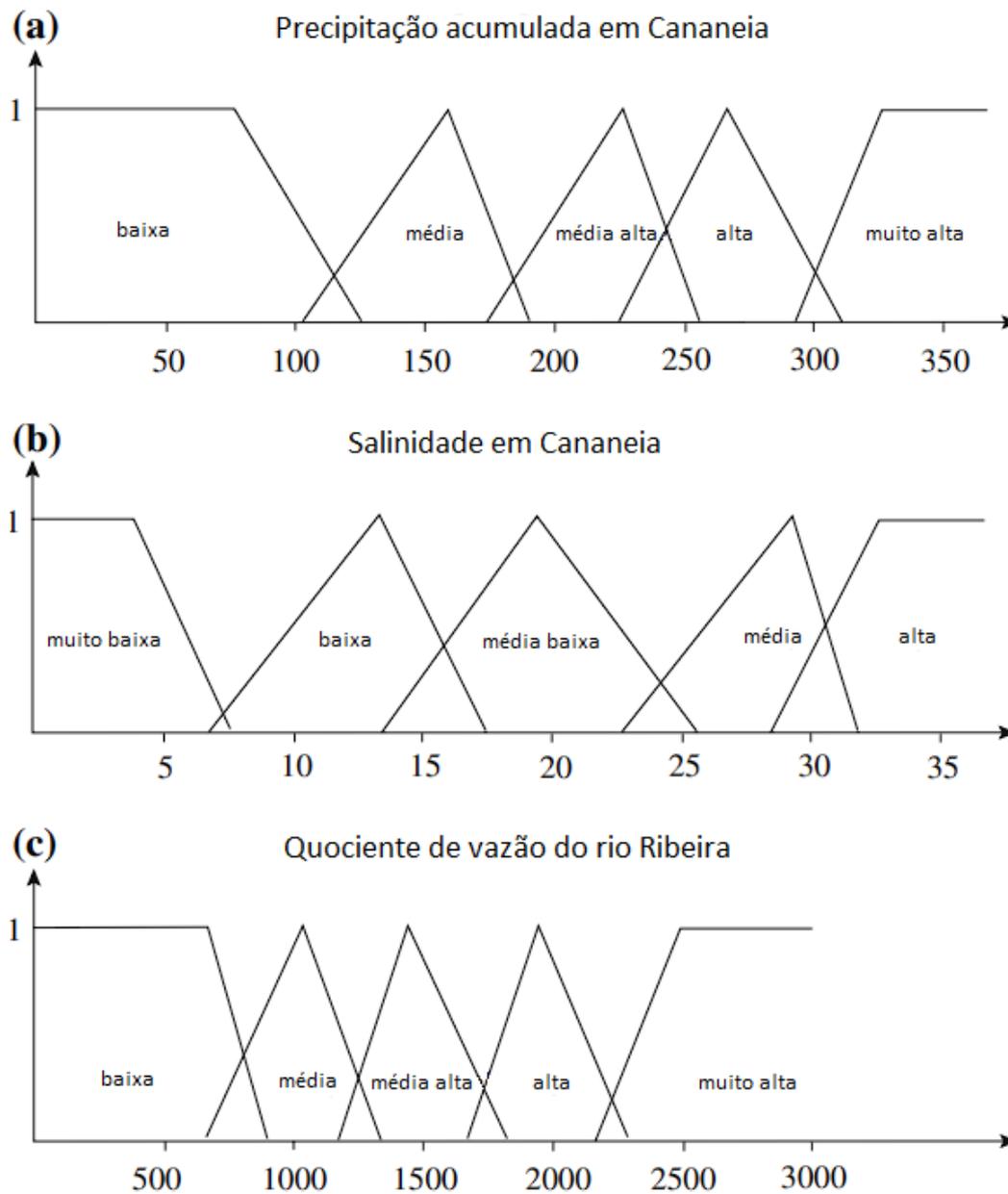


Figura 2.2: Funções de relação: a) Precipitação acumulada em Cananeia; b) Salinidade em Cananeia (partes por milhar); c) Quociente de vazão do rio Ribeira. Figura traduzida da obra “First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics”[BBL].

2 Lógica Fuzzy

salinidade inicial é de $24^0/00$ e o fluxo do rio é de $500 \text{ m}^3/\text{s}$. Cada variável de entrada pertence a um conjunto *fuzzy* definido anteriormente, sendo o grau de pertencimento dado pela função de relação. De acordo com a figura 2.2, temos que esse valor de precipitação acumulada pertence aos conjuntos *fuzzy* “alta” e “muito alta”, vamos supor, com os seguintes graus de pertencimento $\psi_{C_a}(300) = 0.24$ e $\psi_{C_{al}}(300) = 0.23$, respectivamente. O valor de salinidade inicial pertence aos conjuntos “média baixa” e “média”, com $\psi_{S_{I_{meb}}}(24) = 0.25$ e $\psi_{S_{I_m}}(24) = 0.21$, respectivamente. Por fim, o valor do fluxo do rio pertence ao conjunto “baixa”, com $\psi_{V_b}(500) = 1$.

Dessa forma, estes valores iniciais satisfazem quatro diferentes cenários:

- precipitação alta, salinidade média e fluxo baixo;
- precipitação alta, salinidade média baixa e fluxo baixo;
- precipitação muito alta, salinidade média e fluxo baixo;
- precipitação muito alta, salinidade média baixa e fluxo baixo.

Vamos agregar estas funções de relação de cada cenário através do conectivo “e”:

$$\begin{aligned}
 \min\{\psi_{C_a}(300), \psi_{S_{I_m}}(24), \psi_{V_b}(500)\} &= \min\{0.24; 0.21; 1\} = 0.21 \\
 \min\{\psi_{C_a}(300), \psi_{S_{I_{meb}}}(24), \psi_{V_b}(500)\} &= \min\{0.24; 0.25; 1\} = 0.24 \\
 \min\{\psi_{C_{al}}(300), \psi_{S_{I_m}}(24), \psi_{V_b}(500)\} &= \min\{0.23; 0.21; 1\} = 0.21 \\
 \min\{\psi_{C_{al}}(300), \psi_{S_{I_{meb}}}(24), \psi_{V_b}(500)\} &= \min\{0.23; 0.25; 1\} = 0.23
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Segundo a base de regras para este modelo, que pode ser visto na tabela 2.3, dadas as entradas, pelas regras R_{24} , R_{25} , R_{26} e R_{27} , temos os seguintes cenários finais respectivos:

- Salinidade final média baixa;
- Salinidade final baixa;
- Salinidade final muito baixa;
- Salinidade final muito baixa.

Vamos projetar os valores obtidos no passo anterior sobre os conjuntos de saída *fuzzy*, de modo que os possíveis valores para o grau de pertencimento nos conjuntos são menores ou iguais aos valores encontrados. Isto é, 0.21 para o conjunto relativo a salinidade final “muito baixa” no primeiro cenário, 0.24 para o conjunto “baixa”

2 Lógica Fuzzy

	Chuva acumulada	Salinidade inicial	Vazão	Salinidade final
R_1	baixa	média baixa	média	média baixa
R_2	baixa	média	média alta	média baixa
R_3	baixa	média baixa	média alta	baixa
R_4	baixa	média baixa	alta	baixa
R_5	baixa	baixa	alta	média baixa
R_6	baixa	média	muito alta	baixa
R_7	baixa	média baixa	muito alta	média baixa
R_8	baixa	baixa	muito alta	média baixa
R_9	baixa	média	baixa	média
R_{10}	baixa	média	média	média baixa
R_{11}	baixa	baixa	baixa	baixa
R_{12}	média	média	baixa	média baixa
R_{13}	média	média baixa	baixa	média baixa
R_{14}	média	média	média	média baixa
R_{15}	média	média	média alta	média baixa
R_{16}	média	média baixa	média	baixa
R_{17}	média	alta	baixa	média
R_{18}	média	alta	média	média baixa
R_{19}	média	alta	média alta	baixa
R_{20}	média	baixa	média	baixa
R_{21}	média	baixa	baixa	baixa
R_{22}	média alta	média	baixa	média baixa
R_{23}	média alta	média baixa	baixa	média baixa
R_{24}	alta	média	baixa	média baixa
R_{25}	alta	média baixa	baixa	baixa
R_{26}	muito alta	média	baixa	muito baixa
R_{27}	muito alta	média baixa	baixa	muito baixa
R_{28}	muito alta	baixa	baixa	muito baixa

Tabela 2.3: Base de regras *fuzzy* para o modelo

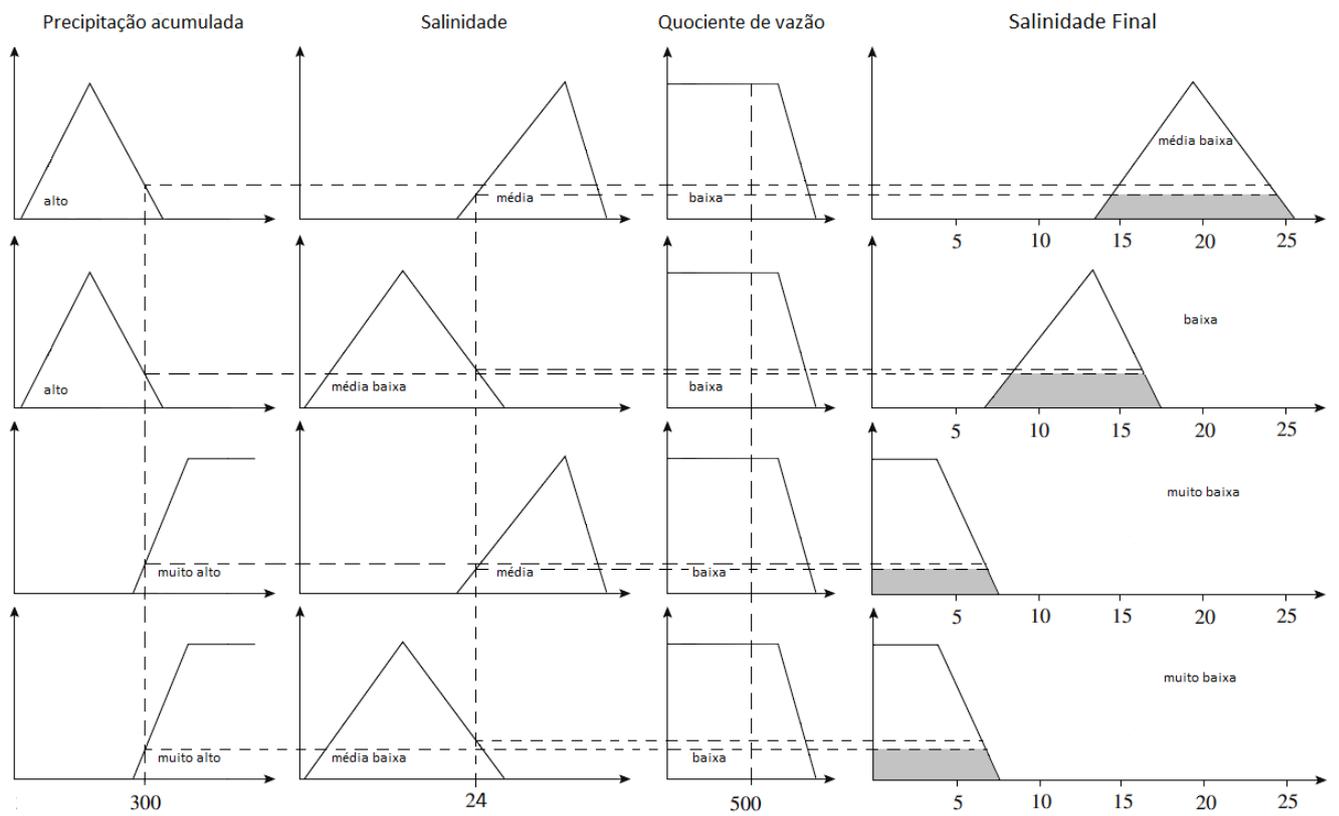


Figura 2.3: Processo de inferência.

2 Lógica Fuzzy

no segundo caso, 0.21 para o “muito baixa” no terceiro caso e 0.23 para o “muito baixa” no quarto caso. Podemos ver esse processo através da figura 2.3.

Agora vamos agregar os conjuntos de saídas usando o conectivo “ou”, pois tratamos de quatro possíveis cenários, temos como resultado a figura 2.4 para ilustrar o conjunto de saída. Por fim, resta-nos defuzzificar o conjunto. Utilizando o método de centro de gravidade, vamos calcular o valor da salinidade final.

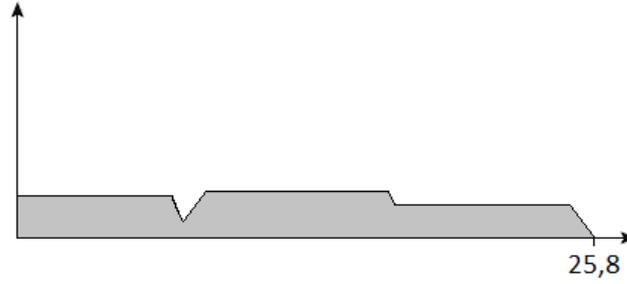


Figura 2.4: Conjunto de saída do processo de inferência Mamdani sem defuzzificação.

Cálculo 2.20

Sejam B o conjunto de saída do processo de construção e $u \in B$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u\psi_B(u)du &= \int_0^{6.765} u\psi_B(u)du + \int_{6.765}^{7.285} u\psi_B(u)du + \int_{7.285}^{8.528} u\psi_B(u)du + \\ &+ \int_{8.528}^{16.66} u\psi_B(u)du + \int_{16.66}^{16.8} u\psi_B(u)du + \int_{16.8}^{24.5} u\psi_B(u)du \\ &+ \int_{24.5}^{25.8} u\psi_B(u)du, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$\int_0^{6.765} u\psi_B(u)du = \int_0^{6.765} 0.23udu \approx 5.263; \quad (2.6)$$

$$\int_{6.765}^{7.281} u\psi_B(u)du = \int_{6.765}^{7.281} u(-0.313u + 2.347)du \approx 0.538; \quad (2.7)$$

$$\int_{7.281}^{8.528} u\psi_B(u)du = \int_{7.281}^{8.528} u(0.139u - 0.944)du \approx 1.546; \quad (2.8)$$

$$\int_{8.528}^{16.66} u\psi_B(u)du = \int_{8.528}^{16.66} 0.24udu \approx 24.58; \quad (2.9)$$

$$\int_{16.66}^{16.8} u\psi_B(u)du = \int_{16.66}^{16.8} u(-0.214u + 3.81)du \approx 0.538; \quad (2.10)$$

$$\int_{16.8}^{24.5} u\psi_B(u)du = \int_{16.8}^{24.5} 0.21udu \approx 33.391; \quad (2.11)$$

2 Lógica Fuzzy

$$\int_{24.5}^{25.8} u\psi_B(u)du = \int_{24.5}^{25.8} u(-0.162u + 4.168)du \approx 3.034. \quad (2.12)$$

Logo, $\int_{\mathbb{R}} u\psi_B(u)du \approx 68.89$.

