

# Espaçamento maximal em várias dimensões

**Kayo Douglas da Silva**



Universidade Federal do ABC

**Título:** Espaçamento maximal em várias dimensões

**Autor:** Kayo Douglas da Silva

**Orientador:** Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

**Banca Examinadora:**

**Prof. Dr. Cristian Favio Coletti**

Universidade Federal do ABC

**Prof. Dr. Daniel Miranda Machado**

Universidade Federal do ABC

Santo André, 20 de agosto de 2024.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Processos de Poisson</b>	<b>10</b>
1.1 O Processo Binomial . . . . .	10
1.2 Processo de Poisson . . . . .	13
1.2.1 Construindo o Processo de Poisson . . . . .	14
1.2.2 Processos de Poisson como Processos Temporais . . . . .	15
1.3 Formalizando os Processos Pontuais . . . . .	17
<b>2 Recobrimento</b>	<b>24</b>
2.1 Propriedades Geométricas do Processo de Poisson de Bolas . . . . .	25
2.2 Resultados Intermediários . . . . .	28
2.3 Recobrimento de um cilindro . . . . .	32
2.4 Cobertura de um conjunto em $\mathbb{R}^d$ . . . . .	39
<b>3 Espaçamento</b>	<b>44</b>
3.1 Notação, Definições e Resultado Principal . . . . .	45
3.1.1 Estratégia da Prova . . . . .	46
3.1.2 Alguns Lemmas Intermediários . . . . .	47
3.2 Demonstração do Teorema Principal . . . . .	53
<b>A Resultados sobre a Geometria de Bolas</b>	<b>58</b>

# Agradecimento

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais, Pedro e Lourdes, que não me deixaram morrer de fome durante a produção desse trabalho. Agradeço acima de tudo ao valor que deram à educação dos filhos, mesmo fazendo parte da massa de pessoas que só teve a oportunidade de concluir o ensino médio já na idade adulta fizeram questão de garantir que nunca deixássemos de estudar. Agradeço também a minha irmã, Karina, por me aguentar durante todos esses anos e ser um exemplo que eu falhei em seguir mas me orgulho de ter tentado. Agradeço aos meus colegas de curso, expressão difícil de ser definida nessa universidade, especialmente Aurora Teijido, que me acompanhou em disciplinas mil, me ajudando em todas e cada uma delas e sempre tendo uma observação surpreendente a adicionar. Também merece consideração especial Giovanni Cergol, não só pela companhia durante o curso como pela amizade fora das muralhas dos Campi. Também agradeço a personagens fantásticos do curso como Denis Luiz, André Gomes, Aquerman Kuczmanda, Isabella Alvarenga, Vitor Leite, Lucas Dall'Aqua Di Fonzo, Pamela Quinzani, Ali Kamel, Bruno Carvalho e tantos outros que, mesmo por uma disciplina ou duas, contribuíram para que o peso do curso fosse possível de carregar. Valeu a pena, ê.

Agradeço aos meus amigos, os quais tive a sorte de conhecer e com os quais tive a honra de conviver. Agradeço pela confiança, pelo carinho e por aguentarem minhas crises. Em especial, agradeço a Sarah Meneghetti, Rodrigo Tanasovici, Laura Amaral, Marina Schkolnick, Djarrá Ortolam, Talissa de Moura, Déborah Sandy, Camila Almeida, Evandro Ortolani, Paula Endriukaitis, Daiane Marin, Pedro Marsura, Daniela Moraes, Beatriz Costa, Amanda Castilho, Raul Barbosa, Beatriz Felix, Bettina Munte, Marco Franca, Carolina Negreiros e Caio Vinicius. Gosto de pensar na lei natural dos encontros, aquela que diz que eu deixo e recebo um tanto. Agradeço até que seque o tutano dos meus ossos por esse "tanto" que recebi de vocês. Bando de safado.

Agradeço aos participantes e coordenadores do Coro da UFABC, que foram de certa forma uma família, me ensinando lições sobre disciplina, colaboração e humildade, além de me permitir enganar dezenas de pessoas fingindo que cantava. Especial agradecimento a Italo Sandoval, Roberto Ondeí, Jeferson Stabile e Lorena Haase.

Agradeço, então, aos colegas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, principalmente Julia Cudas e o Professor Miguel Abadi, que nessa história de aqui e ali me foram de imensa valia ao descobrir essa terceira casa.

Agradeço aos meus alunos por dedicarem um tempo pra me ensinar a ser um professor melhor, sem vocês não haveria motivos para eu chegar até aqui.

Agradeço também ao Grêmio Foot-ball Porto Alegrense, meu clube do coração, por nunca me deixar esquecer que "*Não tá morto quem peleia*".

Agradeço à Fundação Universidade Federal do ABC como instituição e como entidade. Como instituição por ter dado oportunidade de formação de qualidade a um jovem oriundo de uma camada desprezada pelas

## *Sumário*

estatísticas de educação superior. Que essa minha vitória seja uma vitória dos meus iguais e que a minha conquista não sirva para mostrar algum mérito meu e sim a generosidade daqueles que cimentaram o caminho a ser percorrido. Não consegui senão pelas mãos de professores e servidores da educação regular negligenciados pelo Estado. Como entidade pelo peso que esses sete anos tiveram na construção do meu caráter, a UFABC foi minha casa, meu esconderijo e meu altar nos piores e nos melhores momentos.

Agradeço aos professores do curso, especialmente Daniel Miranda, Mariana Rodrigues, Aleja Rada, Cristian Colleti, Edson Iwaki, Armando Caputi, Marcus Marrocos, Fabiano Brito, Marcio Fabiano, Sandra Zapata, Rodrigo Roque Dias, Ana Carolina Boero, Jerônimo Pellegrini, Rafael Vilela, Jeferson Cassiano e Eduardo Gueron. Se eu vi mais longe foi por estar sobre ombros de gigantes.

Finalmente, agradeço ao meu orientador, o Professor Doutor Rafael de Mattos Grisi, o homem de maior coração nessa universidade, dono de uma paciência que faria inveja a monges. Senão por ele, provavelmente este trabalho seria apenas mais um dos inúmeros planos que comecei e larguei mão. Agradeço por não desistir de mim e, principalmente, por não me deixar desistir, sabendo esperar quando precisei e me estimular quando era a hora de dar cada novo passo. Agradeço por tratar cada aluno do Bacharelado em Matemática como um colega de trabalho em fase inicial da carreira.

O resto é sorte e azar.

# Resumo

Dado um processo pontual  $\Xi$  em um compacto  $K$  e a bola unitária  $A$ , o espaçamento maximal dos pontos de  $N$  pode ser definido como o maior valor de  $r > 0$  para o qual existe uma cópia de  $rA$  contida em  $K$  sem intersecção com os pontos de  $\Xi$ .

Um exemplo a ser estudado é a distribuição assintótica do espaçamento maximal quando  $\Xi$  é formado por  $n$  pontos independentes e identicamente distribuídos na região  $K$ .

**Palavras Chaves:** Espaçamento Maximal, Recobrimento, Processo Pontual, Processo de Poisson, Convexos

# Abstract

Given a point process  $\Xi$  over a Compact  $K$  and the unitary circle  $A$ , the Maximal Spacing between points of  $\Xi$  may be defined as the largest value of  $r > 0$  for which there exists a copy of  $rA$  in  $K$  intersecting no points of  $\Xi$ .

An example to be studied is the asymptotic distribution of the maximal spacing when  $\Xi$  a set of  $n$  identically distributed independent points over  $K$ .