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi_B(u)du &= \int_0^{6.765} \psi_B(u)du + \int_{6.765}^{7.285} \psi_B(u)du + \int_{7.285}^{8.528} \psi_B(u)du + \\ &+ \int_{8.528}^{16.66} \psi_B(u)du + \int_{16.66}^{16.8} \psi_B(u)du + \int_{16.8}^{24.5} \psi_B(u)du \\ &+ \int_{24.5}^{25.8} \psi_B(u)du, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde

$$\int_0^{6.765} \psi_B(u)du = \int_0^{6.765} 0.23du \approx 1.556; \quad (2.14)$$

$$\int_{6.765}^{7.281} \psi_B(u)du = \int_{6.765}^{7.281} (-0.313u + 2.347)du \approx 0.077; \quad (2.15)$$

$$\int_{7.281}^{8.528} \psi_B(u)du = \int_{7.281}^{8.528} (0.139u - 0.944)du \approx 0.193; \quad (2.16)$$

$$\int_{8.528}^{16.66} \psi_B(u)du = \int_{8.528}^{16.66} 0.24du \approx 1.952; \quad (2.17)$$

$$\int_{16.66}^{16.8} \psi_B(u)du = \int_{16.66}^{16.8} (-0.214u + 3.81)du \approx 0.032; \quad (2.18)$$

$$\int_{16.8}^{24.5} \psi_B(u)du = \int_{16.8}^{24.5} 0.21du \approx 1.617; \quad (2.19)$$

$$\int_{24.5}^{25.8} \psi_B(u)du = \int_{24.5}^{25.8} (-0.162u + 4.168)du \approx 0.122; \quad (2.20)$$

Assim, $\int_{\mathbb{R}} \psi_B(u)du \approx 5.542$.

Desta forma, $G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u\psi_B(u)du}{\int_{\mathbb{R}} \psi_B(u)du} \approx 12.431$.

Portanto a salinidade final é $12.431^0/00$. Notemos com este exemplo como a lógica fuzzy se destaca por sua capacidade de lidar com a ambiguidade. Dado que teríamos

2 Lógica Fuzzy

quatro possíveis descrições para o cenário visto, devido aos valores apresentados para as variáveis.

Com isso atingimos nosso objetivo, completando nosso estudo sobre lógicas *fuzzy*.

Introdução à lógica modal

O conteúdo a seguir está baseado no livro escrito por Fitting [FM] e no artigo escrito por Kripke [Kripke].

Iniciaremos nosso estudo em lógica modal apresentando as principais estruturas que serão utilizadas e suas propriedades. Apresentaremos os diferentes sistemas de lógicas modais e algumas de suas formas axiomáticas. Os modelos apresentados detalhadamente serão importantes para a demonstração do teorema da completude para lógica modal, o objetivo de nosso estudo.

Uma breve definição do que seria uma modalidade pode se dar pelos advérbios (palavra invariável que funciona como um modificador de um verbo, adjetivo, um outro advérbio ou uma frase). Por exemplo na frase: “possivelmente terminarei esse TCC hoje”, a palavra “possivelmente” desempenha o papel de advérbio. Basta apenas definirmos uma interpretação matemática para este advérbio. Em nossos sistemas modais analisados teremos as modalidades “possivelmente” e “necessariamente”. Começemos com as definições de conectivos lógicos e variáveis proposicionais.

Definição 3.1 (Conectivos proposicionais) *São utilizados os seguintes conectivos na lógica proposicional modal: \neg (conectivo unário de negação), \wedge (conectivo binário “e”), \vee (conectivo binário “ou”), \supset (conectivo binário implicação), \equiv (conectivo binário equivalência), \Box (conectivo unário “necessariamente”), \Diamond (conectivo unário “possivelmente”).*

Definição 3.2 (Variáveis proposicionais) *As variáveis proposicionais, também chamadas de letras proposicionais, são definidas pelas letras maiúsculas normalmente usadas A, B, C , etc. Elas podem assumir valor-verdade verdadeiro ou falso.*

Com estas duas definições iniciais podemos começar a gerar fórmulas a partir de sua junção.

Definição 3.3 (Fórmulas modais proposicionais) *As fórmulas da lógica modal seguem as seguintes regras:*

3 Lógica Modal

1. Toda variável proposicional é uma fórmula;
2. Se X é uma fórmula então $\neg X$ também é uma fórmula;
3. Se X e Y são fórmulas, e \circ é um conectivo binário, $X \circ Y$ e $(X \circ Y)$ são fórmulas;
4. Se X é uma fórmula então $\Box X$ e $\Diamond X$ são fórmulas.

Além disso, diremos que fórmulas X e Y são subfórmulas das fórmulas $\neg X$, $X \circ Y$, $\Box X$ e $\Diamond X$.

Agora apresentaremos uma estrutura fundamental para nosso estudo, o *frame*, que constituirá parte de nosso modelo. Nele temos a introdução de mundos possíveis. Informalmente, um mundo possível representa um cenário como as coisas poderiam ser. A verdade de uma proposição modal depende não apenas do mundo atual, mas também dos mundos acessíveis a partir dele. O modelo constitui a junção dos mundos possíveis com suas relações de acessibilidade, definindo assim valores verdade para as variáveis proposicionais em cada mundo.

Definição 3.4 (Frame) Um frame é um par (K, \mathcal{R}) , onde K é um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados de “mundos possíveis”, e \mathcal{R} é uma relação binária em K , chamada de relação de acessibilidade.

Iremos simbolizar os mundos possíveis pelas letras $G, H, H', H'', \dots, H_1, H_2, \dots$. Dados $H_1, H_2 \in K$ lemos $H_1 \mathcal{R} H_2$ como “ H_2 é possível (ou acessível) a partir de H_1 ” ou “ H_2 é possível em H_1 ”.

Para a definição de modelo adicionamos duas novas informações ao *frame*, sendo estas um mundo possível que terá um papel fundamental, porém só será apresentado posteriormente, e uma função que atribuirá valores-verdade para as fórmulas do modelo em cada mundo.

Definição 3.5 (Modelo) Um modelo modal é uma quádrupla $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$, em que $G \in K$ é dito “mundo real”, (K, \mathcal{R}) é um frame e \Vdash é uma relação entre mundos possíveis e variáveis proposicionais. De modo que, se $H \Vdash P$, dizemos que P é verdadeiro no mundo H . Caso não seja verdade que $H \Vdash P$, então denotamos $H \not\Vdash P$ e dizemos que P é falso em H . Em alguns momentos iremos nos referir como estrutura de modelo à tripla (G, K, \mathcal{R}) e apenas modelo à função \Vdash .

Observemos que a notação $H \Vdash X$ não expressa qual modelo estamos tratando, somente um mundo possível e uma fórmula. Em casos em que a notação pode ficar ambígua escreveremos o tipo do modelo que estamos tratando, como por exemplo

$\mathbf{M} = (G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$; assim, dizemos que a fórmula X é verdadeira no mundo $H \in K$ do modelo \mathbf{M} .

Podemos traçar um paralelo com a lógica clássica, onde cada linha de uma tabela verdade é um modelo, dado que estas possuem atribuição completa de valores-verdade, dizendo quais letras proposicionais são verdadeiras e quais são falsas. Observemos que modelos modais têm um salto de complexidade, pois agora ao especificarmos valores estamos fazendo isso nos mundos possíveis, isto é, em uma família de elementos de K , além do fato destes mundos se relacionarem pela relação \mathcal{R} . Definiremos agora como é feito o cálculo de valores-verdade para fórmulas mais complexas a partir de fórmulas menores.

Definição 3.6 (Verdade no modelo) *Seja $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo. Para cada $H, H' \in K$ e fórmulas X, Y , a relação \Vdash deve seguir as seguintes regras:*

1. $H \Vdash \neg X \Leftrightarrow H \not\Vdash X$;
2. $H \Vdash (X \wedge Y) \Leftrightarrow (H \Vdash X \text{ e } H \Vdash Y)$;
3. $H \Vdash \Box X \Leftrightarrow$ para todo $H' \in K$, se HRH' então $H' \Vdash X$;
4. $H \Vdash \Diamond X \Leftrightarrow$ para algum $H' \in K$, HRH' e $H' \Vdash X$.

Além disso diremos que X é verdadeira no modelo \Vdash se $G \Vdash X$; equivalentemente, diremos que X possui um modelo, no caso, \Vdash .

Notemos que as duas primeiras regras tratam do comportamento de cada mundo, que se dá de forma semelhante ao de tabelas verdade. As duas últimas regras abordam o comportamento das fórmulas entre mundos. A regra 3 diz que ser necessariamente verdadeiro é equivalente a ser verdadeiro em todos os mundos possíveis acessíveis a partir do que estamos tratando. A regra 4 diz que ser possivelmente verdadeiro é equivalente a ser verdadeiro em algum mundo possível acessível.

Agora iremos demonstrar o comportamento da atribuição dos valores-verdade para os conectivos \vee , \supset e \equiv . Para isso definiremos primeiramente sua equivalência em relação aos conectivos já tratados, \neg e \wedge .

Definição 3.7 *Dados X e Y fórmulas, os conectivos \vee , \supset e \equiv são escritos a partir dos conectivos \neg e \wedge da seguinte forma:*

- $X \vee Y$ se, e somente se, $\neg(\neg X \wedge \neg Y)$;
- $X \supset Y$ se, e somente se, $\neg X \vee Y$;

3 Lógica Modal

- $X \equiv Y$ se, e somente se, $(X \supset Y) \wedge (Y \supset X)$.

Visto isso, segue da seguinte proposição seus comportamentos em relação a atribuição dos valores-verdade.

Proposição 3.8 1. $H \Vdash (X \vee Y) \Leftrightarrow (H \Vdash X \text{ ou } H \Vdash Y)$;

2. $H \Vdash (X \supset Y) \Leftrightarrow \text{se } H \Vdash X \text{ então } H \Vdash Y$;

3. $H \Vdash (X \equiv Y) \Leftrightarrow (H \Vdash X \text{ se, e somente se, } H \Vdash Y)$.

Demonstração: 1.

$$\begin{aligned}
 H \Vdash (X \vee Y) &\Leftrightarrow H \Vdash \neg(\neg X \wedge \neg Y) \\
 &\Leftrightarrow H \not\Vdash (\neg X \wedge \neg Y) \\
 &\Leftrightarrow H \not\Vdash \neg X \text{ e } H \not\Vdash \neg Y \\
 &\Leftrightarrow \text{não } H \Vdash \neg X \text{ e não } H \Vdash \neg Y \\
 &\Leftrightarrow \text{não } (H \Vdash \neg X \text{ e } H \Vdash \neg Y) \\
 &\Leftrightarrow \text{não } (H \not\Vdash X \text{ e } H \not\Vdash Y) \\
 &\Leftrightarrow \text{não } (\text{não } (H \Vdash X) \text{ e não } (H \Vdash Y)) \\
 &\Leftrightarrow H \Vdash X \text{ ou } H \Vdash Y.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 H \Vdash (X \supset Y) &\Leftrightarrow H \Vdash (\neg X \vee Y) \\
 &\Leftrightarrow H \Vdash \neg X \text{ ou } H \Vdash Y \\
 &\Leftrightarrow H \not\Vdash X \text{ ou } H \Vdash Y \\
 &\Leftrightarrow \text{não } (H \Vdash X) \text{ ou } H \Vdash Y \\
 &\Leftrightarrow \text{se } H \Vdash X \text{ então } H \Vdash Y.
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 H \Vdash (X \equiv Y) &\Leftrightarrow H \Vdash ((X \supset Y) \wedge (Y \supset X)) \\
 &\Leftrightarrow H \Vdash (X \supset Y) \text{ e } H \Vdash (Y \supset X) \\
 &\Leftrightarrow (\text{se } H \Vdash X \text{ então } H \Vdash Y) \text{ e } (\text{se } H \Vdash Y \text{ então } H \Vdash X) \\
 &\Leftrightarrow H \Vdash X \text{ se, e somente se, } H \Vdash Y.
 \end{aligned}$$

□

Vamos mostrar as relações entre os conectivos necessariamente e possivelmente.

Proposição 3.9 Para cada mundo possível $H \in K$ de um modelo modal $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ temos que $H \Vdash (\Box X \equiv \neg \Diamond \neg X)$ e $H \Vdash (\Diamond X \equiv \neg \Box \neg X)$.

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que $H \Vdash (\Box X \equiv \neg \Diamond \neg X)$.

$$\begin{aligned}
 H \Vdash \neg \Diamond \neg X &\Leftrightarrow H \not\Vdash \Diamond \neg X \\
 &\Leftrightarrow \text{não } (H \Vdash \Diamond \neg X) \\
 &\Leftrightarrow \text{não (para algum } H' \in K, HRH' \text{ e } H' \Vdash \neg X) \\
 &\Leftrightarrow \text{para todo } H' \in K, \text{ não } HRH' \text{ ou não } H' \Vdash \neg X \\
 &\Leftrightarrow \text{para todo } H' \in K, \text{ não } HRH' \text{ ou não } H' \not\Vdash X \\
 &\Leftrightarrow \text{para todo } H' \in K, \text{ não } HRH' \text{ ou } H' \Vdash X \\
 &\Leftrightarrow \text{para todo } H' \in K, \text{ se } HRH' \text{ então } H' \Vdash X \\
 &\Leftrightarrow H \Vdash \Box X.
 \end{aligned}$$

Desta forma, da proposição 3.8.3, obtemos o resultado desejado. Agora, vamos mostrar que $H \Vdash (\Diamond X \equiv \neg \Box \neg X)$.

$$\begin{aligned}
 H \Vdash \neg \Box \neg X &\Leftrightarrow H \not\Vdash \Box \neg X \\
 &\Leftrightarrow \text{não } (H \Vdash \Box \neg X) \\
 &\Leftrightarrow \text{não (para todo } H' \in K, \text{ se } HRH' \text{ então } H' \Vdash \neg X) \\
 &\Leftrightarrow \text{não (para todo } H' \in K, \text{ se } HRH' \text{ então } H' \not\Vdash X) \\
 &\Leftrightarrow \text{não (para todo } H' \in K, \text{ não } HRH' \text{ ou } H' \not\Vdash X) \\
 &\Leftrightarrow \text{para algum } H' \in K, HRH' \text{ e não } H' \not\Vdash X \\
 &\Leftrightarrow \text{para algum } H' \in K, HRH' \text{ e } H' \Vdash X \\
 &\Leftrightarrow H \Vdash \Diamond X.
 \end{aligned}$$

Com isso, da proposição 3.8.3, obtemos o resultado desejado. \square

Agora iremos apresentar algumas propriedades do conectivo \Box , começando com um exemplo.

Exemplo 3.10 Vamos tratar de um exemplo em que temos os mundos possíveis $G, H, H' \in K$ e as fórmulas P, Q tais que: $H \Vdash P$, $H \not\Vdash Q$, $H' \not\Vdash P$ e $H' \Vdash Q$. Além disso, GRH e GRH' . Como $H \Vdash P$ então $H \Vdash P \vee Q$. Do mesmo modo, $H' \Vdash P \vee Q$ pois $H' \Vdash Q$. Como H e H' são os únicos mundos possíveis acessíveis a partir de G e $P \vee Q$ é verdadeiro em ambos, logo $G \Vdash \Box(P \vee Q)$. Observemos que não ocorre $G \Vdash \Box P$, pois se fosse verdade deveríamos ter $H' \Vdash P$, o que não é verdade. Da mesma forma não ocorre $G \Vdash \Box Q$, logo não ocorre $G \Vdash \Box P \vee \Box Q$. Consequentemente $\Box(P \vee Q) \supset (\Box P \vee \Box Q)$ não é verdade em G . Além disso, $G \Vdash \Diamond P$ e $G \Vdash \Diamond Q$; deste modo, $G \Vdash \Diamond P \wedge \Diamond Q$. Mas não é verdade que $G \Vdash \Diamond(P \wedge Q)$ pois não ocorre $H \Vdash P \wedge Q$ e nem $H' \Vdash P \wedge Q$. Portanto, não é verdade em G que $(\Diamond P \wedge \Diamond Q) \supset \Diamond(P \wedge Q)$.

Este modelo é um exemplo que demonstra que \Box não tem a propriedade distributiva sobre \vee . Mostraremos que esta propriedade existe quando aplicada sobre \wedge . Temos que $\Box(P \wedge Q) \supset (\Box P \wedge \Box Q)$ é verdadeira em todo mundo possível de qualquer modelo.

Proposição 3.11 *Sejam $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo, e $H \in K$. Se $H \Vdash \Box(P \wedge Q)$ então $H \Vdash \Box P \wedge \Box Q$.*

Demonstração: Vamos supor que $H \Vdash \Box(P \wedge Q)$. Seja $H' \in K$ um mundo possível arbitrário que é acessível a partir de H , isto é, HRH' . Como $H \Vdash \Box(P \wedge Q)$, então $H' \Vdash P \wedge Q$ e com isso, $H' \Vdash P$ e $H' \Vdash Q$. Visto que H' é arbitrário, então todo mundo possível acessível a partir de H tem P e Q como verdadeiros, tornando, em H , $\Box P$ e $\Box Q$ verdadeiros. Logo $H \Vdash \Box P \wedge \Box Q$. \square

A recíproca, $(\Box P \wedge \Box Q) \supset \Box(P \wedge Q)$, também é verdadeira em qualquer mundo.

Proposição 3.12 *Sejam $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo, e $H \in K$. Se $H \Vdash \Box P \wedge \Box Q$ então $H \Vdash \Box(P \wedge Q)$.*

Demonstração: Seja $H \in K$ tal que $H \Vdash \Box P \wedge \Box Q$. Então $H \Vdash \Box P$ e $H \Vdash \Box Q$. Dado $H' \in K$ com HRH' então $H' \Vdash P$ e $H' \Vdash Q$, assim $H' \Vdash P \wedge Q$. Como H' é arbitrário temos que $H \Vdash \Box(P \wedge Q)$. \square

Com isso, temos que $H \Vdash (\Box(P \wedge Q) \equiv \Box P \wedge \Box Q)$, para todo mundo possível $H \in K$. Por fim, mostremos que a implicação $\Box(P \supset Q) \supset (\Box P \supset \Box Q)$ também é verdadeira.

Proposição 3.13 *Sejam $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo, e $H \in K$. Se $H \Vdash \Box(P \supset Q)$ então $H \Vdash (\Box P \supset \Box Q)$.*

Demonstração: Dado $H \Vdash \Box(P \supset Q)$, seja $H' \in K$ com HRH' . Então $H' \Vdash P \supset Q$; logo, se $H' \Vdash P$ então $H' \Vdash Q$. Pelo fato que H' ser arbitrária, tem se que se $H \Vdash \Box P$ então $H \Vdash \Box Q$; logo pela proposição 3.8(2) $H \Vdash (\Box P \supset \Box Q)$. \square

Observemos que a recíproca não é verdadeira, basta tomarmos mundos H, H' e H'' que possuem as seguintes relações: HRH' e HRH'' com os seguintes valores verdade $H' \not\Vdash P, H' \not\Vdash Q, H'' \Vdash P$ e $H'' \not\Vdash Q$.

Tipos de modelos modais

Nesta seção apresentaremos alguns tipos de modelos modais, suas características e como estes se relacionam. Começemos tratando das propriedades da relação \mathcal{R} .

Definição 3.14 (Propriedades da relação) *Sejam $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo e a relação binária \mathcal{R} :*

1. \mathcal{R} é reflexiva se para todo $H \in K$, $H\mathcal{R}H$, ou seja, todo mundo é acessível a partir de si mesmo;
2. \mathcal{R} é simétrica se, dados $H, H' \in K$, se $H\mathcal{R}H'$ então $H'\mathcal{R}H$;
3. \mathcal{R} é transitiva se, dados $H, H', H'' \in K$, se $H\mathcal{R}H'$ e $H'\mathcal{R}H''$ então $H\mathcal{R}H''$.

Chamamos \mathcal{R} de relação de equivalência se esta satisfaz as 3 propriedades.

Se \mathcal{R} satisfaz alguma propriedade, podemos chegar a conclusões sobre o modelo. As seguintes proposições são exemplos disso.

Proposição 3.15 *Seja $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo com a relação \mathcal{R} transitiva. Temos então que, para todo $H \in K$, $H \Vdash \Box P \supset \Box \Box P$.*

Demonstração:

Pela proposição 3.8(2), queremos provar que se $H \Vdash \Box P$, então $H \Vdash \Box \Box P$, ou seja, dado $H' \in K$ onde $H\mathcal{R}H'$ tem se $H' \Vdash \Box P$. Para mostrar que $H' \Vdash \Box P$ dado $H'' \in K$ onde $H'\mathcal{R}H''$ tem se $H'' \Vdash P$. Como \mathcal{R} é transitiva, temos que $H\mathcal{R}H''$. Dado que $H \Vdash \Box P$ então $H'' \Vdash P$, o que queríamos demonstrar. \square

Proposição 3.16 *Seja $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo com a relação \mathcal{R} reflexiva. Então para todo $H \in K$, $H \Vdash \Box P \supset P$.*

Demonstração: Dado $H \in K$, vamos supor que $H \Vdash \Box P$, isto é, dado $H' \in K$ tal que $H\mathcal{R}H'$ então $H' \Vdash P$. Como \mathcal{R} é reflexiva, $H\mathcal{R}H$, então $H \Vdash P$. \square

Proposição 3.17 *Seja $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo com a relação \mathcal{R} simétrica. Então para todo $H \in K$, $H \Vdash P \supset \Box \Diamond P$.*

Demonstração: Dado $H \in K$ tal que $H \Vdash P$, queremos mostrar que $H \Vdash \Box \Diamond P$ isto é, para todo $H' \in K$ tal que $H\mathcal{R}H'$ tem se $H' \Vdash \Diamond P$, ou seja existe $H'' \in K$ tal que $H'\mathcal{R}H''$ e $H'' \Vdash P$. Visto que \mathcal{R} é simétrico então $H'\mathcal{R}H$ e como por hipótese $H \Vdash P$ então basta tomar $H'' = H$. \square

Proposição 3.18 *Seja $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo com a relação \mathcal{R} simétrica e transitiva. Então para todo $H \in K$, $H \Vdash \Diamond P \supset \Box \Diamond P$.*

Demonstração: Seja $H \in K$ tal que $H \Vdash \Diamond P$. Pela proposição 3.8(2), queremos mostrar que $H \Vdash \Box \Diamond P$, isto é, para todo $H' \in K$ tal que $H\mathcal{R}H'$ tem se $H' \Vdash \Diamond P$, ou seja, existe $H'' \in K$ tal que $H'\mathcal{R}H''$ e $H'' \Vdash P$; vamos mostrar que de fato é esse o caso. Tome $H' \in K$ tal que $H\mathcal{R}H'$. Da hipótese temos que $H \Vdash \Diamond P$, ou seja, existe $H_1 \in K$ tal que $H\mathcal{R}H_1$ e $H_1 \Vdash P$. Pela simetria temos que $H_1\mathcal{R}H$. Pela transitividade, como $H_1\mathcal{R}H$ e $H\mathcal{R}H'$ segue que $H_1\mathcal{R}H'$. Por fim pela simetria novamente temos que $H'\mathcal{R}H_1$. Deste modo basta tomarmos $H'' = H_1$. \square

Utilizaremos essas propriedades para justificar a ordenação de alguns tipos de modelos modais. As variações que apresentaremos de sistemas de lógicas modais são: **K**, **D**, **T**, **K4**, **B** (também chamado sistema **brouweriano**), **S4** e **S5**. A seguir daremos uma definição que usamos para diferenciar em qual tipo de sistema uma fórmula é válida (quando estamos tratando de mais de um tipo ao mesmo tempo).

Definição 3.19 (L-Válida) Diremos que uma fórmula X é válida no modelo $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ se ela for verdadeira em todos os elementos de K . A fórmula X será válida em um frame se ela for válida em todo modelo baseado naquele frame. Diremos, quando necessário, que X é **L**-válida se, para uma classe de frames **L** (a classe é um conjunto de frames que compartilham de uma mesma propriedade), X é válida em todos os frames do tipo **L**.

Visto isso, diferenciaremos os *frames* a partir das propriedades de suas relações.

Definição 3.20 (Propriedade frame) Dado um frame (K, \mathcal{R}) . Teremos que o frame é:

1. reflexivo, se \mathcal{R} for reflexiva;
2. simétrico, se \mathcal{R} for simétrica;
3. transitiva, se \mathcal{R} for transitiva;
4. serial, se para cada $H \in K$ existe algum $H' \in K$ tal que $H\mathcal{R}H'$.

A tabela 3.1 mostra os tipos de *frames* e suas condições correspondentes. Em muitos casos vamos nos referir a propriedades da relação do modelo apenas dizendo seu tipo de estrutura, por exemplo, uma estrutura de modelo **S5** especifica que estamos tratando de uma relação que é de equivalência. Agora traremos uma ordenação para estas lógicas, onde uma lógica pode ser uma sub-lógica de outra. Isto se segue da seguinte maneira: se toda fórmula X que for **E**-válida é **F**-válida, então dizemos que **E** é uma sub-lógica de **F**.

Lógica	Propriedades do <i>frame</i>
K	sem condições
D	serial
T	reflexivo
B	reflexivo, simétrico
K4	transitivo
S4	reflexivo, transitivo
S5	reflexivo, simétrico, transitivo

Tabela 3.1: Algumas lógicas modais padrão.

Como vimos, a propriedade distributiva da necessidade sobre o conectivo “e”, $\Box(P \wedge Q) \supset (\Box P \wedge \Box Q)$, é válida para qualquer mundo possível em qualquer modelo; em outras palavras, esta fórmula é **K**-válida. O mesmo vale para as propriedades $(\Box P \wedge \Box Q) \supset \Box(P \wedge Q)$ e $\Box(P \supset Q) \supset (\Box P \supset \Box Q)$. Na proposição 3.15 vimos que $\Box P \supset \Box \Box P$ é válida em qualquer modelo com *frame* transitivo. Deste modo essa fórmula é **K4**-válida, **S4**-válida e **S5**-válida. Além disso, na proposição 3.16 vimos que $\Box P \supset P$ é **T**-válida, ou seja, essa fórmula é verdadeira para qualquer *frame* com relação reflexiva. Na proposição 3.17 vimos que $P \supset \Box \Diamond P$ é **B**-válida, isto é, válida para qualquer *frame* reflexivo e simétrico. Por fim vimos que na proposição 3.18 $\Diamond P \supset \Box \Diamond P$ é **S5**-válida, válida para qualquer *frame* com uma relação de equivalência. Notemos com isso que se uma fórmula é **K4**-válida então é **S4**-válida. Da mesma forma, **T** é sub-lógica de **B**, além de que **B** e **S4** são sub-lógicas de **S5**. Ainda, notemos que **K** é sub-lógica de todas as outras. Resta apenas conectarmos **D** com as outras lógicas. Para isso provemos o seguinte resultado.

Proposição 3.21 *Seja $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo. Se a relação \mathcal{R} é reflexiva, então o frame (K, \mathcal{R}) é serial.*

Demonstração: É imediato, uma vez que, dado $H \in K$, HRH pois \mathcal{R} é reflexiva, satisfazendo a propriedade de *frame* serial. \square

Deste modo, **D** é sub-lógica de **T**. Assim, podemos representar todos esses tipos de modelo em um diagrama; na figura 3.1, as setas ligam as sub-lógicas a suas correspondentes particularizações.

Sistemas axiomáticos modais

Nesta seção apresentaremos um tratamento sintático da lógica modal, dado através de axiomas que serão usadas para demonstração do teorema da completude poste-

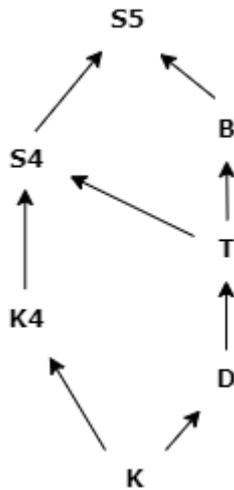


Figura 3.1: Diagrama de lógicas modais.

riormente. Conceitualmente, a sintática de uma lógica diz respeito ao que pode ser provado formalmente usando regras de um sistema dedutivo (regras de inferência, axiomas, etc.). Enquanto a semântica trata do que é verdade em todos os modelos possíveis da lógica (forma de interpretação da lógica).

O trabalho que se seguirá utilizará apenas os conectivos \neg, \wedge e \Box para formar as fórmulas, juntamente com as variáveis proposicionais, dado que o restante dos conectivos podem ser gerados a partir de uma combinação destes. Chamamos um cálculo modal proposicional de normal quando os seguintes axiomas e regras de inferência são válidos:

- A1) $\Box A \supset A$;
- A2) $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$;
- R1) Se $\vdash A$ e $\vdash A \supset B$ então $\vdash B$;
- R2) Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$.

Estas propriedades estruturam a lógica modal **T**. Adicionando mais alguns axiomas podemos formar outras lógicas modais, como **B**, **S4** e **S5**. Caso adicionemos o axioma

- A3) $\vdash \Box A \supset \Box \Box A$,

temos uma estrutura de lógica modal **S4**.