**Keywords:** Maximal Spacing, Covering, Point Process, Poisson Process, Convex Sets

# Introdução

Consideremos o seguinte problema: dado um intervalo  $\mathbb{I}$  em  $\mathbb{R}$  e um conjunto de pontos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{I}$ , como definir o espaçamento maximal nesse intervalo? Podemos simplesmente tomar  $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$  uma ordenação desses pontos e tomar o maior intervalo entre esses, em outras palavras  $\Delta_n = \max\{x_i - x_{i-1}\}$ . O nosso problema passar a ser levar essa definição para maiores dimensões. Um método formulado por Janson em [8] é considerar um compacto  $K$  em  $\mathbb{R}^d$  e um conjunto  $\Xi_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de pontos uniformemente distribuídos sobre  $K$ , e tomar o raio que um convexo  $A$  centrado em um ponto de  $x \in K$  pode ter de forma a não encontrar nenhum ponto do Processo. Ou seja, precisamos encontrar  $\Delta_n$  dado por:

$$\Delta_n = \sup\{r : \exists x \text{ tq } x + rA \subset K \setminus \Xi_n\} \quad (0.1)$$

Essa função é primeiro definida por Ranney [12] e Cheng [4] como alternativa à Máxima Verossimilhança e Deheuvels [5] estuda o caso em que tanto  $K$  quanto  $A$  são cubos. Este trabalho seguirá os resultados de Janson em [7] e [8], utilizando a esfera  $A$  como um caso particular de convexo por ele analisado. Resultados adicionais são apresentados por Fraiman em [1] que, além de generalizar a distribuição dos pontos, define um teste de hipóteses para a convexidade do suporte  $K$ .

Provaremos, ao final deste, às três afirmações abaixo:

$$nV_n - \log n - (d-1) \log \log n - \log \alpha \rightarrow U$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{nV_n - \log n}{\log \log n} = d - 1 \text{ q.s.}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{nV_n - \log n}{\log \log n} = d + 1 \text{ q.s.}$$

Em que  $U$  tem distribuição  $\mathbb{P}(U < u) = e^{-e^{-u}}$ ,  $V_n = \Delta_n^d$  e  $\alpha$  é uma constante referente ao formato da esfera, dada por:

$$\alpha = \frac{1}{d!} \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \right), \text{ para } d \geq 3$$

Observando que, se os pontos do processo estão à distância maior que  $r$  do centro  $x$  da esfera estudada, então o centro podemos construir uma esfera sobre cada ponto sem que alguma delas toque  $x$ , ou seja, po-



## Introdução

demostremos transformar o problema de encontrar  $x$  no problema de encontrar um ponto não coberto pelas esferas construídas. Em outras palavras, ao invés de abordarmos diretamente o Máximo Espaçamento, trataremos de Recobrimento e faremos a conexão usando a seguinte argumentação:

$$\begin{aligned}\{\Delta > r\} &= \{\exists x \in \mathbb{R}^d : |x_i - x| > r, \forall x_i \in \Xi\} \\ &= \{\exists x \in \mathbb{R}^d : x \notin B(x_i, r), \forall x_i \in \Xi\} \\ &= \{\cup_{x_i \in \Xi} B(x_i, r) = \cup_{x_i \in \Xi} x_i - rA \text{ não cobre } K\}\end{aligned}$$

Outro problema que podemos enfrentar é a distribuição de pontos quando o número desses cresce. Substituiremos, então, o processo uniforme em  $K$  por um Processo de Poisson em  $\mathbb{R}^d$  que, além de preservar características locais, nos proporciona observar que os números de pontos para dois ou mais limitados são independentes.

O trabalho será estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentaremos alguns resultados principais sobre Processos de Poisson, definiremos o Processo como processo temporal e pontual, além de conectarmos sua definição com a do Processo Binomial.

No Capítulo 2 usaremos bolas centradas nos pontos do processo para cobrirmos uma malha a partir de um cilindro em  $\mathbb{R}^d$ , daremos especial atenção a vetores úteis e estruturas importantes de convexas.

O Capítulo 3 será voltado à formalização do Espaçamento Maximal e à demonstração das afirmações nas equações (1.1) e (1.2). Usaremos a argumentação (1.3) como base para as trocas entre esses dois capítulos.

# Capítulo 1

## Processos de Poisson

Como comentamos na introdução, nosso objetivo neste trabalho é estudar a distribuição do maior espaço vazio em um compacto depois de espalharmos pontos aleatoriamente em seu interior. Assim, o primeiro passo no estudo em tal estudo é distribuir os pontos de forma uniforme sobre um limitado  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ . A forma natural de se fazer isso é fixar  $n \in \mathbb{N}$  e simplesmente tomar uma sequência *iid* de pontos uniformemente distribuídas em  $K$ . Tal processo, conhecido como Processo Binomial, impõe, no entanto, dificuldades criadas pela alta correlação espacial de sua distribuição. Para resolver esse problema, substituiremos o Processo Binomial pelo chamado Processo de Poisson, que preserva características locais com a vantagem de, para dois ou mais subconjuntos limitados de  $K$ , os totais de pontos nestes são independentes.

Começaremos então apresentando o Processo Binomial, recuperando algumas de suas propriedades e tentando motivar a definição do processo de Poisson. Seguiremos então para a construção do processo de Poisson em  $\mathbb{R}^d$ , fazendo um parêntese para o caso unidimensional.

Em seguida apresentaremos um pouco da estrutura formal de processos pontuais, e concluiremos com algumas propriedades importantes dos Processos de Poisson.

### 1.1 O Processo Binomial

O Processo Binomial é o primeiro exemplo simples do que chamamos de um *Processo Pontual*. Processos pontuais são, por sua vez, uma importante classe de processos estocásticos espaciais, representando modelos estocásticos de espalhamento de pontos em  $\mathbb{R}^d$ . Podem ser vistos, portanto, como um conjunto  $\Xi \subset \mathbb{R}^d$  aleatório e discreto (enumerável e sem pontos de acumulação).

Nas próximas sessões definiremos os processos pontuais de modo mais preciso, mas por enquanto esta noção informal e imprecisa nos será suficiente.

Antes de prosseguir é importante fixar algumas notações e quantidades que permearão este trabalho. Dado um conjunto discreto  $\Xi \subset \mathbb{R}^d$  e um conjunto  $B \subset \mathbb{R}^d$  denotaremos por  $\Xi_B$  o conjunto  $\Xi$  restrito à  $B$ . Ou seja,

$$\Xi_B = \Xi \cap B.$$

E denotaremos por  $N(\cdot)$  a medida de contagem dada por

$$N(B) := |\Xi \cap B|,$$

$B \subset \mathbb{R}^d$ .

**Definição 1.1** Dado  $W \subset \mathbb{R}^d$  e uma função densidade de probabilidade  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^+$ , chamaremos de **Processo Binomial** em  $W$  de parâmetros  $n \geq 1$  e  $f$  como o conjunto de  $\Xi = \{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathbb{R}^d$ , formado por pontos iid de densidade  $f$ .

Caso os pontos  $X_i$  tenham distribuição Uniforme em  $W$  limitado, o processo será chamado de **homogêneo**.

O processo  $\Xi$  recebe esse nome, pois se

$$p_B := \mathbb{P}(X_i \in B) = \int_{B \cap W} f(x) dx$$

segue então que  $N(B) = |\Xi \cap B|$  tem distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $p_B$ .

No caso de um processo binomial homogêneo, se denotarmos por  $v_d$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$ , temos

$$p_B = \frac{v_d(B \cap W)}{v_d(W)}.$$

## Espalhando pontos “uniformemente” em $\mathbb{R}^d$

O processo binomial é um exemplo simples de como espalhar pontos independentes em uma região, mas ele tem ao menos duas limitações importantes. Primeiro ele fixa o número de pontos distribuídos no espaço.

O processo binomial é claramente uma resposta à essa pergunta no caso de uma região  $W$  limitada. Mas e se quisermos espalhar pontos em uma região não limitada? Ou mesmo no espaço inteiro?

A resposta para essa pergunta pode ser um pouco mais delicada. Primeiro, não podemos seguir a mesma ideia de espalhar cada ponto individualmente, uma vez que o conceito de distribuição uniforme em uma região de volume não finito não faz sentido.

Seria muito difícil (se não impossível) distribuir finitos pontos, uma vez que estes certamente ocupariam uma região limitada do espaço.

Uma ideia possível seria tomar uma sequência de regiões limitadas (retângulos por exemplo) crescendo para o espaço inteiro. Tomaríamos então uma sequência de processos binomiais nestas regiões, onde o total de pontos seria escolhido de modo a manter constante a densidade de pontos em cada região.

Mas o que esperar do limite deste processo?

Esta questão será respondida, ao menos parcialmente, em breve. Mas antes, lembremos de um resultado básico de variáveis binomiais.