Caso adicionemos

- A4) $\vdash A \supset \Box \Diamond A$,

aos axiomas da lógica **T**, teremos uma estrutura de lógica modal **B**.

Caso adicionemos ambos axiomas, A3 e A4 aos axiomas da lógica **T** teremos uma estrutura de lógica modal **S5**.

Observemos que modelos **T** satisfazem as propriedades da lógica modal **T**, devido à sua reflexibilidade (propriedade semântica). O mesmo ocorre para modelos **S4** na lógica modal **S4**, e modelos **B** na lógica modal **B** (devidos às suas propriedades semânticas: transitividade e simetria, respectivamente, além da reflexiva). Consequentemente, um modelo **S5** satisfaz a lógica modal **S5** (propriedades semânticas: reflexiva, transitiva e simétrica).

Observemos que até agora podíamos estar tratando de modelos que possuem mundos que não são acessíveis a partir de nenhum mundo; estes mundos isolados não serão interessantes para o que se segue. Vamos definir um modelo conectado. Para isso definiremos fecho transitivo. Posteriormente apresentaremos uma forma diferente de observarmos o modelo, tratando-o como uma árvore, e o fecho transitivo será essencial para isso.

Definição 3.22 (Fecho transitivo) *O fecho transitivo \mathcal{R}^* de uma relação binária \mathcal{R} é a menor relação que contém \mathcal{R} e é transitiva.*

Definição 3.23 (Modelo conectado) *Diremos que um modelo $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ é conectado se, e somente se, para todo $H \in K$, tem se GR^*H .*

Apresentaremos agora a definição de fórmula satisfatível e um resultado importante, que utilizaremos para a construção de um método de demonstração de fórmulas para sistemas modais.

Definição 3.24 (Fórmula satisfatível) *Dado um modelo $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$, uma fórmula é dita satisfatível se é verdadeira em pelo menos um mundo possível, $H \in K$.*

Observemos que a negação de uma fórmula não válida é uma fórmula satisfatível e a negação de uma fórmula não satisfatível é uma fórmula válida.

Proposição 3.25 *Toda fórmula satisfatível possui um modelo conectado.*

Demonstração: Dado um modelo modal $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$, seja A uma fórmula satisfatível para o modelo \Vdash definido na estrutura de modelo (G, K, \mathcal{R}) . Sejam K' o conjunto de todos os $H \in K$ tais que GR^*H , \mathcal{R}' a restrição da relação \mathcal{R} a K' e \Vdash' o modelo \Vdash restrito a K' . Com isso temos o modelo modal $(G, K', \mathcal{R}', \Vdash')$. Dada sua

construção, temos que \Vdash' é conectado. Vamos mostrar por indução que, para quaisquer subfórmula B de A e $H \in K'$, tem-se $H \Vdash' B$ se e somente se $H \Vdash B$; com isso vai se seguir que se $G \Vdash A$ (\Vdash é um modelo para A) então $G \Vdash' A$, assim \Vdash' é um modelo para A .

Se B é uma fórmula atômica, temos o resultado a partir da construção de \Vdash' . Consideremos B uma fórmula a partir das subfórmulas C e D , como sendo $B = C \wedge D$ ou $B = \neg C$; a verificação segue das regras de \Vdash . Por exemplo, caso $H \Vdash C$ e $H \Vdash D$ por hipótese de indução, então $H \Vdash' C$ e $H \Vdash' D$, notemos então que se $H \Vdash (C \wedge D)$ ocorre $H \Vdash' (C \wedge D)$. Para $\Box C$, observemos que se $H \in K'$ e $HR'H'$ então $H' \in K'$. Visto que \mathcal{R}' é uma restrição de \mathcal{R} sobre K' e como $H, H' \in K'$ então HRH' . Logo, para $H \in K'$ e $H' \in K$, tem-se que HRH' se, e somente se, $HR'H'$. Agora vamos supor que, para $H' \in K'$, $H' \Vdash C$ se e somente se $H' \Vdash' C$. Lembremos que $H \Vdash \Box C$ se, e somente se, para todo $H' \in K$ tal que HRH' , $H' \Vdash C$; e da mesma forma $H \Vdash' \Box C$ se, e somente se, para todo $H' \in K'$ tal que $HR'H'$, $H' \Vdash' C$. Como vimos, se $H \in K'$, então para todo $H' \in K$ tal que HRH' tem-se $H' \in K'$, logo $H' \Vdash C$ se e somente se $H' \Vdash' C$, logo $H \Vdash \Box C$ se, e somente se, $H \Vdash' \Box C$. Ou seja, $H \Vdash \Box C$ se e somente se $H \Vdash' \Box C$. A partir disso, isto também é verdade para fórmulas mais complexas. Desta maneira temos que \Vdash' é um modelo para A . \square

Método de tabelas

Uma importante ferramenta semântica que será utilizada são as tabelas; a partir de regras de construção, verificaremos se uma fórmula é semanticamente válida. A seguir, apresentaremos definições para isso.

Definição 3.26 (Contramodelo) *Um contramodelo de uma fórmula A é um modelo em que A não é válida.*

Definição 3.27 (Fórmula válida) *Uma fórmula A é válida se não existirem contramodelos para ela.*

Observemos com isso que, equivalentemente à proposição 3, toda fórmula não válida possui um contramodelo conectado.

Para provar a validade de uma fórmula, tentaremos construir um contramodelo para ela; se falharmos nisso, chegando a um absurdo, a fórmula será válida. Na prática, é feito da seguinte forma: se a fórmula A é da forma $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \dots \vee B_n)$ então A_1, \dots, A_m precisam ser verdadeiras e B_1, \dots, B_n precisam ser falsas para qualquer contramodelo de A . Representamos isto colocando A_1, \dots, A_m na esquerda

e B_1, \dots, B_n na direita da tabela inicial da construção; isso representa uma tentativa de encontrar um modelo em que A_1, \dots, A_m são verdadeiras enquanto B_1, \dots, B_n são falsas. Assim, continuamos a construção da demonstração seguindo algumas regras que serão apresentadas. Antes disso precisamos definir dois conceitos fundamentais para aplicação das regras.

Definição 3.28 (Estágio inicial de construção) *Chamamos de estágio inicial de construção o passo em que colocamos A_1, \dots, A_m na coluna da esquerda e B_1, \dots, B_n na coluna da direita. O estágio em que a j -ésima regra de construção é aplicada é chamado de $j + 1$ -ésimo estágio.*

Definição 3.29 (Conjunto alternativo de tabelas) *Na construção da demonstração por tabelas, seguiremos, através das aplicações das regras, estágios de construção. Durante a construção, devido às regras de construção, podemos gerar diversas tabelas. Diremos que estas tabelas formam um conjunto de tabelas. Em cada estágio, uma tabela pode ser chamada de principal enquanto as outras são as auxiliares. Caso seja aplicada na construção uma determinada regra em que o processo linear de construção de tabelas divirja, cada um destes novos desenvolvimentos será chamado de conjunto alternativo de tabelas. O conjunto destes conjuntos alternativos será chamado de sistema de conjuntos alternativos de tabelas.*

Visto isso, as regras de construção são as seguintes:

1. Se $\neg A$ aparece na coluna da esquerda de uma tabela, coloque A na coluna da direita, figura 3.2;
2. Se $\neg A$ aparece na coluna da direita de uma tabela, coloque A na coluna da esquerda, figura 3.3;
3. Se $A \wedge B$ aparece na coluna da esquerda de uma tabela, coloque A e B na coluna da esquerda da tabela, figura 3.4;
4. Se $A \wedge B$ aparece na coluna da direita de uma tabela, existem duas alternativas: coloque A na coluna da direita ou coloque B na coluna da direita; nesse caso a tabela vai ser dividida em duas tabelas auxiliares, figura 3.5;

Detalhadamente, dada uma tabela t em um conjunto alternativo \mathcal{S} , se t possui a fórmula $A \wedge B$ na direita, nós substituímos \mathcal{S} por dois conjuntos alternativos, \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , onde $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{S} - \{t\}) \cup \{t_1\}$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{S} - \{t\}) \cup \{t_2\}$, onde t_1 e t_2 são iguais a t porém possuem A e B na direita, respectivamente. Além disso, precisamos

$$\begin{array}{c|c} \neg A & A \\ \hline t & \end{array}$$

Figura 3.2: Regra 1 de construção.

$$\begin{array}{c|c} A & \neg A \\ \hline t & \end{array}$$

Figura 3.3: Regra 2 de construção.

ter cuidado com a relação entre as tabelas nestes novos conjuntos alternativos. Dado que estamos considerando nossos modelos como sendo no mínimo **T**, todos que serão trabalhados serão no mínimo reflexivos, com isso em \mathcal{S} existe uma relação reflexiva \mathcal{R} ; definiremos as relações \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 nos conjuntos \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , respectivamente. Fazemos isto da seguinte forma: para \mathcal{S}_1 , sejam t' ou t'' quaisquer tabelas de \mathcal{S} diferentes de t . Temos que $t' \mathcal{R}_1 t_1$ se, e somente se, $t' \mathcal{R} t$ (no conjunto \mathcal{S}), $t_1 \mathcal{R}_1 t'$ se, e somente se, $t \mathcal{R} t'$, e $t' \mathcal{R}_1 t''$ se, e somente se, $t' \mathcal{R} t''$. Além disso, para fazer com que \mathcal{R}_1 seja reflexiva, nós impomos que $t_1 \mathcal{R} t_1$. Reproduzimos um processo análogo para \mathcal{S}_2 .

5. Se $\Box A$ aparece na coluna da esquerda de uma tabela t , então coloque A na coluna da esquerda de todas as tabelas t' tais que $t \mathcal{R} t'$, figura 3.6;
6. Se $\Box A$ aparece na coluna da direita da tabela t , então introduza uma nova tabela auxiliar t' tal que $t \mathcal{R} t'$ e que inicia colocando A na sua coluna da direita, figura 3.7.

Observemos como as regras são construídas para replicar a ideia de negação das fórmulas à direita da tabela. Por exemplo, na regra 4, temos que uma fórmula $A \wedge B$ é falsa, ou seja, A é falsa ou B é falsa, tornando assim necessária a criação de duas tabelas em que se negue uma de cada dessas fórmulas. Do mesmo modo a regra 5 está reproduzindo a fórmula $\Box A$, isto é, para toda tabela que se relaciona com a atual, temos que A é verdadeiro. A negação disto ocorre na regra 6, em que existe uma tabela que se relaciona com a atual, mas tem A falsa. Além disso, notemos a distinção entre relações: a notação \mathcal{R} será usada para relação entre tabelas, enquanto \mathcal{R} para os modelos.

3 Lógica Modal

$$\begin{array}{c|c} A \wedge B & \\ A & \\ B & \\ t & \end{array}$$

Figura 3.4: Regra 3 de construção.

$$\begin{array}{c|c} \cancel{A \wedge B} & \\ \cancel{t} & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} t_1 & \\ A \wedge B & \\ A & \\ A \wedge B & \\ B & \\ t_2 & \end{array}$$

Figura 3.5: Regra 4 de construção.

$$\begin{array}{c|c} \Box A & \\ A & \\ t_1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|c} A & \\ t_2 & \end{array}$$

Figura 3.6: Regra 5 de construção.

$$\begin{array}{c|c} \Box A & \\ t_1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|c} A & \\ t_2 & \end{array}$$

Figura 3.7: Regra 6 de construção.

Resta-nos definir como é concluída a demonstração pelo método de tabelas. Isso se dará a partir da seguinte definição.

Definição 3.30 (Tabela encerrada) *Uma tabela é dita encerrada (concluída, fechada) se, e somente se, uma fórmula A ocorre em ambas as colunas. O sistema de conjuntos alternativos de tabelas é dito fechado quando todos os conjuntos alternativos possuem uma tabela encerrada.*

Ou seja, a demonstração está finalizada quando chegamos a um absurdo, em que uma mesma fórmula é verdadeira e falsa. Além disso, dada a aplicação da regra de construção 4, uma construção com $A_1 \wedge \dots \wedge A_m$ na coluna da direita deve ser separada em conjuntos alternativos, neste caso dizemos que a construção é encerrada se e somente se chegarmos a um absurdo em uma tabela em todos os conjuntos alternativos.

Precisamos provar a equivalência entre as tabelas e os modelos, para que possamos afirmar que de fato estamos demonstrando fórmulas em modelos modais. Os próximos dois teoremas nos mostrarão que, dada uma fórmula A , a construção da demonstração por tabelas para A é concluída se, e somente se, A é válida em um modelo modal.

Teorema 3.31 *Se a construção da demonstração por tabelas para uma fórmula A é concluída então A é L-válida.*

Demonstração: Vamos provar por absurdo. Suponhamos que A não é L-válida. Então dada a estrutura (G, K, \mathcal{R}) existe um modelo \Vdash tal que $H \not\models A$ para um mundo $H \in K$. Mostraremos de forma indutiva que a construção semântica condiz logicamente com a construção do método de tabelas. Com isso, dada a hipótese de que a construção da tabela foi concluída, chegaremos que a construção semântica também o foi. Assim A deveria ser válida, o que supomos como hipótese que não é, chegando a um absurdo e concluindo nossa demonstração.

Vamos realizar essa indução através dos estágios da construção. Ou seja, para cada n -ésimo estágio de construção existe um conjunto alternativo \mathcal{S} da construção de tabelas e uma função α , que mapeia as tabelas de \mathcal{S} em elementos de K , satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Se B é uma fórmula ocorrendo à esquerda de t e $H' = \alpha(t)$, então $H' \Vdash B$;
2. Se B é uma fórmula ocorrendo à direita de t e $H' = \alpha(t)$, então $H' \not\models B$;
3. Se $t_1, t_2 \in \mathcal{S}$, $H_1 = \alpha(t_1)$ e $H_2 = \alpha(t_2)$, caso $t_1 \mathcal{R} t_2$ então $H_1 \mathcal{R} H_2$.

3 Lógica Modal

Para o caso inicial, estágio $n = 1$, temos apenas um tabela t com A na direita, uma vez que supomos A falso. Seja $\alpha(t) = H$; temos $H \not\models A$ (pois estamos tomando o modelo em que isso ocorre, que existe por hipótese, no começo da nossa demonstração), condizendo com a construção. Por hipótese indutiva, vamos assumir que as construções são condizentes até o k -ésimo estágio; então existem um conjunto alternativo \mathcal{S} no k -ésimo estágio e uma função α com as propriedades requeridas.

Vamos verificar o resultado para o estágio $(k + 1)$ da construção. Esta etapa será extraída da etapa anterior, através de alguma regra de construção que será aplicada a alguma tabela de um conjunto alternativo \mathcal{S}' no estágio k . Caso $\mathcal{S}' \neq \mathcal{S}$ então \mathcal{S} permanece imutável no estágio $(k + 1)$ e o passo indutivo se verifica naturalmente. Caso $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$, então a regra é aplicada para algum $t \in \mathcal{S}$.

Caso a regra 3 de construção tenha sido aplicada, então uma fórmula com estrutura $B \wedge C$ aparece na esquerda de t e por hipótese temos que nesse estágio, para $H' = \alpha(t)$, nós temos $H' \Vdash (B \wedge C)$. Deste modo, $H' \Vdash B$ e $H' \Vdash C$. Vendo agora a construção por tabela, temos $B \wedge C$ à esquerda na tabela t , e pela regra 3, colocamos B e C na esquerda de t . Observemos com isso que as propriedades de α são preservadas com a aplicação da regra de construção 3. O mesmo pode ser facilmente verificado para as regras de construção 1 e 2.

Caso a regra de construção 4 tenha sido aplicada então $B \wedge C$ aparece na direita de t e por hipótese temos que nesse estágio, para $H' = \alpha(t)$, nós temos $H' \not\models (B \wedge C)$. Logo, $H' \not\models B$ ou $H' \not\models C$. Semanticamente, substituiremos a tabela t por duas tabelas alternativas, t_1 e t_2 , onde na tabela t_1 temos B adicionado à direita e em t_2 temos C adicionado à direita. Tendo com isso dois novos conjuntos alternativos \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , com $H' = \alpha(t_1)$ e $H' = \alpha(t_2)$, respectivamente. Se $H' \not\models B$ então o conjunto \mathcal{S}_1 satisfaz as propriedades de α ; do mesmo modo, se $H' \not\models C$, o conjunto \mathcal{S}_2 satisfaz as propriedades.

Caso a regra de construção 5 tenha sido aplicada à tabela t com $\Box B$ na esquerda de t , então no estágio $(k + 1)$ colocamos B à esquerda de cada tabela t' tal que $t \mathcal{R} t'$. Sintaticamente, por hipótese temos $H' \Vdash \Box B$, logo para todo $H'' \in K$ tal que $H' \mathcal{R} H''$, nós temos $H'' \Vdash B$. Notemos que se $\alpha(t') = H''$ então a propriedade 3 de α continua sendo verdadeira para este caso.

Caso a regra de construção 6 tenha sido aplicada à tabela t tem-se $\Box B$ na direita, temos por hipótese que $H' \not\models \Box B$, com $H' = \alpha(t)$. Segundo a regra 6 adicionamos a tabela t' , de modo que $t \mathcal{R} t'$ e B está na direita de t' . Pela definição 3.6, como $H' \not\models \Box B$, por definição existe $H'' \in K$ tal que $H' \mathcal{R} H''$, e $H'' \not\models B$. Com isso estendamos α nesse

$(k + 1)$ -ésimo estágio de modo que $\alpha(t') = H''$. Com isso todas as propriedades de α são satisfeitas.

Por fim, resta-nos verificar se dado um par de tabelas t e t' tais que $t \mathcal{R} t'$ tem-se $H' \mathcal{R} H''$ com $H' = \alpha(t)$ e $H'' = \alpha(t')$. Como as hipóteses sobre a relação \mathcal{R} (reflexividade, simetria e transitividade) entre tabelas são as mesmas que para a relação \mathcal{R} para o modelo $(G, H, \mathcal{R}, \Vdash)$, esta condição segue naturalmente.

Com isso, verificamos que a construção semântica e o método de tabelas são coerentes em uma demonstração com n passos, gerada a partir das suas regras. Como por hipótese a construção é encerrada, em algum estágio, todos os conjuntos alternativos contêm uma tabela em que alguma fórmula ocorre na esquerda e na direita. Consequentemente esse estágio contém um conjunto \mathcal{S} , uma função α relacionada à estrutura (G, K, \mathcal{R}) e ao modelo \Vdash , como descrito no início de nossa demonstração e α satisfazendo as propriedades dadas anteriormente. Deste modo, temos $t \in \mathcal{S}$ com uma fórmula B na esquerda e na direita. Visto que se $H = \alpha(t)$, como B ocorre em ambos os lados de t , temos $H \Vdash B$ e $H \not\Vdash B$, um absurdo (semântico)! Portanto temos que A é válida. \square

O lema que se segue será utilizado na demonstração do próximo teorema. Ele, bem como a demonstração do seguinte teorema em si, é uma prévia do capítulo posterior, no qual trataremos o modelo como uma árvore.

Definição 3.32 (ω -árvore) *Seja T um conjunto parcialmente ordenado pela relação \leq . Dizemos que T é uma ω -árvore se:*

1. T é um conjunto infinito;
2. para cada $y \in T$, o conjunto $\{x \in T : x < y\}$ é finito e totalmente ordenado por \leq ;
3. todos os níveis de T são finitos.

Diremos que o nível n de uma ω -árvore T é o conjunto de todos os $y \in T$ tais que o conjunto $\{x \in T : x < y\}$ possui n elementos.

O lema a seguir é um importante resultado da teoria dos Grafos.

Proposição 3.33 (Lema de König) *Se T é uma ω -árvore, então T possui um caminho infinito.*

Demonstração: Dado $x_i \in T$, temos que x_i pertence a algum nível da árvore; denotaremos este nível por $Niv_i(T)$. Tomemos $x_0 \in Niv_0(T)$ de modo que o conjunto $\{y \in T : x_0 \leq y\}$ é infinito, isto é possível, dado que T é uma ω -árvore, pois $Niv_0(T)$ é

finito, T é infinito e todo elemento de T é comparável (em relação a ordem \leq) a algum elemento de $Niv_0(T)$. Do mesmo modo, indutivamente pegamos $x_n \in Niv_n(T)$ de modo que para cada n , $x_{n+1} > x_n$ e $\{y \in T : x_{n+1} \leq y\}$ é infinito. Deste modo, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um caminho infinito em T . \square

Teorema 3.34 *Se A é válida então a construção da demonstração por tabelas para A é concluída.*

Demonstração: Faremos a demonstração deste teorema pela sua contrapositiva, isto é, dado que a construção para a fórmula A não é concluída provaremos que A não é válida. Para isso apresentaremos um contramodelo para A , visto a definição 3.27 sobre fórmula válida.

Uma importante observação para esta demonstração é o fato de que podemos tratar o sistema de conjuntos alternativos como uma árvore, sendo a relação presente entre os conjuntos alternativos a relação de descendência (neste ponto adiantaremos brevemente nossa discussão da próxima seção, onde na definição 3.36 apresentamos o conceito de árvore). Esta relação se dá da seguinte forma: no n -ésimo estágio de construção, uma regra é aplicada sobre uma tabela em um conjunto alternativo \mathcal{S} , podendo ou não afetá-la. Caso nada ocorra com esta tabela t , diremos que t no estágio $(n+1)$ é descendente de t no estágio n , e o mesmo vale para seu conjunto alternativo \mathcal{S} . Caso a regra aplicada à tabela modifique-a, teremos o mesmo comportamento de descendência para este conjunto alternativo; caso a regra aplicada à tabela t gere duas novas tabelas t_1 e t_2 , diremos que estas novas tabelas são descendentes de t ; o mesmo vale para seus conjuntos alternativos.

A seguir dividiremos nossa demonstração em casos. Para uma construção que não foi encerrada temos o caso desta ser finita ou infinita. Vamos primeiro para o caso finito.

Como esta construção não encerrada é finita, tomaremos o conjunto alternativo mais recente na etapa de construção, \mathcal{S}_0 , e construiremos um contra modelo para A com ele. Seja (G, K, \mathcal{R}) a estrutura de modelo dada por $K = \mathcal{S}_0$, $G \in K$ sendo G a tabela principal de K e $\mathcal{R} = \mathfrak{K}$ a relação que ordena tabelas. Seja \Vdash um modelo que operará da seguinte maneira: dada uma fórmula atômica P , temos que P ocorre à esquerda de uma tabela $t \in K$ se, e somente se, $t \Vdash P$; P ocorre à direita de t se, e somente se, $t \not\Vdash P$.

Vamos mostrar agora que este modelo está bem definido. Sejam B e C fórmulas atômicas. Caso tenhamos B na esquerda ou na direita de t temos por atomicidade, que este segue a definição. Caso ocorra $\neg B$ na esquerda de t , como estamos no

último estágio de construção, todas as regras já foram aplicadas; assim, pela regra de construção 1 temos B na direita de t , logo no nosso modelo $t \not\models B$, o que era esperado. Se $\neg B$ aparece na direita de t então pela regra 2 temos B na esquerda de t ; assim, pelo nosso modelo, $t \models B$, o que é coerente. Para $B \wedge C$ na esquerda de t temos pela regra 3 que B e C ocorrem na esquerda de t , assim pelo modelo $t \models B$ e $t \models C$; desta forma, por definição, $t \models B \wedge C$, o que era esperado. Se $B \wedge C$ ocorrem na direita de t então pela regra 4 a existência de uma tabela t_1 com B na direita ou uma tabela t_2 com C na direita, pelo nosso modelo, para t_1 , $t_1 \not\models B$, e para t_2 , $t_2 \not\models C$, o que é coerente. Caso tenhamos $\Box B$ na esquerda de t temos, pela regra 5, B na esquerda de todas as tabelas t' tais que $t \mathcal{R} t'$, para estas tabelas temos pelo modelo que $t' \models B$, logo pela regra sintática $t \models \Box B$, o que era esperado. Por fim, caso tenhamos $\Box B$ na direita de t , temos pela regra 6 que existe uma tabela t' tal que $t \mathcal{R} t'$ onde B está na direita; pelo nosso modelo, tem-se que $t' \not\models B$, assim, pela regra sintática, $t \not\models \Box B$, o que é coerente. Dada a demonstração para fórmulas atômicas, a coerência do modelo para fórmulas mais complexas segue. Portanto o modelo construído está bem definido.

Como esta é uma construção para A , ela foi iniciada com A na direita, desta forma temos que neste último estágio de construção A ainda se encontra na direita da tabela principal de \mathcal{S}_0 . Logo $G \not\models A$. Ou seja, \models é um contramodelo para A . Isso completa o caso finito.

Para o caso infinito, aplicaremos o lema de König, 3.33, isto é, temos um ramo infinito de conjuntos alternativos na árvore. Chamaremos esta sequência de α . Para construção de um contramodelo para A , definiremos pseudotabelas.

Definição 3.35 (Pseudotabela) *Dá-se o nome de pseudotabela, a uma sequência de tabelas que se inicia com uma tabela de um conjunto alternativo \mathcal{S}_n e é estendida com as respectivas tabelas descendentes imediatas. A única pseudotabela que contém o primeiro conjunto alternativo da construção é chamada de pseudotabela principal. Dada uma tabela $t \in \mathcal{S}_n$ que pertença a pseudotabela τ , diremos que t é um representante de τ em \mathcal{S}_n .*

E com isso definiremos uma relação entre pseudotabelas: dados duas pseudotabelas τ_1 e τ_2 de α , dizemos que estas se relacionam, $\tau_1 \rho \tau_2$, se, e somente se, existe um \mathcal{S}_m com representantes t_1 e t_2 de τ_1 e τ_2 em \mathcal{S}_m tais que $t_1 \mathcal{R} t_2$.

Afirmção: Se \mathcal{R} é reflexiva, transitiva ou simétrica, então ρ também é.

Reflexiva: caso \mathcal{R} seja reflexiva, dado t representante de τ em \mathcal{S}_n , como \mathcal{R} é reflexiva então $t \mathcal{R} t$; deste modo, $\tau \rho \tau$ pela definição. Deste fato segue que ρ é reflexiva.

Simétrica: se $\tau_1 \rho \tau_2$ então, existe \mathcal{S}_m , com t_1 e t_2 de τ_1 e τ_2 tais que $t_1 \mathcal{R} t_2$; como \mathcal{R} é

simétrica, $t_2 \mathcal{R} t_1$. Ou seja, $\tau_2 \rho \tau_1$. Logo ρ é simétrica.

Transitiva: por fim, se $\tau_1 \rho \tau_2$ e $\tau_2 \rho \tau_3$ então, existem \mathcal{S}_m e \mathcal{S}_n , sendo representantes t_1 e t_2 de τ_1 e τ_2 pertencentes a \mathcal{S}_m tais que $t_1 \mathcal{R} t_2$; t_2 e t_3 de τ_2 e τ_3 pertencentes a \mathcal{S}_n tais que $t_2 \mathcal{R} t_3$. Como \mathcal{R} é transitiva então $t_1 \mathcal{R} t_3$. Sem perda de generalidade, suponha $n \geq m$. Logo $t_1, t_3 \in \mathcal{S}_n$, ou seja, $\tau_1 \rho \tau_3$. Portanto ρ é transitiva. \diamond

Agora definiremos o que é uma fórmula estar na esquerda, ou na direita, de uma pseudotabela. Dada uma pseudotabela $\tau : t, t', t'', \dots$, temos que uma fórmula B ocorre na esquerda de τ se, e somente se, B ocorre na esquerda de alguma tabela que é termo da sequência τ ; uma fórmula B está na direita de τ se, e somente se, B ocorre na direita de alguma tabela que é termo da sequência τ .

Afirmção: Dada sua definição, as pseudotabelas seguem as regras de construção.

Começemos com a regra 1. Dada uma fórmula $\neg B$ na esquerda de uma pseudotabela τ , temos por definição que $\neg B$ está na esquerda de alguma tabela t em τ ; esta fórmula segue na esquerda de seus sucessores na sequência. Em algum estágio da construção a regra 1 é aplicada, supomos que na tabela t' . Com isso passamos a ter B na direita de t'' , logo B está na direita de τ . Notemos que para a regra 2 é análogo.

Analisemos a regra 3. Dada uma fórmula $B \wedge C$ na esquerda de τ , temos que $B \wedge C$ está na esquerda de alguma tabela t em τ ; esta fórmula segue na esquerda de seus sucessores. Posteriormente na construção a regra 3 é aplicada em alguma tabela, supomos que t' , assim B e C estão na esquerda de t'' , logo B e C estão na esquerda de τ .

Para regra 4, dada uma fórmula $B \wedge C$ na direita de τ , temos que $B \wedge C$ está na direita de alguma tabela t em τ ; esta fórmula segue na direita de seus sucessores. Em algum estágio da construção a regra 4 é aplicada, supomos que na tabela t' . Com isso passamos a ter B ou C na direita de t'' , logo B ou C estão na direita de τ .

Seguiremos para a regra 5. Dada uma fórmula $\Box B$ na esquerda de τ , temos que $\Box B$ está na esquerda de alguma tabela t em τ ; esta fórmula segue na esquerda de seus sucessores. Deste modo, em algum estágio de construção a regra 5 é aplicada, supomos que na tabela t' , assim, B ocorre na esquerda de todas as tabelas t'' tais que $t' \mathcal{R} t''$. Desta forma para as pseudotabelas τ' que têm as tabelas iniciais t'' temos que $\tau \rho \tau'$ com B na esquerda de todas τ' .