**Proposição 1.2** Se  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de variáveis aleatórias, tais que  $X_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$ , com  $n \cdot p_n \rightarrow \lambda$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, \text{ com } X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

## 1 Processos de Poisson

Este mesmo resultado pode ser aplicado à nossa sequência de processos binomiais, e neste caso teríamos o seguinte resultado.

**Proposição 1.3** Dados  $\lambda > 0$  e  $N \in \mathbb{N}$ , defina  $l = (n/\lambda)^{\frac{1}{d}}$ . Seja então  $\Xi_n = \{X_1^n, \dots, X_n^n\}$  um processo binomial  $R_l = [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]^d$ . Tome então  $A \subseteq R_l$  limitado e defina  $N_n(A)$  a cardinalidade de  $\Xi_n \cap A$ . Nestas condições,  $N_n(A)$  converge em distribuição, quando  $n \rightarrow \infty$ , para uma variável aleatória de Poisson de média  $\lambda v_d(A)$ . Além disso, se  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  são limitados com  $A \cap B = \emptyset$ , então  $(N_n(A), N_n(B))$  converge em distribuição, quando  $n \rightarrow \infty$  para um vetor  $(N, M)$  onde  $N, M$  são independentes com  $N \sim \text{Poisson}(\lambda v_d(A))$  e  $M \sim \text{Poisson}(\lambda v_d(B))$ .

**Demonstração:** Sabemos que  $N_n \sim \text{Binomial}(n, p_A(n))$ , com

$$p_A(n) = \frac{m_d(A)}{v_d(R_l)} = \frac{v_d(A)}{l^d} = \frac{\lambda v_d(A)}{n},$$

e a primeira parte do resultado segue diretamente da Proposição 1.2.

Dados agora  $k, m \in \mathbb{N}$ , temos que

$$P(N_n(A) = k; N_n(B) = m) = P(N_n(A) = k | N_n(B) = m) \cdot P(N_n(B) = m).$$

Dado que

$$N_n(B) \sim \text{Binomial}\left(n, \frac{v_d(B)}{l^d}\right) = \text{Binomial}\left(n, \frac{\lambda v_d(B)}{n}\right),$$

precisamos mostrar que  $P(N_n(A) = k | N_n(B) = m)$  converge, quando  $n \rightarrow \infty$  para  $P(N = k)$ , onde  $N \sim \text{Poisson}(\lambda v_d(A))$ .

Temos dois modos de fazer isso.

O primeiro consiste em observar que  $\{N_n(B) = m\} = \{N_n(R_l \setminus B) = n - m\}$ . Além disso, como uma variável uniforme em  $R_l$ , condicionada a estar em  $C \subseteq R_l$ , tem distribuição uniforme em  $C$ , condicionar à  $N_n(B) = m$  é o mesmo que dizer que existem  $n - m$  uniformes em  $R_l \setminus B$ , e portanto

$$(N_n(A) | N_n(B) = m) \sim \text{Binomial}\left(n - m; \frac{v_d(A)}{v_d(R_l \setminus B)}\right).$$

O resultado segue então da proposição 1.2, se observarmos que

$$(n - m) \frac{v_d(A)}{v_d(R_l \setminus B)} = \frac{n - m}{l^d - v_d(B)} v_d(A) = \frac{n - m}{n - \lambda v_d(B)} \lambda v_d(A) \rightarrow \lambda v_d(A),$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Outro modo é seguir o argumento combinatório, e notar que o evento  $\{(N_n(A) = k; N_n(B) = m)\}$  consiste em distribuir  $k$  pontos em  $A$ ,  $m$  pontos em  $B$  e  $n - m - k$  pontos em  $R_l \setminus (A \cup B)$ . Como temos

$$\binom{n}{m} \binom{n - m}{k}$$

modos de realizar tal distribuição dos  $n$  pontos, temos que

$$P(N_n(A) = k; N_n(B) = m) = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k} \left(\frac{v_d(A)}{l^d}\right)^k \left(\frac{v_d(B)}{l^d}\right)^m \left(\frac{v_d(R_l \setminus (A \cup B))}{l^d}\right)^{n-m-k},$$

e

$$P(N_n(B) = m) = \binom{n}{m} \left(\frac{v_d(B)}{l^d}\right)^m \left(\frac{v_d(R_l \setminus B)}{l^d}\right)^{n-m}$$

De modo que

$$\begin{aligned} P(N_n(A) = k | N_n(B) = m) &= \binom{n-m}{k} \left(\frac{v_d(A)}{l^d}\right)^k \left(\frac{v_d(R_l \setminus B) - v_d(A)}{l^d}\right)^{n-m-k} \left(\frac{v_d(R_l \setminus B)}{l^d}\right)^{m-n} \\ &= \binom{n-m}{k} \left(\frac{v_d(A)}{v_d(R_l \setminus B)}\right)^k \left(1 - \frac{v_d(A)}{v_d(R_l \setminus B)}\right)^{n-m-k}, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração.  $\square$

Os resultados acima, apesar de não definitivos, nos dão uma boa ideia do que esperar de um processo pontual  $\Xi$  que represente os pontos distribuídos “uniformemente” em  $\mathbb{R}^d$ . Primeiro, condicionado à haver  $n$  pontos de  $\Xi$  em uma região limitada  $A \subset \mathbb{R}^d$ , devemos recuperar um processo Binomial em  $A$ . Segundo, o total de pontos em cada região limitada deve ter distribuição de Poisson. E em último, mas não menos importante, o total de pontos em regiões disjuntas deve ser independente.

Com isso estamos prontos para definir e construir o chamado Processo de Poisson.

## 1.2 Processo de Poisson

São várias as formas de se definir o processo de Poisson encontradas na literatura. Aqui seguiremos a definição proposta em [10]. Continuaremos ainda com a noção informal de Processo Pontual colocada anteriormente, deixando a formalização para as próximas sessões.

**Definição 1.4** Dada  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função localmente integrável, diremos que um processo pontual  $\Xi \subset \mathbb{R}^d$  é um **Processo de Poisson** com intensidade  $\lambda$  se:

1. para qualquer  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  com  $\mu(B) := \int_B \lambda(x) dx < \infty$ ,  $N(B) \sim \text{Poisson}(\mu(B))$ . Se  $\mu(B) = 0$ , então  $N(B) = 0$ ;
2. para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $B \subset \mathbb{R}^d$  com  $0 < \mu(B) < \infty$ . Condicionado a “ $N(B) = n$ ”,  $\Xi_B$  é um processo binomial com  $n$  pontos e função de densidade  $f(\xi) = \lambda(\xi)/\mu(B)$

Se  $\lambda$  é constante, o Processo de Poisson é dito **homogêneo** em  $\mathbb{R}^d$ .

O número esperado de pontos em um limitado  $B \subset \mathbb{R}^d$  é dado por

$$\mathbb{E}[N(B)] = \mu(B),$$

e por esta razão,  $\mu$  é conhecida como *medida de intensidade* do processo. No caso de um processo de Poisson homogêneo,  $\mu = \lambda v_d$ .

A seguir mostraremos como construir tal processo.

### 1.2.1 Construindo o Processo de Poisson

Faça  $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ , onde  $A_n$  é limitado. Sejam  $N_1, N_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson de média  $\mu(A_n)$ .

Para construir o processo  $\Xi$  faça o seguinte. Para cada  $n \geq 1$ , sorteie o valor de  $N_n$ , e dado  $N_n = k$  defina  $\Xi_{A_n}$  como um processo Binomial de densidade  $f_n(\xi) = \lambda(\xi)/\mu(A_n)$  e  $k$  pontos em  $A_n$ .

Defina agora

$$\Xi = \bigcup_{n \geq 1} \Xi_{A_n}.$$

**Lema 1.5** O processo  $\Xi$  construído acima é um Processo de Poisson de intensidade  $\lambda$  em  $\mathbb{R}^d$ . Além disso, se  $A, B \subset \mathbb{R}^d$  são tais que  $A \cap B = \emptyset$ , então  $N(A)$  e  $N(B)$  são independentes.

**Demonstração:** Mostraremos a distribuição de  $N(A)$  junto com a independência do processo em conjuntos disjuntos.

Para isso, note que se  $A, B$  são tais que  $\mu(A) < \infty$  e  $\mu(B) < \infty$ , então segue, por construção, que  $\{N(A \cap A_n), N(B \cap A_n); n \geq 1\}$  são v.a.'s independentes.