Por fim, para a regra 6, dada uma fórmula $\Box B$ na direita de τ , temos que $\Box B$ está na direita de alguma tabela t em τ ; esta fórmula segue na direita de seus sucessores. Em algum estágio da construção a regra 6 é aplicada, supomos que na tabela t' . Com isso introduz-se uma nova tabela t'' tal que $t' \mathcal{R} t''$ iniciando-a com B na direita. Esta nova tabela t'' é tabela inicial de uma pseudotabela τ' . Logo pela relação entre

tabelas, tem-se $\tau\rho\tau'$, onde B está na direita da pseudotabela τ' . Com isso finalizamos nossa afirmação. \diamond

Afirmação: Uma fórmula B não pode ocorrer em ambos os lados de τ .

Vamos supor por absurdo que uma fórmula B ocorra em ambos os lados de τ . Deste modo temos que na sequência de tabelas que compõem τ , uma tabela t possui B na esquerda e uma tabela \tilde{t} possui B na direita. Da definição de pseudotabelas, uma das tabelas é predecessora da outra (não necessariamente imediatas), com isso a tabela posterior na sequência apresentará B em ambos os lados. Deste modo esta tabela se daria por encerrada. Mas como uma tabela encerrada não tem descendentes e τ é infinita então τ não pode possuir esta tabela, contrariando nossa hipótese. Deste modo nenhuma fórmula pode ocorrer em ambos os lados de uma pseudotabela. \diamond

Visto isso, construiremos nosso contramodelo a partir da seguinte estrutura: sejam K o conjunto de pseudotabelas de α , G a pseudotabela principal e $\mathcal{R} = \rho$ a relação entre pseudotabelas. Além disso, seja \Vdash um modelo que operará de maneira semelhante ao caso finito já demonstrado: dado uma fórmula atômica P , temos que P ocorre à esquerda de uma tabela t se, e somente se, $t \Vdash P$; P ocorre à direita de t se, e somente se, $t \not\Vdash P$.

Resta-nos mostrar que o modelo está bem definido, porém esta parte é análoga à demonstração do caso finito e será omitida. Assim, como esta é uma construção para A , ela foi iniciada com A na direita, desta forma temos que A se encontra na direita da pseudotabela principal. Logo $G \not\Vdash A$, isto é, \Vdash é um contramodelo para A , finalizando nossa demonstração. \square

Com isso, mostramos que, de fato, ao realizarmos a demonstração por tabelas estamos provando fórmulas em modelo modal. Desta forma as relações, entre mundos e entre tabelas, devem ser coerentes em suas propriedades, ou seja, preservando reflexividade, simetria e transitividade, dependendo do tipo de modelo. Com este conceito fundamentado podemos prosseguir na demonstração do teorema da completude.

Tratando modelos como árvores

Nessa seção, definiremos melhor o conceito de árvore que será usado para a demonstração do teorema da completude. Alteraremos as regras de construção para se adaptarem às características de árvore e apresentaremos algumas definições importantes para nosso objetivo final.

Começemos pela definição formal de árvore; já apresentaremos este conceito com

uma estrutura de fácil adaptação para a estrutura do modelo.

Definição 3.36 (Árvore) Damos o nome de árvore à tripla (G, K, S) , onde K é um conjunto, $G \in K$ e S é uma relação binária definida sobre K . Chamaremos G de origem, ou raiz, caso:

- não exista $H \in K$ tal que HSG ;
- para todo $H \in K$ exceto G , existe um único H' tal que $H'SH$;
- para todo $H \in K$, GS^*H .

Se HSH' diremos que H é o predecessor de H' em relação a S . K pode ser visto como o domínio de S , e G é o único elemento de K que não possui predecessor. Caso existam G , S e K nessas condições chamaremos S de relação de árvore.

Com essa definição adaptaremos os sistemas de modelos para árvores. Para isso usaremos a relação \mathcal{R} , relacionando-a com S . Diremos que uma estrutura de modelo (G, K, \mathcal{R}) é uma estrutura de modelo em árvore se existir uma relação S tal que (G, K, S) é uma árvore e \mathcal{R} é a menor relação que contém S e possui a propriedade requerida do modelo (reflexiva; simétrica; transitiva). Notemos que uma estrutura de modelo **S4** pode ser uma estrutura de modelo em árvore **S4**, mas não ser uma estrutura de modelo em árvore **T**, pois \mathcal{R} pode não ser a menor relação que contém S de modo a ser somente reflexiva; para os outros casos de modelos isso também pode ocorrer. Além disso, notemos que todas as estruturas de modelo em árvore são conectadas, pois para cada $H \in K$, GS^*H e como $S \subset \mathcal{R}$ segue que $S^* \subset \mathcal{R}^*$, dado que $S \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}^*$ e S^* é a menor relação transitiva que contém S . Logo, para todo $H \in K$, GR^*H .

Dada a equivalência entre modelo e tabelas, como apresentado na demonstração do teorema 3.34, cada conjunto alternativo ordenado pelos estágios de construção na demonstração por tabelas possui uma estrutura de árvore. Pois, dado um conjunto alternativo \mathcal{S} a partir de um estágio de construção e t um descendente da tabela principal, diremos que $t_1, t_2 \in K$ se relacionam através de S , t_1St_2 , se, e somente se, em algum estágio k da construção existe uma tabela t'_1 , descendente de t_1 (isto é, a tabela t'_1 é a tabela t_1 em algum estágio $n > k$), com $\Box A$ na direita e com t'_2 , descendente de t_2 , sendo introduzida pela regra de construção 6, ou seja, $t'_1Rt'_2$. Visto isso, do modo que foi construído, (t, \mathcal{S}, S) é uma árvore, pois: não existe $t' \in \mathcal{S}$ tal que $t'St$, dado que este é um descendente da tabela principal; para todo $t' \in \mathcal{S}$ com $t' \neq t$ existe um único t'' tal que $t''St'$, isto ocorre devido a formulação

das regras de construção; para todo $t' \in \mathcal{S}$ tem-se $t\mathcal{S}^*t'$ visto que as estruturas de modelo em árvore são conectadas.

Pela equivalência entre tabelas e modelos, apresentada no teorema 3.34, a relação \mathcal{R} é a menor relação entre tabelas que contém \mathcal{S} e satisfaz as condições impostas pelo modelo em questão (reflexividade; simetria; transitividade), dado que isto ocorre com a relação \mathcal{R} , do modelo modal. Ou seja, $(t, \mathcal{S}, \mathcal{R})$ é uma estrutura de modelo em árvore gerada pela árvore $(t, \mathcal{S}, \mathcal{S})$.

Dadas estas considerações, as regras de construção serão modificadas em termos da relação de árvore \mathcal{S} . Começemos observando que uma construção feita em termos de \mathcal{S} tem as regras de construção 1, 2 e 3 inalteradas. A regra 4 sofre pequenas alterações:

1. “ \mathcal{R} ” é substituído por “ \mathcal{S} ” (além disso “ \mathcal{R}_1 ” por “ \mathcal{S}_1 ” e “ \mathcal{R}_2 ” por “ \mathcal{S}_2 ”);
2. Removemos a condição imposta para que \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sejam reflexivas.

A regra 5 sofre muitas alterações em relação ao tipo de sistema empregado. Para o modelo do tipo **T**, onde a relação \mathcal{R} é reflexiva, temos que se $\Box A$ é verdadeiro em um mundo então A é verdadeiro neste mesmo mundo. Desta maneira usamos a regra 5 da seguinte forma:

- Dado $\Box A$ na esquerda de t_1 , colocamos A na esquerda de t_1 e na esquerda de quaisquer tabelas t_2 tais que $t_1\mathcal{S}t_2$.

Caso o sistema seja **S4**, temos que \mathcal{R} é reflexiva e transitiva. Baseado no fato de que $t \Vdash \Box A$ e $t\mathcal{R}t'$ então $t' \Vdash \Box A$ (Por absurdo, se $t' \not\Vdash \Box A$ então existe t'' tal que $t'\mathcal{R}t''$ onde $t'' \not\Vdash A$. Como \mathcal{R} é transitiva então $t\mathcal{R}t''$, logo $t'' \Vdash A$, pois como hipótese $t \Vdash \Box A$, chegando a uma contradição). A regra 5 é alterada para:

- Se $\Box A$ ocorre na esquerda de t_1 , coloquemos A na esquerda de t_1 e $\Box A$ na esquerda de quaisquer t_2 tal que $t_1\mathcal{S}t_2$.

Dadas as tabelas descritas na regra, seja uma tabela t_3 tal que $t_2\mathcal{S}t_3$; como $\Box A$ está na esquerda de t_2 , pela regra 5, colocamos A na esquerda de t_2 e $\Box A$ na esquerda de t_3 . Desta forma, temos transitivamente que se $t_1 \Vdash \Box A$, $t_1\mathcal{S}t_2$ e $t_2\mathcal{S}t_3$ então $t_3 \Vdash \Box A$.

Para o sistema **B**, \mathcal{R} é reflexiva e simétrica, com isso temos a seguinte regra:

- Caso $\Box A$ esteja na esquerda de t_1 , então coloquemos A na esquerda de t_1 , A na esquerda de cada t_2 tal que $t_1\mathcal{S}t_2$ e A na esquerda da única tabela anterior t_3 tal que $t_3\mathcal{S}t_1$, caso esta exista.

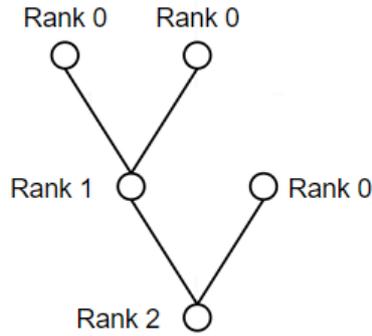


Figura 3.8: Árvore exemplo para definição de *rank*.

Para **S5**, dado que \mathcal{R} é uma relação de equivalência, a regra 5 é a combinação das alterações para os sistemas **S4** e **B**.

Por fim a regra de construção 6 mantém sua forma original, apenas substituindo “ \mathcal{R} ” por “ \mathcal{S} ”.

As definições a seguir tratarão de nomenclaturas para construção de tabelas; estas serão utilizadas no lema para o teorema da completude. Começemos pela definição de *rank*, que pode ser parecido com a definição de nível em um primeiro momento, mas possui diferenças fundamentais. Para o nível seguimos a valoração em relação a raiz da árvore, já para o *rank* teremos a valoração dos pontos sendo atribuídas a partir dos extremos em relação a raiz.

Definição 3.37 (Rank) O rank de uma tabela t é dado da seguinte forma: uma tabela t tem rank 0 na árvore se não existe tabela t' tal que tSt' . Do contrário, sejam t_1, \dots, t_n todas as tabelas t_i tais que tSt_i . Definamos $rank(t) = \max\{rank(t_i) : 1 \leq i \leq n\} + 1$.

Esta definição recursiva permite examinarmos a estrutura de árvores finitas; a figura 3.8 é um exemplo para melhor visualização. A próxima definição trata do caso em que nos referimos à fórmula de uma tabela em um determinado estágio de construção.

Definição 3.38 (fórmula associada) A fórmula associada a uma tabela t em um estágio de construção é $A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge \neg B_1 \wedge \dots \wedge \neg B_n$, onde A_1, \dots, A_m ocorrem na esquerda e B_1, \dots, B_n ocorrem na direita da tabela t no respectivo estágio de construção.

Já a fórmula característica será sobre uma tabela e as tabelas com as quais ela tem relação, levando em conta o *rank* destas tabelas.

Definição 3.39 (fórmula característica) A fórmula característica de uma tabela t em um estágio de construção é dada por uma indução no rank de t : se t tem rank 0, a fórmula

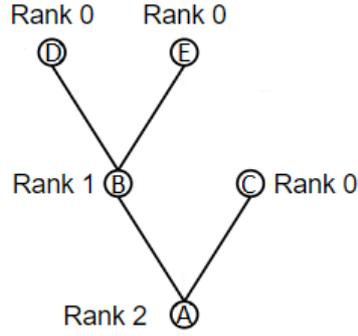


Figura 3.9: Árvore exemplo para definição de fórmula característica.

característica é a fórmula associada. Se $\text{rank}(t) > 0$, sejam t_1, \dots, t_n todas as tabelas t_i tais que tSt_i . Para cada t_i , o $\text{rank}(t_i) < \text{rank}(t)$, dado que a fórmula característica de t_i já foi definida, sejam B_i a fórmula característica de t_i e A a fórmula associada a t ; temos então que a fórmula característica de t é dada por $A \wedge \diamond B_1 \wedge \dots \wedge \diamond B_n$.

Deste maneira recursiva com o rank geramos a fórmula característica de uma tabela. Observemos a aplicação do conectivo possibilidade, dado o fato de poder existir uma tabela t_1 com a fórmula B que possui relação com a tabela analisada t com a fórmula A , gerando assim a fórmula característica $A \wedge \diamond B$. Para melhor entendimento faremos um exemplo tratando das fórmulas características.

Exemplo 3.40

Neste exemplo temos a árvore da figura 3.9, onde nas folhas ($\text{rank } 0$), as fórmulas associadas são C, D e E . Além disso, B é a fórmula associada de uma tabela de $\text{rank } 1$ e A é a fórmula associada da tabela principal, que tem $\text{rank } 2$, como já vimos na figura 3.8. Com isso a fórmula característica da tabela principal é $A \wedge \diamond(B \wedge \diamond D \wedge \diamond E) \wedge \diamond C$. Ajudaria pensar primeiramente no nó da árvore que tem fórmula associada B . Temos que sua fórmula característica é $B \wedge \diamond D \wedge \diamond E$. Agora analisamos a árvore por completo e atribuímos a fórmula característica do ponto que possui B como se $B \wedge \diamond D \wedge \diamond E$ fosse sua fórmula associada, gerando assim a fórmula final $A \wedge \diamond(B \wedge \diamond D \wedge \diamond E) \wedge \diamond C$.

Resta-nos levar em consideração conjuntos alternativos; seu próprio nome já sugere como será a elaboração de sua fórmula característica: dado que são conjuntos alternativos, usaremos o conectivo “ou” entre suas fórmulas características.

Definição 3.41 (fórmula característica de conjuntos alternativos) *Sejam D_1, \dots, D_n fórmulas características de conjuntos alternativos de um sistema de conjuntos alternati-*

vos de tabelas em um estágio de construção. Então a fórmula característica deste sistema é definida como $D_1 \vee \dots \vee D_n$.

Tendo visto estas definições, temos todas as ferramentas para demonstrar o teorema da completude.