Considerando agora que a soma de v.a.'s de Poisson independentes tem distribuição de Poisson, basta mostrar que para cada  $n \geq 1$ ,  $N(A \cap A_n)$  e  $N(B \cap A_n)$  são independentes, com  $N(A \cap A_n) \sim \text{Poisson}(\mu(A \cap A_n))$ ,  $N(B \cap A_n) \sim \text{Poisson}(\mu(B \cap A_n))$ .

Supondo então que  $A, B \subset A_n$ , com  $A \cap B = \emptyset$ , e fazendo  $p = \frac{\mu(A)}{\mu(A_n)}$  e  $q = \frac{\mu(B)}{\mu(A_n)}$  temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(A) = m, N(B) = l) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(A) = m, N(B) = l | N(A_n) = k) e^{-\mu(A_n)} \frac{(\mu(A_n))^k}{k!} \\ &= e^{-\mu(A_n)} \sum_{k=l+m}^{\infty} \binom{k}{m} \binom{k-m}{l} p^m q^l (1-p-q)^{k-m-l} \frac{(\mu(A_n))^k}{k!} \\ &= e^{-\mu(A_n)} \frac{\mu(A)^m}{m!} \frac{\mu(B)^l}{l!} \sum_{k=l+m}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu(A) + \mu(B)}{\mu(A_n)}\right)^{k-m-l} \frac{(\mu(A_n))^{k-m-l}}{(k-m-l)!} \\ &= e^{-\mu(A_n)} \frac{\mu(A)^m}{m!} \frac{\mu(B)^l}{l!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu(A_n) - \mu(A) - \mu(B))^k}{k!} \\ &= e^{-\mu(A)} \frac{\mu(A)^m}{m!} e^{-\mu(B)} \frac{\mu(B)^l}{l!}, \end{aligned}$$

Precisamos mostrar ainda que  $\Xi_A$  condicionado à  $N(A) = n$  é um processo Binomial. Para isso tome  $B \subset$

$A \subset \mathbb{R}^d$ , e note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(A) = n, N(B) = k) &= \mathbb{P}(N(B) = k, N(A \setminus B) = n - k) \\ &= e^{-\mu(B)} \frac{\mu(B)^k}{k!} e^{-\mu(A \setminus B)} \frac{\mu(A \setminus B)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\mu(A)} \mu(B)^k (\mu(A) - \mu(B))^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} \\ &= e^{-\mu(A)} \frac{\mu(A)^n}{n!} \binom{n}{k} \left( \frac{\mu(B)}{\mu(A)} \right)^k \left( 1 - \frac{\mu(B)}{\mu(A)} \right)^{n-k}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\mathbb{P}(N(B) = k | N(A) = n) = \binom{n}{k} \left( \frac{\mu(B)}{\mu(A)} \right)^k \left( 1 - \frac{\mu(B)}{\mu(A)} \right)^{n-k},$$

concluindo a demonstração.  $\square$

O resultado acima traz uma propriedade extra, não presente na definição de Processo de Poisson: a independência do processo em conjuntos disjuntos. Tal propriedade é, provavelmente, a mais importante das propriedades do Processo de Poisson, e fundamental para o resto do nosso trabalho. Dada a sua importância, voltaremos à ela ainda neste capítulo, mas para isso precisamos formalizar o que entendemos como Processos Pontuais, e como caracterizar a distribuição de tais processos.

Antes, no entanto, apresentaremos brevemente o processo de Poisson em uma dimensão.

### 1.2.2 Processos de Poisson como Processos Temporais

Nesta sessão trataremos rapidamente de um caso particular e importante de processos de Poisson, que é o caso unidimensional.

Este caso é frequentemente estudado isoladamente e de modo independente aos processos pontuais. Neste contexto vemos os processos de Poisson apenas como um processo estocástico temporal  $N(t)$  crescente, a valores inteiros. Normalmente utilizado para modelar o total de ocorrências de um certo evento no intervalo de tempo  $(0, t]$ .

A definição de Processos de Poisson dada abaixo é comumente encontrada na literatura, e como podemos ver é inicialmente independente da noção de processos pontuais.

**Definição 1.6** Um Processo de Poisson com intensidade  $\lambda$  é um **processo temporal**  $N = \{N(t) : t \geq 0\}$  (dizemos que  $N(t)$  corresponde ao número de ocorrências de um evento até o momento  $t$ ) com espaço de estados  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$  tal que:

1.  $N(0) = 0$ ; e se  $s < t$  então  $N(s) \leq N(t)$

$$2. P(N(t+h) = n+m | N(t) = m) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{se } m = 1, \\ o(h) & \text{se } m > 1, \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{se } m = 0, \end{cases}$$

3. Se  $s < t$ , o número  $N(t) - N(s)$  de ocorrências no intervalo  $(s, t]$  é independente do número de ocorrências em  $[0, s]$

## 1 Processos de Poisson

Uma maneira de construir um processo com tais propriedades é partir de um processo pontual de Poisson  $\Xi$  em  $\mathbb{R}$  de intensidade  $\lambda > 0$  e definir

$$N(t) = N([0, t]) = \#(\Xi \cap [0, t])$$

A propriedade 1 segue trivialmente da definição de Processo pontual de Poisson, e a propriedade 3 é consequência direta do lema 1.5 acima.

Para a propriedade 2 segue da propriedade 3, fazendo

$$\mathbb{P}(N(t+h) = n+m | N(t) = m) = \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) + N(t) = n+m | N(t) = m) = \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = m),$$

e observando que  $N(t+h) - N(t) = \#(\Xi \cap (t, t+h])$  tem distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda h$ .

Um dos principais modos pelo qual podemos explorar a estrutura temporal de um processo de Poisson em 1 dimensão é dado pelo resultado abaixo.

**Proposição 1.7** *Identificando um processo  $N(t)$  com a sequência de tempos de chegada da seguinte forma:*

$$T_1 = \inf\{t > 0 : N(t) \geq 1\}$$

$$T_2 = \inf\{t > 0 : N(t) \geq 2\}$$

e, assim, sucessivamente

$$T_k = \inf\{t > 0 : N(t) \geq k\}$$

e tomamos a sequência  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  com

$$S_i = T_{i+1} - T_i$$

Teremos que os  $S_i$  são iid com  $S_1 \sim \text{exp}(\lambda)$

**Observação 1.8** *A distribuição de  $T_1$  pode ser facilmente encontrada, notando apenas que  $T_1 > t$  se, e só se,  $N(t) = 0$ , de modo que*

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

*A demonstração completa é um pouco mais trabalhosa, mas segue o mesmo princípio. Ela pode ser encontrada na bibliografia geral sobre processos de Poisson, e será omitida aqui por simplicidade.*

Neste trabalho precisaremos entender também qual a ordem de crescimento de  $N(t)$ , como exploramos no seguintes resultado.

**Proposição 1.9** *Se  $\Xi_\lambda$  é um processo de Poisson em  $\mathbb{R}$  e  $N(t)$  o processo de contagem associado, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{N(t)}{t} - \lambda \right) \log t = 0,$$



quase certamente. Em particular

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda, \quad q.s..$$

**Demonstração:** Primeiro note que como  $N(t)$  é crescente em  $t$ , então para  $k \leq t < k+1$  vale que

$$\frac{N(k)}{k+1} \log k - \lambda \log(k+1) < \left( \frac{N(t)}{t} - \lambda \right) \log t < \frac{N(k+1)}{k} \log(k+1) - \lambda \log k,$$

e portanto basta mostrarmos o resultado para  $t \in \mathbb{Z}$ .

Agora, pela desigualdade de Chernoff para Poisson (ver [11]), se  $\log t > \epsilon/\lambda$

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{N(t)}{t} - \lambda \right| \log t > \epsilon \right) \leq \exp \left\{ -\frac{-\epsilon^2 t}{2(\lambda \log^2 t + \epsilon \log t)} \right\},$$

e como  $2(\lambda \log^2 t + \epsilon \log t) < \sqrt{t}$  para  $t$  suficientemente grande, temos

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{N(t)}{t} - \lambda \right| \log t > \epsilon \right) \leq e^{-\epsilon^2 \sqrt{t}}.$$

O resultado segue diretamente do lema de Borel-Cantelli. □

### 1.3 Formalizando os Processos Pontuais

Já apresentamos informalmente o que entendemos por Processos Pontuais, e chegamos a construir alguns exemplos, mas agora chegamos ao limite do que conseguimos fazer sem detalhar melhor essa classe de processos.

Para isso seguiremos a formalização apresentada em [2] e [10].

Começemos então caracterizando o espaço onde vivem tais processos.

**Definição 1.10** Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^d$  é dito **localmente finito** se  $X \cap B$  é finito para todo  $B \subset \mathbb{R}^d$  limitado. A família dos conjuntos localmente finito é denotada por

$$N_{lf} = \{X \subset \mathbb{R}^d : X \text{ é localmente finito}\}.$$

Com isso  $X \in N_{lf}$  é simplesmente um conjunto discreto de pontos, finito ou enumerável, e sem pontos de acumulação.

Para conseguir definir medidas de probabilidade em  $N_{lf}$  precisamos primeiro definir um  $\sigma$ -álgebra adequada. Para começar muniremos  $\mathbb{R}^d$  com a tradicional  $\sigma$ -álgebra de Borel, denotada por  $\mathcal{B}^d$ .

**Definição 1.11** Tome  $\mathcal{A}_1$  a família de conjuntos dada por

$$\mathcal{A}_1 = \{X \in N_{lf} : |X \cap B| = m\}, m \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}^d \text{ limitado}\}$$

e defina

$$\mathcal{N}_{lf} = \sigma(\mathcal{A}_1).$$

Com isso, estamos prontos para definir os processos pontuais.

**Definição 1.12** Um *Processo Pontual* é um mapa mensurável  $\Xi$  de um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  em  $(N_{lf}, \mathcal{N}_{lf})$ .

O processo binomial e o processo de Poisson apresentados anteriormente são exemplos importantes de processos pontuais.

A seguir estudaremos como caracterizar a distribuição de processos pontuais. Para tanto começaremos lembrando um importante resultado de teoria da medida, cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Primeiro lembremos que uma família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de um espaço  $\Omega$  é chamada de  $\pi$ -sistema se  $\mathcal{A}$  é fechada para interseções. Ou seja, se  $A, B \in \mathcal{A}$ , então  $A \cap B \in \mathcal{A}$ .

**Lema 1.13** Seja  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra gerada por um  $\pi$ -sistema  $\mathcal{A}$ . Se  $\mu_1, \mu_2$  são medidas de probabilidade de  $(\Omega, \mathcal{F})$  e  $\mu_1 = \mu_2$  em  $\mathcal{A}$ , então  $\mu_1 = \mu_2$  em  $\mathcal{F}$ .

Munidos deste resultado, estamos prontos para enunciar a primeira forma de caracterizar a distribuições de um processo pontual.

**Lema 1.14** A distribuição de um processo pontual  $\Xi$  é determinada pelas distribuições finito dimensionais da sua função de contagem, i.e. pela distribuição conjunta das variáveis  $N(B_1), \dots, N(B_m)$ , onde  $B_1, \dots, B_m$  são borelianos limitados e  $m \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Segue do lema 1.13, observando que

$$\mathcal{A} = \{X \in N_{lf} : |X_{B_i}| = n_i, B_i \in \mathcal{B}^d \text{ limitado}, n_i \in \mathbb{N}; i = 1, \dots, m; m \in \mathbb{N}\}$$

é um  $\pi$ -sistema, e que  $\mathcal{N}_{lf} = \sigma(\mathcal{A})$ . □

Na definição 1.4 o papel da propriedade 1 era estabelecer a distribuições de uma única variável  $N(B)$ , enquanto a propriedade 2 define a correlação entre diferentes variáveis de contagem. Outra possibilidade, bastante usada na literatura, é usar a independência em regiões disjuntas para estabelecer tais correlações.

A seguir vamos enunciar uma outra maneira de caracterizar medidas de probabilidade em  $(N_{lf}, \mathcal{N}_{lf})$ .

Tal maneira, que a princípio pode parecer contra-intuitiva, se baseia da ideia de que para saber onde estão os pontos de um conjunto  $X \in N_{lf}$ , basta sabermos onde eles não estão. Tal ideia é caracterizada no seguinte lema.

**Lema 1.15** Se  $\mathcal{A}_0 = \{X \in N_{lf} : X_B = \emptyset, B \text{ boreliano limitado}\}$ , então

$$\mathcal{N}_{lf} = \sigma(\mathcal{A}_0).$$

**Demonstração:** Primeiro note que, como  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1$ , então  $\sigma(\mathcal{A}_0) \subset \sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{N}_{lf}$ .

Para a inclusão reversa, observe que  $\mathbb{R}^d$  é um espaço métrico separável, e portanto, dado  $B \in \mathcal{B}^d$  limitado, podemos tomar uma sequência  $F_n = \{A_{n,i} \in \mathcal{B}^d : i = 1, \dots, k_n\}, n \in \mathbb{N}$  de partições de  $B$  tais que

- $A_{n-1,i} \cap A_{n,j} = \emptyset$  ou  $A_{n,j}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;

## 1 Processos de Poisson

- para quaisquer dois pontos  $\xi, \eta \in B$  distintos, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq n_0$ , se  $\xi \in A_{n,i}$  então  $\eta \notin A_{n,i}$ .

Então  $|X_B| = m$  se, e somente se, existir  $n_0 > 0$ , com  $k_{n_0} \geq m$  e tal que,  $\forall n \geq n_0$ , existe  $\{j_1, \dots, j_m\} \subset \{1, 2, \dots, k_n\}$  para os quais

$$|X \cap B \cap A_{n,j_i}| > 0, i = 1, \dots, m$$

e

$$|X \cap (B \setminus \cup_{i=1}^m A_{n,j_i})| = 0.$$

Em outras palavras

$$\{X \in N_{lf} : |X_B| = m\} = \bigcup_{n_0 \geq 1} \bigcap_{n \geq n_0} \bigcup_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k_n} A(n, m, B, \{j_1, \dots, j_m\})$$

com

$$A(n, m, B, \{j_1, \dots, j_m\}) = \cap_{i=1}^m \{|X \cap B \cap A_{n,j_i}| > 0\} \cap \{X \cap (B \setminus \cup_{i=1}^m A_{n,j_i}) = \emptyset\}$$

que pertencem a  $\sigma(\mathcal{A}_0)$

Consequentemente,  $\{X \in N_{lf} : N(X_B) = m\} \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ . □

Com isso, concluímos que

**Teorema 1.16** *A distribuição de um processo pontual  $\Xi$  é unicamente determinada pelas suas probabilidades de vácuo,*

$$\mathbb{P}(\Xi \cap B = \emptyset),$$

$B \in \mathcal{B}^d$  limitado.

**Demonstração:** Segue diretamente dos lemas 1.15 e 1.13, notando que para  $A, B \in \mathcal{B}^d$  limitados

$$\{\Xi \cap A = \emptyset\} \cap \{\Xi \cap B = \emptyset\} = \{\Xi \cap (A \cup B) = \emptyset\} \in \mathcal{A}_0,$$

e portanto  $\mathcal{A}_0$  é um  $\pi$ -sistema. □

Uma importante (e talvez impressionante) consequência deste teorema é que um processo de Poisson de intensidade  $\lambda$  em  $\mathbb{R}^d$  pode ser definido como o processo pontual  $\Xi$  em  $\mathbb{R}^d$  tal que

$$\mathbb{P}(\Xi \cap B = \emptyset) = e^{-\mu(B)},$$

para todo  $B \in \mathcal{B}^d$  limitado, o que é de grande ajuda quando trabalhamos com processos de Poisson.

Para exemplificar, considere  $\Xi_i; i = 1, \dots, m$  processos de Poisson independentes com medidas de intensidade  $\mu_i, i = 1, \dots, m$ . Neste caso, se

$$\Xi = \bigcup_{i=1}^m \Xi_i,$$

então

$$\mathbb{P}(\Xi \cap B = \emptyset) = P(\Xi_i \cap B = \emptyset; i = 1, \dots, m) = \prod_{i=1}^m e^{-\mu_i(B)} = e^{-\sum_i \mu_i(B)},$$

## 1 Processos de Poisson

e portanto  $\Xi$  é um processo de Poisson com medida de intensidade  $\sum_i \mu_i$ .