Teorema da Completude

Finalmente chegamos ao objetivo deste trabalho para lógica modal, o teorema da completude. Este teorema faz a ponte entre sintaxe e semântica, de modo que mostra a equivalência entre validade de fórmulas (semântica) e demonstrabilidade de fórmulas (sintática). Separaremos a equivalência do teorema em suas duas implicações.

A seguir teremos um lema que encurtará a demonstração da implicação da ida do teorema; o símbolo \vdash indica que o que se segue é demonstrável.

Lema 3.42 *Se A_0 é a fórmula característica do estágio inicial de uma construção e B_0 é a fórmula característica de um estágio qualquer, então $\vdash A_0 \supset B_0$.*

Demonstração: Vamos demonstrar este lema através da prova de que a fórmula característica de um estágio m implica a fórmula característica de um estágio $m + 1$. Pois, deste fato, chegamos recursivamente que a fórmula do estágio inicial implica a fórmula de um estágio qualquer.

Considerando os conjuntos alternativos, temos que a fórmula característica no estágio m é da forma $D_1 \vee \dots \vee D_j \vee \dots \vee D_n$, dada a definição 3.41. Observemos que podemos manter nossa atenção apenas no conjunto alternativo que é modificado na passagem do estágio m para o $m + 1$, pois os outros se manterão iguais. Existem duas possibilidades para a fórmula característica no estágio $m + 1$ considerando que apenas um conjunto sofreu influência de uma regra de construção, estas são: $D_1 \vee \dots \vee D'_j \vee \dots \vee D_n$ e $D_1 \vee \dots \vee D'_{j_1} \vee D'_{j_2} \vee \dots \vee D_n$ (a segunda fórmula é proveniente da aplicação da regra de construção 4, que gera duas novas tabelas). Então precisamos mostrar apenas que $D_j \supset D'_j$ ou $D_j \supset D'_{j_1} \vee D'_{j_2}$.

Vamos mostrar que é possível concentrar mais ainda nosso foco para a análise dessa implicação. Mostraremos que na fórmula característica do conjunto alternativo em questão, basta observar a fórmula que sofre modificação pela regra de construção, semelhante ao que acabamos de concluir com os conjuntos alternativos. Para isso, observemos a forma da fórmula característica do conjunto alternativo D_j no estágio m :

$$B \wedge \diamond(C_1 \wedge \diamond(E_1 \wedge \diamond(\dots))) \wedge \diamond(C_2 \wedge \diamond(E_2 \wedge \diamond(\dots))).$$

Nesta forma, estruturada da definição 3.39, podemos ver B , que é a fórmula associada à tabela inicial do conjunto alternativo, C_1 e C_2 as fórmulas associadas de tabelas que se relacionam à tabela inicial, E_1 e E_2 as fórmulas associadas de tabelas que se relacionam com as que se relacionam com a tabela inicial, e assim por diante.

Para os próximos passos desta demonstração precisaremos de algumas implicações auxiliares. Por exemplo, se uma fórmula C_1 sofre modificação, e tivermos provado que $\vdash C_1 \supset C'_1$, onde C'_1 é a fórmula no estágio $m + 1$, precisaremos mostrar que

$$\vdash B \wedge \diamond C_1 \wedge \diamond(E_1 \wedge \diamond(\dots)) \supset B \wedge \diamond C'_1 \wedge \diamond(E_1 \wedge \diamond(\dots)),$$

assim demonstrando que $D_j \supset D'_j$.

Para isso notemos que, dadas fórmulas X e Y tais que $\vdash X \supset Y$, então pela regra de inferência R2 do modelo, temos $\vdash \Box(X \supset Y)$. Observemos que, para todos os sistemas de modelos que consideramos, com a relação sendo pelo menos reflexiva, temos que:

Afirmção: $\vdash \Box(X \supset Y) \supset (\diamond X \supset \diamond Y)$.

Demonstraremos esta afirmação através dos axiomas presentes no início do capítulo de sistemas axiomáticos modais, para uma leitura mais fluida colocamos entre parênteses os axiomas usados. Pelo axioma A1 ($\Box A \supset A$), tem-se $\vdash X \supset Y$, o que (pela contrapositiva) é equivalente a $\vdash (\neg Y) \supset (\neg X)$. Assim, decorre de R2 (se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$) que $\vdash \Box((\neg Y) \supset (\neg X))$, e então por A2 ($\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$) e R1 (se $\vdash A$ e $\vdash A \supset B$ então $\vdash B$) tem-se $\vdash (\Box \neg Y) \supset (\Box \neg X)$. Pela contrapositiva, obtemos então $\vdash (\neg \Box \neg X) \supset (\neg \Box \neg Y)$, isto é, $\vdash (\diamond X) \supset (\diamond Y)$. \diamond

Logo $\vdash \diamond X \supset \diamond Y$. Além disso, podemos afirmar que $\vdash X \supset Y$ implica $\vdash (X \wedge Z) \supset (Y \wedge Z)$. Com isso, podemos a partir da implicação $\vdash C_1 \supset C'_1$ construir a fórmula característica dos conjuntos alternativos D_j e D'_j . Dado $\vdash C_1 \supset C'_1$ temos que

$$\vdash \diamond C_1 \supset \diamond C'_1,$$

e com isso

$$\vdash \diamond C_1 \wedge \diamond(E_1 \wedge \diamond(\dots)) \supset \diamond C'_1 \wedge \diamond(E_1 \wedge \diamond(\dots)).$$

Deste modo,

$$\vdash B \wedge \diamond C_1 \wedge \diamond(E_1 \wedge \diamond(\dots)) \supset B \wedge \diamond C'_1 \wedge \diamond(E_1 \wedge \diamond(\dots)).$$

Obtendo assim, que $D_j \supset D'_j$. Portanto justificamos por que podemos apenas observar a fórmula influenciada pela regra de construção na passagem do estágio m para

o $m + 1$.

Visto isso vamos justificar o porque é válida a implicação de uma fórmula do estágio m para o $m+1$ através das possíveis regras de construção que podem ser aplicadas a esta fórmula. Para isso separaremos em casos:

Regra de construção 1: Se a regra 1 foi aplicada então temos $\neg A$ do lado esquerdo da tabela, e com a regra, colocamos A no lado direito. Assim a fórmula associada a este estágio é dada por $X \wedge \neg A \wedge \neg(A)$, onde X é o restante das fórmulas na tabela (se existirem). Notamos com isso que a fórmula associada não é um absurdo. Isto é justificado pela implicação $\vdash \neg A \supset \neg A$.

Regra de construção 2: Dado que a regra 2 foi aplicada, temos $\neg A$ do lado direito e A do lado esquerdo, deste modo a fórmula associada é dada por $X \wedge A \wedge \neg(\neg A)$, que é demonstrável dado que $\vdash \neg\neg A \supset A$.

Regra de construção 3: Tendo aplicado a regra 3 então tem se $A \wedge B$ do lado esquerdo da tabela, com isso A e B ocorrem novamente na esquerda da tabela. Com isso a fórmula associada deste estágio é $X \wedge A \wedge B \wedge (A) \wedge (B)$, esta fórmula é verdadeira dada a demonstrabilidade da implicação $\vdash A \wedge B \supset A \wedge B$.

Regra de construção 4: Para este caso em especial, estamos tratando da implicação $D_j \supset D'_{j_1} \vee D'_{j_2}$. Aqui precisaremos tratar de dois casos, se a tabela que sofre a alteração pela regra de construção é uma tabela principal, ou uma tabela auxiliar; caso seja uma tabela auxiliar, precisaremos compor a fórmula característica até termos a fórmula característica da tabela principal, pois esta é a fórmula característica do conjunto alternativo, isto é, $D'_{j_1} \vee D'_{j_2}$.

Caso a tabela tratada seja a tabela principal, tendo aplicado a regra de construção 4, a tabela t possui uma fórmula $A \wedge B$ na direita. Com isso supomos que sua fórmula característica no estágio m é $E \wedge \neg(A \wedge B)$; temos que a fórmula característica do estágio $m+1$ é $(E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg A) \vee (E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg B)$, sendo $E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg A$ a fórmula característica da tabela t_1 (relativo ao conjunto alternativo D'_{j_1}) e $E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg B$ a fórmula característica da tabela t_2 (relativo ao conjunto alternativo D'_{j_2}). Vemos de imediato que é verdadeira a implicação

$$\vdash [E \wedge \neg(A \wedge B)] \supset [(E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg A) \vee (E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg B)].$$

Agora, caso a tabela tratada seja a tabela auxiliar, da implicação anterior temos

$$\vdash \diamond[E \wedge \neg(A \wedge B)] \supset \diamond[(E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg A) \vee (E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg B)].$$

Afirmção: $\vdash \diamond(X \vee Y) \supset (\diamond X \vee \diamond Y)$.

3 Lógica Modal

Mostraremos esta afirmação por absurdo. Isto é $\vdash \Diamond(X \vee Y) \wedge \neg(\Diamond X \vee \Diamond Y)$. Colocaremos entre parênteses os axiomas usados para uma leitura mais fluida. Notemos que por equivalência temos $\vdash \neg\Box\neg(X \vee Y) \wedge \neg(\Diamond X \vee \Diamond Y)$, logo $\vdash \neg\Box(\neg X \wedge \neg Y) \wedge \neg(\Diamond X \vee \Diamond Y)$. Pelo axioma A1 ($\Box A \supset A$) obtemos $\vdash \neg(\neg X \wedge \neg Y) \wedge \neg(\Diamond X \vee \Diamond Y)$. Deste forma $\vdash (X \vee Y) \wedge \neg(\Diamond X \vee \Diamond Y)$. Por outro lado, temos que $\vdash (X \vee Y) \wedge \neg\Diamond X \wedge \neg\Diamond Y$, logo $\vdash (X \vee Y) \wedge \neg\Box\neg X \wedge \neg\Box\neg Y$, assim $\vdash (X \vee Y) \wedge \Box\neg X \wedge \Box\neg Y$. Por A1 tem-se $\vdash (X \vee Y) \wedge \neg X \wedge \neg Y$, assim $\vdash (X \vee Y) \wedge \neg(X \vee Y)$, chegando a uma inconsistência lógica. Por tanto $\vdash \Diamond(X \vee Y) \supset (\Diamond X \vee \Diamond Y)$. Como queríamos demonstrar. \Diamond

$$\vdash \Diamond[E \wedge \neg(A \wedge B)] \supset (\Diamond(E \wedge \neg(A \wedge B)) \wedge \neg A) \vee \Diamond(E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg B).$$

Deste fato, sendo t' o predecessor de t (t' é uma tabela tal que $t'St$), a fórmula característica de t' é da forma $X \wedge \Diamond(E \wedge \neg(A \wedge B))$, onde X é a fórmula característica de t' tendo removido da árvore as tabelas de t em diante. Usando a regra de distribuição para os conectivos temos que

$$\vdash X \wedge \Diamond[E \wedge \neg(A \wedge B)] \supset (X \wedge \Diamond(E \wedge \neg(A \wedge B)) \wedge \neg A) \vee (X \wedge \Diamond(E \wedge \neg(A \wedge B) \wedge \neg B)).$$

Se t' é a tabela inicial da demonstração, então terminamos; caso contrário, basta repetirmos estes passos usando as relações $\vdash \Diamond(X \wedge Y) \supset (\Diamond X \wedge \Diamond Y)$ e $\vdash [(X \wedge Y) \vee Z] \supset [(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)]$, até reconstruirmos a árvore. Com isso, justificamos esta regra de construção.

Regra de construção 5: Caso esta regra tenha sido aplicada, temos uma fórmula do tipo $\Box A$ na esquerda da tabela t e assim a fórmula característica no estágio m é dada por $\Box A \wedge X \wedge \Diamond E_1 \wedge \Diamond E_2 \wedge \dots$, onde E_i são as fórmulas características das tabelas t_i tais que tSt_i , e $\Box A \wedge X$ é a fórmula associada de t .

Vamos examinar os diferentes sistemas de modelos, pois temos diferentes relações entre as tabelas, modificando o modo que devemos justificá-las. Vamos começar pelo modelo **T**. Temos A na esquerda de t (pois S é reflexivo) e de todos os t_i tais que tSt_i . Com isso a fórmula característica de t no estágio $m+1$ é $A \wedge \Box A \wedge X \wedge \Diamond(E_1 \wedge A) \wedge \Diamond(E_2 \wedge A) \dots$, com E_i sendo a fórmula característica de t_i . Precisamos justificar a demonstrabilidade da implicação da fórmula característica inicial para esta nova fórmula característica (após a regra de construção). Isto ocorre pois $\vdash \Box A \supset A$ (axioma A1), e também

Afirmção: $\vdash (\Box A \wedge \Diamond E) \supset \Diamond(E \wedge A)$.

Demonstraremos esta afirmação pela sua contrapositiva, isto é $\vdash \neg\Diamond(E \wedge A) \supset \neg(\Box A \wedge \Diamond E)$. Para uma leitura mais fluida colocamos entre parênteses os axiomas usados.

Temos por equivalência $\vdash \neg\neg\Box\neg(E\wedge A)$, logo $\vdash \Box\neg(E\wedge A)$. Por A1 ($\Box A \supset A$), $\vdash \neg(E\wedge A)$, assim $\vdash \neg(A\wedge E)$. Pelo axioma A4 ($\vdash A \supset \Box\Diamond A$) temos $\vdash \neg(A\wedge \Box\Diamond E)$. Novamente por A1, $\vdash \neg(A\wedge \Diamond E)$. Por fim, por R2 (se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$) tem-se $\vdash \neg(\Box A \wedge \Diamond E)$. Como queríamos demonstrar.

◇

Se estamos num sistema **S4**, \mathcal{S} é transitiva, e com isso a regra 5 sofre modificações: $\Box A$ ocorre na esquerda de cada tabela t_i tal que tSt_i . Visto isso a fórmula característica de t no estágio $m+1$ é dada por $A \wedge \Box A \wedge X \wedge \Diamond(E_1 \wedge \Box A) \wedge \Diamond(E_2 \wedge \Box A) \dots$, que é justificado por $\vdash \Box A \supset A$ e

Afirmção: $\vdash (\Box A \wedge \Diamond E) \supset \Diamond(E \wedge \Box A)$.

Faremos a prova desta afirmação por contrapositiva, para uma leitura mais fluida colocamos entre parenteses os axiomas usados. Ou seja, mostraremos que $\vdash \neg\Diamond(E \wedge \Box A) \supset \neg(\Box A \wedge \Diamond E)$. Primeiramente notemos que dada a hipótese, temos por equivalência que $\vdash \neg\neg\Box\neg(E \wedge \Box A)$. Pelo axioma A1 ($\Box A \supset A$) temos $\vdash \neg\neg\neg(E \wedge \Box A)$, logo $\vdash \neg(E \wedge \Box A)$, assim $\vdash \neg(\Box A \wedge E)$. Por A4 ($\vdash A \supset \Box\Diamond A$) tem-se $\vdash \neg(\Box A \wedge \Box\Diamond E)$, que novamente por A1 obtemos $\vdash \neg(\Box A \wedge \Diamond E)$. Como queríamos demonstrar.