Um resultado mais completo sobre caracterizações de processos de Poisson é o seguinte.

**Teorema 1.17** *Tendo em vista a definição 1.4:*

1.  $X$  é um processo de poisson com intensidade  $\lambda$  em  $S$  se, e somente se, para todo  $B \subset S$  com  $\mu(B) = \int_S \lambda(x)dx < \infty$  e todo  $F \in \mathcal{N}_{lf}$

$$\mathbb{P}(X_B \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B)}}{n!} \int_B \cdots \int_B \mathbb{1}_F(\{x_1, \dots, x_n\}) \prod_{i=1}^n \lambda(x_i) dx_1 \cdots dx_n \quad (1.1)$$

*Observação:* Se  $n = 0$ , a integral é lida como  $\mathbb{1}_F(\emptyset)$

2. Se  $X$  é um processo de Poisson de intensidade  $\lambda$ , então para funções  $f : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$  e  $B \subset S$  com  $\mu(B) < \infty$ ,

$$\mathbb{E}[f(X_B)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B)}}{n!} \int_B \cdots \int_B f(\{x_1, \dots, x_n\}) \prod_{i=1}^n \lambda(x_i) dx_1 \cdots dx_n \quad (1.2)$$

### Demonstração:

A demonstração de (1.2) é consequência de (1.1) por prova padrão. De fato, de (1.1) concluímos (1.2) para  $h$  simples, e tomando uma sequência  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  crescente de funções simples convergindo para  $h$ , o resultado segue diretamente do Teorema da Convergência Monótona.

Nos concentraremos então na demonstração na primeira parte.

Primeiro suponha (1.1) é válida e tome

$$F = \{X \in N_{lf} : A \cap B = \emptyset\},$$

para  $B \in \mathcal{B}^d$  limitado. Segue que  $\mathbb{1}_F(\{x_1, \dots, x_n\}) = 0$  para  $n \geq 1$  e  $\mathbb{1}_F(\emptyset) = 1$ , e portanto

$$\mathbb{P}(\Xi_B = \emptyset) = \mathbb{P}(\Xi_B \in F) = e^{-\mu(B)},$$

e segue do teorema 1.16 que  $\Xi$  é um processo de Poisson de intensidade  $\lambda$ .

Reciprocamente, suponha que  $\Xi$  é um processo de Poisson de intensidade  $\lambda$ . Sabemos que condicionado à  $N(B) = n$ ,  $\Xi_B$  é um processo Binomial com densidade  $f(\xi) = \lambda(\xi)/\mu(B)$ . Ou seja,

$$\Xi_B = \{V_1, \dots, V_n\},$$

onde  $V_1, \dots, V_n$  são vetores aleatórios *iid* com densidade  $f$ .

Segue que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_B \in F) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_B \in F | N(B) = n) \frac{e^{-\mu(B)} \mu(B)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{V_1, \dots, V_n\} \in F) \frac{e^{-\mu(B)} \mu(B)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B)} \mu(B)^n}{n!} \int_B \cdots \int_B \mathbb{1}_F(\{x_1, \dots, x_n\}) \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(x_i)}{\mu(B)} dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B)}}{n!} \int_B \cdots \int_B \mathbb{1}_F(\{x_1, \dots, x_n\}) \prod_{i=1}^n \lambda(x_i) dx_1 \cdots dx_n,
 \end{aligned}$$

concluindo a prova. □

Seguimos agora para uma generalização do resultado acima. Para isso seja  $f$  é uma função mensurável definida em  $\mathbb{R}^n \times N_{lf}$ , e denote por

$$\sum_{\Xi}^I f(x_1, \dots, x_n, \Xi)$$

a soma

$$\sum_{\{x_i\}_1^n \subset \Xi} f(x_1, \dots, x_n, \Xi),$$

onde  $x_1, \dots, x_n$  são elementos distintos de  $\Xi$ .

**Proposição 1.18 (Teorema de Slivnyak-Mecke)** *Se  $f$  é uma função real mensurável positiva definida em  $\mathbb{R}^n \times N_{lf}$ , então*

$$\mathbb{E} \sum_{\Xi}^I f(x_1, \dots, x_n, \Xi) = \int \cdots \int \mathbb{E}[f(x_1, \dots, x_n, \Xi \cup \{x_i\}_i^n)] \prod_{i=1}^n \lambda(x_i) dx_1 \cdots dx_n.$$

**Demonstração:** — Vamos começar fazendo  $n = 1$  e supondo que a função  $f(x, \Xi)$  tem suporte em  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ , no sentido que

$$f(x, \Xi) = f(x, \Xi \cap B),$$

para  $x \in B$  e  $f(x, \Xi) = 0$  para  $x \notin B$ .

Primeiro observe que, pela proposição 1.17, vale que

$$\mathbb{E}[f(x, \Xi \cup \{x\})] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\mu(B))}{n!} \int_B \cdots \int_B f(x, \{x_1, \dots, x_n, x\}) \prod_{i=1}^n \lambda(x_i) dx_i,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Agora, condicionando ao total de pontos de  $X$  em  $B$ , encontramos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Xi} f(x, \Xi) \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Xi} f(x, \Xi) \mid N(B) = n \right) \mathbb{P}(N(B) = n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B)^n}{n!} e^{-\mu(B)} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n f(X_i, \{X_1, \dots, X_n\}) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B)^n}{n!} e^{-\mu(B)} n \mathbb{E} [f(X_n, \{X_1, \dots, X_n\})] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} e^{-\mu(B)} \int_B \dots \int_B f(x_n, \{x_1, \dots, x_n\}) \prod_{i=1}^n \lambda(x_i) dx_i \\
 &= \int_B \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} e^{-\mu(B)} \int_B \dots \int_B f(x, \{x_1, \dots, x_{n-1}, x\}) \prod_{i=1}^{n-1} \lambda(x_i) dx_i \right) \lambda(x) dx \\
 &= \int_B \mathbb{E}[f(x, \Xi \cup \{x\})] \lambda(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[f(x, \Xi \cup \{x\})] \lambda(x) dx
 \end{aligned}$$

O caso  $n \geq 2$  segue por indução.

Neste trabalho só trabalharemos com funções de suporte compacto, de modo que não apresentaremos a demonstração do caso geral. O leitor interessado pode buscar em [10].

□

Para concluir este capítulo apresentaremos, sem prova, um importante resultado sobre a coorelação de funções monótonas em um processo de Poisson.

Começemos então com uma definição.

**Definição 1.19** Uma função real  $f$  do Processo de Poisson é *creciente* se

$$\Xi' \subset \Xi \Leftrightarrow f(\Xi) \geq f(\Xi').$$

Um evento  $E \in \mathcal{F}$  é *creciente* se sua função indicadora o for.

**Proposição 1.20** Se  $f$  e  $g$  são duas funções mensuráveis, crescentes e não-negativas de um Processo de Poisson  $\Xi$ , então

$$\mathbb{E}[f(\Xi)g(\Xi)] \geq \mathbb{E}[f(\Xi)]\mathbb{E}[g(\Xi)] \quad (1.3)$$

Em particular, se  $E_1, E_2 \in \mathcal{N}_f$  são crescentes,

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \geq \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$$

O resultado pode ser visto como um análogo do teorema de FKG para variáveis independentes, que diz que

## 1 Processos de Poisson

se  $X_1, \dots, X_n$  são independentes e  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são positivas e crescentes em cada coordenada, então

$$\mathbb{E}[F(X_1, \dots, X_n)G(X_1, \dots, X_n)] \geq \mathbb{E}[F(X_1, \dots, X_n)]\mathbb{E}[G(X_1, \dots, X_n)].$$

A demonstração é técnica e não será apresentada aqui. A ideia central é condicionar no total de pontos de  $\Xi$  em conjuntos disjuntos de uma partição  $B_1, \dots, B_n$ , usar a desigualdade clássica de FKG, e passar o limite refinando a partição.

## Capítulo 2

# Recobrimento

Neste capítulo estudaremos, ao menos parcialmente, o problema do recobrimento de um compacto  $K$  em  $\mathbb{R}^d$  por bolas centradas em um processo de Poisson, como proposto em [7].

Para ser mais exato, seja  $\Xi_\lambda$  um processo de Poisson de intensidade  $\lambda > 0$  definido em um compacto  $K \subset \mathbb{R}^d$  e  $A = B_{r(A)}(0) \subset \mathbb{R}^d$  a bola de centro em 0 e raio  $r(A)$ . Denote por  $\Xi$  o "processo de bolas" dado por

$$\Xi = \Xi_\lambda + A = \{x + A : x \in \Xi_\lambda\}.$$

Por simplicidade nos referiremos ao processo pontual de Poisson e ao processo de bolas  $\Xi$  ambos por "processo de Poisson".

Com isso diremos que o compacto  $V \subset K$  é coberto por  $\Xi$  se

$$V \subset \bigcup_{B \in \Xi} B.$$

A ideia de recobrimento está intrinsecamente ligada à de espaçamento. De fato, se um conjunto de bolas de raio  $r$  centradas nos pontos de um processo  $\Xi_\lambda$  não cobre  $K$ , então alguma bola de mesmo raio e com centro em algum ponto de  $K$  fora da região coberta não encontra nenhum dos pontos do processo.

Este é um capítulo bastante técnico, com diversos resultados preliminares necessários ao resultado final deste trabalho. Só no próximo capítulo que daremos algum sentido mais adequado aos resultados apresentados aqui.

Os resultados que nos interessarão são assintóticos no número de pontos do processo ou, equivalentemente, em sua intensidade. Mais precisamente, ao final deste capítulo seremos capazes de provar que, para  $K$  compacto de  $\mathbb{R}^d$  com fronteira de medida nula e  $|K| > 0$  e uma constante  $\alpha$  a ser definida, se  $r(A)$  é suficientemente pequena, então

$$\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } K) \approx e^{-\gamma\alpha|K|},$$

onde  $\gamma := \gamma(\lambda, |A|) = \lambda^d |A|^{d-1} e^{-\lambda|A|}$ .

Para chegar a tal resultado seguiremos a seguinte estratégia.



Primeiro estudaremos a probabilidade de recobrimento de um cilindro. Do resultado para o cilindro, tiraremos uma estimativa para a probabilidade de recobrimento de um retângulo em  $\mathbb{R}^d$ . O resultado para o compacto sairá do ladrilhamento de  $K$  por retângulos.

## 2.1 Propriedades Geométricas do Processo de Poisson de Bolas

Para estudar em mais detalhes o problema do recobrimento aleatório de um compacto, será necessário que lancemos mão de alguns resultados preliminares envolvendo, dentre outras coisas, propriedades geométricas das uniões e interseções de bolas. Faremos antes uma série de definições que auxiliarão na demonstração do teorema principal.

Na cortura do cilindro, por exemplo, perguntaremos qual a probabilidade de cobrir um cilindro até certa "altura"  $t$ . Isso significará encontrar um ponto  $x = (x', t)$  que pertence às fronteiras de algumas entre as bolas a cobrir o cilindro, embora não pertença ao interior de nenhuma bola definida pelo processo. Para isso usaremos um conceito de *vetor especial*, que nos servirá para orientar tal cobertura.

**Definição 2.1** Um vetor  $v \neq 0$  é dito *especial* para bolas  $A_1, \dots, A_n$  em  $x$  se  $x \in \cap_1^n \partial A_i$  e  $D_v^\delta(x) \subset \cup_1^n A_i$  para algum  $\delta > 0$ , onde  $D_v^\delta(x) = \{y : |y - x| < \delta \text{ e } \langle v, y - x \rangle < 0\}$ .

Isto é,  $v$  é especial para um conjunto de bolas abertas em um ponto se esse ponto estiver na intersecção das fronteiras desses abertos e algum semidisco de raio delta, na direção contrária à  $v$  a partir do ponto dado, estiver totalmente contido na união desses abertos.

Este conceito será usado mais adiante para "orientar" uma cobertura. Isso ficará claro mais adiante, mas essencialmente perguntaremos se um certo compacto está coberto até um certo ponto, na direção de  $v$ .



(a) Semidisco definido pelo seu raio, o vetor de direção e centro

(b) Representação de  $v$  como vetor especial para  $A_1, A_2$  em  $x$

Figura 2.1: Intuição geométrica acerca de vetores especiais

Para entender melhor o conceito de vetor especial, precisamos antes de alguns fatos bastante intuitivos sobre bolas (e na verdade outros convexos) que listaremos abaixo. Para deixar a leitura mais leve, transferimos as provas de tais resultados para o apêndice.

## 2 Recobrimento

Primeiro vamos tentar entender quais são os vetores especiais para um certo conjunto de bolas em um ponto  $x$  na interseção de suas fronteiras.

Para isso primeiro denote por  $Cone(n_1, \dots, n_k)$  o conjunto  $\{\sum_{i=1}^k c_i n_i : c_i \geq 0\}$ , que nos referiremos como cone gerado pelos vetores  $n_1, \dots, n_k$ .

Os lemas abaixo nos dão uma nova maneira de identificar vetores especiais. O primeiro nos diz que vetores especiais em um ponto  $x$  vivem dentro do cone gerado pelas normais às fronteiras das bolas em  $x$ . O segundo nos diz um condição suficiente para garantir que todo vetor em um cone é de fato especial.

**Lema 2.2** *Seja  $k \geq 1$ . Para quase toda coleção  $\{x_i\}_{i=1}^k$  é valido que, se  $v$  é especial para  $\{A_i\}_{i=1}^k$  em  $x$  e  $n_i$  é normal a  $A_i$  em  $x$ ,  $i = 1, \dots, k$ , então  $v \in Cone(n_1, \dots, n_k)$ .*

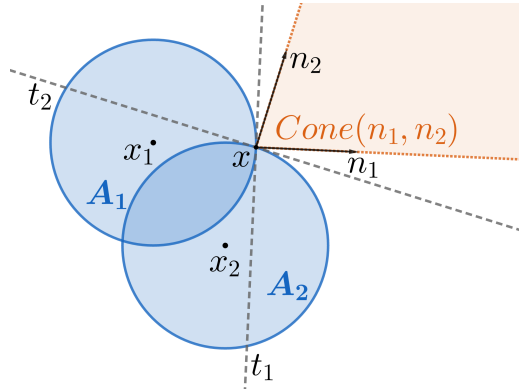


Figura 2.2: Cone gerado pelos vetores normais

**Lema 2.3** *Sejam  $\{y_i\}_1^d \in \partial A$  linearmente independentes e  $n(y_i) = \frac{y_i}{\|y_i\|}$  o vetor normal à  $\partial A$  em  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Nestas condições, se  $v \in Cone^\circ((n(y_i))_1^d)$ , então  $v$  é especial para  $\{A - y_i\}_1^d$  em 0.*

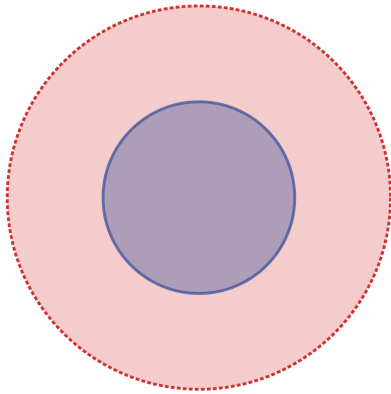
A seguir vamos elencar alguns resultados importantes sobre os pontos sobre as fronteiras de bolas onde podemos encontrar vetores especiais.

Primeiro alguns resultados sobre bolas.