◇

Caso estejamos usando um sistema **B**, \mathcal{S} é simétrica, a regra 5 sofre alteração, ainda que semelhante a regra para **T**: A ocorre na esquerda de toda tabela t' tal que $t'St$. Dada a simetria posta nesta situação, precisamos examinar a tabela predecessora de t , caso exista, que chamamos aqui de t' ; esta possui a seguinte fórmula característica $Y \wedge \Diamond(\Box A \wedge X \wedge \Diamond E_1 \wedge \Diamond E_2 \wedge \dots)$, onde Y é a fórmula associada a t' . Após a aplicação da regra de construção esta passa a ser $A \wedge Y \wedge \Diamond(A \wedge \Box A \wedge X \wedge \Diamond(E_1 \wedge A) \wedge \Diamond(E_2 \wedge A) \wedge \dots)$. Esta passagem é justificada por $\vdash \Box A \supset A$, $\vdash (Y \wedge \Diamond(\Box A \wedge X \wedge \Diamond E_1 \wedge \dots)) \supset \Diamond\Box A$ e $\vdash \Diamond\Box A \supset A$; vamos mostrar essas duas últimas implicações.

Afirmção: $\vdash (Y \wedge \Diamond(\Box A \wedge X \wedge \Diamond E_1 \wedge \dots)) \supset \Diamond\Box A$

Para esta afirmação, vamos primeiro mostrar que $\vdash \Diamond(A \wedge B) \supset (\Diamond A \wedge \Diamond B)$. Para uma leitura mais fluida colocamos entre parenteses os axiomas usados.

Por equivalência, queremos mostrar que $\vdash \neg\Box\neg(A \wedge B) \supset (\neg\Box\neg A \wedge \neg\Box\neg B)$. Isto é o mesmo que $\vdash \neg\Box\neg(A \wedge B) \supset \neg(\Box\neg A \vee \Box\neg B)$. Pela sua contrapositiva, temos $\vdash (\Box\neg A \vee \Box\neg B) \supset \Box\neg(A \wedge B)$. Ou seja, $\vdash (\Box\neg A \vee \Box\neg B) \supset \Box(\neg A \vee \neg B)$.

A seguir tomaremos $C = \neg A$ e $D = \neg B$. Usaremos algumas tautologias para nos auxiliar. Uma delas é que $\vdash C \supset (C \vee D)$. Com isso, por R2 (se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$) temos $\vdash \Box(C \supset (C \vee D))$. Pelo axioma A2 ($\vdash \Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$) tem-se $\vdash \Box(C \supset (C \vee D)) \supset (\Box C \supset \Box(C \vee D))$. Assim, por R1 (se $\vdash A$ e $\vdash A \supset B$ então $\vdash B$) obtemos $\vdash \Box C \supset \Box(C \vee D)$.

3 Lógica Modal

Analogamente, usando a tautologia $\vdash D \supset (C \vee D)$, concluímos que $\vdash \Box D \supset \Box(C \vee D)$. Visto isso, usando a tautologia $\vdash ((p \supset r) \wedge (q \supset r)) \supset ((p \vee q) \supset r)$. Obtemos $\vdash (\Box C \vee \Box D) \supset \Box(C \vee D)$, isto é $\vdash (\Box \neg A \vee \Box \neg B) \supset \Box(\neg A \vee \neg B)$.

Portanto concluímos que $\vdash \Diamond(A \wedge B) \supset (\Diamond A \wedge \Diamond B)$. Consequentemente $\vdash (Y \wedge \Diamond(\Box A \wedge X \wedge \Diamond E_1 \wedge \dots)) \supset (Y \wedge \Diamond \Box A \wedge \Diamond X \wedge \Diamond \Diamond E_1 \wedge \dots)$. Em particular $\vdash (Y \wedge \Diamond(\Box A \wedge X \wedge \Diamond E_1 \wedge \dots)) \supset \Diamond \Box A$. Como queríamos demonstrar. \diamond

e

Afirmção: $\vdash \Diamond \Box A \supset A$.

Mostraremos esta afirmação provando-a pela sua contrapositiva, para uma leitura mais fluida colocamos entre parenteses os axiomas usados. Com a contrapositiva nossa hipótese passa a ser $\vdash \neg A$. Pelo axioma A4 ($\vdash A \supset \Box \Diamond A$) temos $\vdash \Box \Diamond \neg A$. Por equivalências, temos então $\vdash \Box \neg \Box \neg \neg A$, logo $\vdash \Box \neg \Box A$, assim $\vdash \neg \neg \Box \neg \Box A$, deste modo $\vdash \neg \Diamond \Box A$. Concluindo nossa demonstração. \diamond

Por fim, caso o sistema tratado seja **S5**, como ele é a combinação do sistema **S4** e o **B**, que já foram provados, sua prova é imediata. Com isso finalizamos este caso de regra de construção.

Regra de construção 6: Dado que a regra 6 foi aplicada, temos que $\Box A$ está do lado direito da tabela t , isto é, a tabela tem fórmula característica da forma $X \wedge \neg \Box A$; além disso, foi criada uma nova tabela t' tal que tSt' e A está na direita, levando a fórmula característica de t' a ser da forma $X \wedge \neg \Box A \wedge \neg A$. Notemos que $\vdash \neg \Box A \supset \Diamond \neg A$, pois $\Box A \equiv \neg \Diamond \neg A$, logo $\vdash (X \wedge \neg \Box A) \supset (X \wedge \neg \Box A \wedge \Diamond \neg A)$, justificando esta regra. Notemos que a regra 5 tem influência sobre este caso, dada a possibilidade de existência de uma fórmula à esquerda de t' , mas este caso já foi justificado sobre o caso da regra 5.

Desta forma abordamos todas as regras de construção que podem ser aplicadas a um fórmula no estágio m para o estágio $m + 1$. Provando, assim, que uma fórmula característica de um estágio implica a fórmula característica do estágio seguinte. Com isso, podemos notar que aplicando esta afirmação recursivamente chegamos ao que queríamos: a fórmula característica do estágio inicial implica a fórmula característica de um estágio qualquer. \square

Agora mostraremos a ida do teorema.

Teorema 3.43 (Ida do Teorema da Completude) *Se uma fórmula A é válida, então A é demonstrável.*

Demonstração: Como já demonstramos que se uma fórmula A é válida, então sua

construção da demonstração por tabelas é fechada, teorema 3.34: vamos mostrar que dada a construção fechada de A temos que A é demonstrável.

Visto que a construção para A é fechada, temos que em algum estágio de construção n todos os conjuntos alternativos apresentam uma tabela fechada. Dada a definição 3.41 a forma da fórmula característica para esta união de conjuntos alternativos é $D_1 \vee \dots \vee D_n$, onde D_j é a fórmula característica do conjunto alternativo \mathcal{S}_j . Como cada conjunto possui uma tabela fechada, diremos que estas possuem uma fórmula associada da forma $X \wedge C \wedge \neg C$, onde C é uma fórmula ocorrendo em ambos os lados da tabela. Devido ao trecho $C \wedge \neg C$ temos que a fórmula associada é falsa.

Lembremos agora que o conjunto alternativo apresenta uma estrutura de árvore; mostraremos que a fórmula característica para o conjunto alternativo é falsa. Visto que $\vdash \neg(X \wedge C \wedge \neg C)$ implica $\vdash \neg\Diamond(X \wedge C \wedge \neg C)$ (por R2 e pelo fato de $\neg\Diamond X \equiv \Box\neg X$) e deste modo $\vdash \neg(Z \wedge \Diamond(Y \wedge \Diamond(X \wedge C \wedge \neg C)))$, onde Y e Z são possíveis fórmulas dos estágios anteriores da árvore (caso existam). Prosseguindo desta forma até concluir que a fórmula D_j é falsa. Ou seja, $\vdash \neg D_j$. Dada a arbitrariedade de j então $\vdash \neg(D_1 \vee \dots \vee D_m)$.

Por fim, dado o lema 3.42, temos que a fórmula característica do primeiro estágio de construção, $\neg A$, implica a fórmula característica do estágio n , ou seja, $\vdash \neg A \supset D_1 \vee \dots \vee D_m$. Como vimos, $\vdash \neg(D_1 \vee \dots \vee D_m)$, logo, por contrapositiva, tem-se que $\vdash A$. Provando que a fórmula A é demonstrável na lógica modal. \square

Resta-nos mostrar a volta do teorema da completude.

Teorema 3.44 (Volta do Teorema da Completude) *Se uma fórmula A é demonstrável, então A é válida.*

Demonstração: Uma vez que construímos nossas demonstrações através dos axiomas apresentados no início do capítulo “Sistemas axiomáticos modais”, mostraremos que cada axioma é válido e cada regra de inferência produz uma fórmula válida a partir de uma fórmula válida.

Começemos pelo axioma A1) $\Box A \supset A$. Sejam $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo e $H \in K$ tal que $H \Vdash \Box A$; logo, para todo $H' \in K$, se HRH' então $H' \Vdash A$. Como todos os modelos que estamos tratando têm relação pelo menos reflexiva, então em particular $H \Vdash A$. Assim $\Box A \supset A$ é válido em todos os mundos possíveis. Portanto, pela escolha arbitrária de $H \in K$, A1 é válido.

Para o axioma A2) $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$, seja um modelo $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ e $H \in K$. Vamos mostrar por absurdo; então temos $H \Vdash \Box(\neg A \vee B) \wedge (\Box A \wedge \neg\Box B)$, ou seja, $H \Vdash \Box(\neg A \vee B)$ e $H \Vdash \Box A$ e $H \Vdash \neg\Box B$. Logo, para algum $H' \in K$ com HRH' tem-se

3 Lógica Modal

$H' \Vdash \neg A \vee B$ e $H' \Vdash A$ e $H' \Vdash \neg B$, isto é, $(H' \Vdash \neg A$ ou $H' \Vdash B)$ e $H' \Vdash A$ e $H' \Vdash \neg B$, um absurdo. Portanto, pela escolha arbitrária de $H \in K$, A2 é válido.

Para a inferência R1) Se $\vdash A$ e $\vdash A \supset B$ então $\vdash B$. Seja $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo, e suponha que A e $A \supset B$ são válidos neste modelo, isto é, são verdadeiros em todos os mundos possíveis do modelo. Notemos que se $A \supset B$ é verdadeiro em um mundo $H \in K$, temos que $H \Vdash \neg A \vee B$. Logo se $H \Vdash A$ é preciso que $H \Vdash B$ para que de fato $H \Vdash \neg A \vee B$. Portanto essa inferência produz uma fórmula válida a partir de uma fórmula válida.

Para demonstração da inferência R2) Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$. Dado $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ um modelo e quaisquer $H, H' \in K$ tais que HRH' , supondo que A é válido no modelo então temos que $H' \Vdash A$ para todo H' . Desta forma A é válido em todos os mundos acessíveis a H . Logo, pela definição, $H \Vdash \Box A$. Pela arbitrariedade na escolha de H temos que $\Box A$ é verdadeiro em todos os mundos possíveis de K . Portanto $\Box A$ é válida no modelo.

Para o axioma A3) $\vdash \Box A \supset \Box \Box A$ consideraremos modelos **S4**, ou seja sua relação é transitiva e reflexiva. Seja um modelo $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ e $H \in K$, vamos mostrar por absurdo, então temos $H \Vdash \Box A \wedge \neg \Box \Box A$, logo $H \Vdash \Box A$ e $H \Vdash \neg \Box \Box A$. Portanto, para algum $H' \in K$ com HRH' tem-se $H' \Vdash A$ e $H' \Vdash \neg \Box A$; desta forma, para algum $H'' \in K$ com $H'\mathcal{R}H''$ tem-se $H'' \Vdash \neg A$. Pelo fato de \mathcal{R} ser transitivo, como HRH' e $H'\mathcal{R}H''$ então HRH'' , conseqüentemente temos $H'' \Vdash A$ e $H'' \Vdash \neg A$, um absurdo. Portanto, pela escolha arbitrária de $H \in K$, A3 é válido.

Por fim, para o axioma A4) $\vdash A \supset \Box \Diamond A$ consideraremos modelos **B**, ou seja, sua relação é simétrica e reflexiva. Seja um modelo $(G, K, \mathcal{R}, \Vdash)$ e $H \in K$, vamos mostrar por absurdo, então temos $H \Vdash A \wedge \neg \Box \Diamond A$. Logo $H \Vdash A$ e $H \Vdash \neg \Box \neg \Box \neg A$, pela equivalência $\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$. Desta forma, para algum $H' \in K$ com HRH' tem-se $H' \Vdash \neg \neg \Box \neg A$, que é o mesmo que $H' \Vdash \Box \neg A$. Isto é, para todo $H'' \in K$, se $H'\mathcal{R}H''$ então $H'' \Vdash \neg A$. Dado que a relação no modelo do tipo **B** é simétrica, em particular temos que $H'\mathcal{R}H$, com isso, $H \Vdash \neg A$, um absurdo, pois $H \Vdash A$. Portanto, pela escolha arbitrária de $H \in K$, A4 é válido.

Com isso, concluímos que se uma fórmula A é demonstrável então A é válida. Como queríamos demonstrar. □

Por fim, chegamos ao teorema da completude para lógica modal. Neste teorema, mesmo que indiretamente, usamos todas as definições e conceitos que vimos até este ponto.

Teorema 3.45 (Teorema da Completude) *Uma fórmula A é válida se, e somente se, A é demonstrável.*

Demonstração: Segue dos teoremas 3.43 e 3.44.

□

- [BBL] De Barros, L. C. & Bassanezi, R. C. & Lodwick, W. A.; *First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*, Springer, 2016.
- [FM] Fitting, M. & Mendelsohn, R.; *First-order modal logic*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [Kripke] Kripke, S. A.; *Semantical analysis of modal logic i normal modal propositional calculi*, *Mathematical Logic Quarterly*, 1963.
- [Lemmon] Lemmon, E.J.; *An introduction to modal logic*, Basil Blackwell, 1997.
- [Lewis] Lewis, C. I.; *Implication and the algebra of logic*, *JSTOR Mind*, **21**, pp. 522-531, 1912.
- [LL] Lewis, C. I. & Langford, C. H.; *Symbolic Logic (1st ed.)*, Dover Publications, 1932.
- [Smullyan] Smullyan, R. M.; *First-order logic*, Courier Corporation, 1995.
- [Zadeh] Zadeh, L.A.; *Fuzzy sets*, *Inf. Control*, **8**, pp. 338-353, 1965.