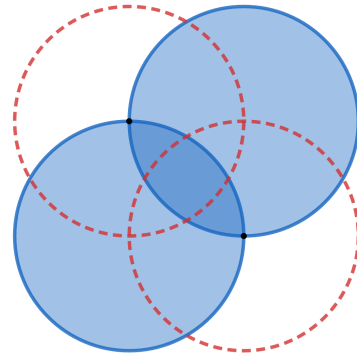
**Lema 2.4** *Se  $A$  é uma bola em  $\mathbb{R}^d$*

- (i) *Para quase toda coleção  $\{x_i\}_{i=1}^d$ , se  $A_i = A + x_i$ , então  $\cap_{i=1}^d \partial A_i$  é um conjunto finito;*
- (ii) *Para quase toda coleção  $\{x_i\}_{i=1}^{d+1}$ , se  $A_i = A + x_i$ , então  $\cap_{i=1}^{d+1} \partial A_i$  é vazio.*

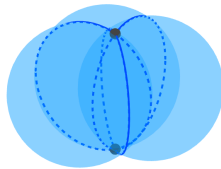
## 2 Recobrimento



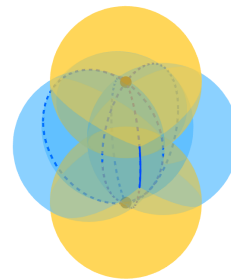
(a) Círculo em  $\mathbb{R}^2$  e centros possíveis para um segundo círculo



(b) Centros possíveis para um terceiro círculo



(c) Três esferas em  $\mathbb{R}^3$



(d) Centros possíveis para uma quarta esfera

Figura 2.3: Ilustração de um argumento o lema acima: quando o número de convexos é maior que  $d$ , o próximo convexo tem apenas um conjunto de pontos de medida zero para seu centro, como é o caso da circunferência em  $\mathbb{R}^2$  e da superfície da esfera em  $\mathbb{R}^3$ , para que a intersecção de suas fronteiras seja não vazia.

Os lemas acima implicam nos seguintes resultados, um pouco menos intuitivos. Para simplificar a leitura, as demonstrações também foram movidas para o apêndice.

**Lema 2.5** Seja  $1 \leq k \leq d - 1$ . Para quase todo  $\{x_i\}_{i=1}^k$ , o conjunto

$$\{v : \exists x \text{ tq } v \text{ é especial para } \{A_i\}_{i=1}^k \text{ em } x\}$$

tem medida de Lebesgue zero.

**Lema 2.6** Para quase todo conjunto  $\{x_i\}_{i=1}^d$ , o conjunto

$$\{\nu : \exists x, x' \text{ diferentes tais que } \nu \text{ é especial para } \{A_i\}_{i=1}^d \text{ em } x \text{ e em } x'\}$$

tem medida de Lebesgue zero.

**Lema 2.7** Seja  $l \geq 1$ . Para quase todo  $\{x_i\}_{i=1}^{d+l}$ , o conjunto

$$\{\nu : \exists x \in \cap_{i=1}^d \partial A_i, y \in \cap_{i=l+1}^{d+l} \partial A_i \text{ tq } \langle \nu, x - y \rangle = 0\}$$

tem medida de Lebesgue nula

## 2 Recobrimento

Em resumo, os resultados acima nos permitem mostrar que

**Lema 2.8** Para todo  $v \in \mathbb{R}^d$ , vale que

(i)  $\mathbb{P}(\exists B_{i=1}^{d+1} \in \Xi \text{ distintos, tais que } \cap_1^{d+1} \partial B_i \neq \emptyset) = 0$

(ii)  $p/k = 1, \dots, d-1$

$$\mathbb{P}(\exists \{B_i\}_1^k \in \Xi \text{ e } x : v \text{ é especial p/ } \{B_i\}_1^k \text{ em } x) = 0$$

(iii)  $\mathbb{P}(\exists \{B_i\}_1^d \in \Xi \text{ e } x, x' \text{ com } x \neq x' : v \text{ é especial p/ } \{B_i\}_1^d \text{ ao mesmo tempo em } x \text{ e em } x') = 0$

(iv)  $\mathbb{P}(\exists \{B_i, B'_i\}_1^d \in \Xi, \{B_i\} \neq \{B'_i\} \text{ e } x \neq x', \langle v, x - x' \rangle = 0 : v \text{ é especial p/ } \{B_i\}_1^d \text{ em } x \text{ e p/ } \{B'_i\}_1^d \text{ em } x') = 0$

**Demonstração:**

(i) Dados  $B_1, \dots, B_{d+1}$  distintos, defina

$$f_v(B_1, \dots, B_{d+1}) = \mathbf{1}(\cap_1^{d+1} \partial B_i \neq \emptyset).$$

Segue da proposição 1.18 e A.1 que

$$\mathbb{E} \sum_{\Xi} f_v(B_1, \dots, B_{d+1}) = \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(\cap_1^{d+1} \partial(x_i + A) \neq \emptyset) dx_1 \dots dx_{d+1} \right] = 0.$$

(ii) Assumimos  $B_1, \dots, B_k$  distintos. Seja

$$f_v(B_1, \dots, B_k) = \mathbf{1}(\exists x \text{ tq } v \text{ é especial para } \{B_i\} \text{ em } x)$$

e tomamos a proposição 1.18 e os lemas 2.5 e o Teorema de Fubini para concluir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \sum_{\Xi} f_v(B_1, \dots, B_k) dv = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} f_v(x_1 + A, \dots, x_d + A) dx_1 \dots dx_{d+1} \right] dv = 0$$

(iii) Se dois dos  $B_i$  coincidirem, voltamos ao item anterior. Assim, assumindo  $B_i$ 's disjuntos, o resultado segue dos lemas 1.18 e 2.6 a mesma integral

(iv) analogamente, assumimos  $B_i$ 's disjuntos e utilizamos o lema 2.7

□

## 2.2 Resultados Intermediários

Vistos alguns resultados geométricos do processo de Poisson de bolas, sigamos para mais algumas definições e resultados preliminares, necessários durante a prova do resultado principal.

**Lema 2.9**  $\Gamma : \mathbb{R}^d \times (\partial A)^d \rightarrow (\mathbb{R}^d)^d$  definida por  $\Gamma(x, y_1, \dots, y_d) = (x - y_1, \dots, x - y_d)$  tem Jacobiano  $|\text{Det}(n_i(y_i))_1^d|$ ,

## 2 Recobrimento

em que  $n_i(y_i)$  é o normal (unitário) a  $A$  em  $y_i$ , e portanto se  $w$  é a medida de Hausdorff  $d - 1$  dimensional, então

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{(\partial A)^d} f((x - y_i)_{i=1}^d) |Det(n_i(y_i))_1^d| dw(y_1) \cdots dw(y_d) dx = \int_{(\mathbb{R}^d)^d} f((x_i)_{i=1}^d) dx_1 \cdots dx_d,$$

para toda função mensurável e integrável  $f : (\mathbb{R}^d)^d \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Para entender a diferencial de  $\Gamma$  em  $(x, y_1, \dots, y_d)$  tome um vetor  $(v, u_1, \dots, u_d)$  com  $v \in \mathbb{R}^d$  e  $u_i$  no plano tangente  $y_i + H_i$  à  $\partial A$  em  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Note que  $H_i = n_i(y_i)^\perp$ .

Assim temos que

$$\frac{\Gamma(x + hv, y_1 + hu_1, \dots, y_d + hu_d) - \Gamma(x, y_1, \dots, y_d)}{h} = (v - u_1, \dots, v - u_d).$$

Considere então o mapa linear  $\Gamma^* : \mathbb{R}^d \times H_1 \times \dots \times H_d \rightarrow (\mathbb{R}^d)^d$  dado por

$$\Gamma^*(x, z_1, \dots, z_d) = \{x - y_i - z_i\}_1^d, \quad (y_1, \dots, y_n \text{ estão fixos}),$$

e note que  $\Gamma^*$  pode ser escrito como a composição  $\Gamma_3 \circ (\Gamma_2 \times I^d) \circ \Gamma_1$ , com  $n_i = n_i(y_i)$  e:

$$\Gamma_1 : \mathbb{R}^d \times \prod H_i \rightarrow \mathbb{R}^d \times \prod H_i, \quad \Gamma_1(x, \{z_i\}) = (x, \{x - \langle x, n_i \rangle n_i - z_i\}),$$

$$\Gamma_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \Gamma_2(x) = \{\langle x, n_i \rangle\}_1^d,$$

$$\Gamma_3 : \mathbb{R}^d \times \prod H_i \rightarrow (\mathbb{R}^d)^d, \quad \Gamma_3((\alpha_i)_1^d, (z_i)_1^d) = \{\alpha_i n_i + z_i\}_1^d$$

Munindo os hiperplanos  $H_i$  com a medida de Hausdorff  $d - 1$  dimensional,  $w(\cdot)$  e  $\mathbb{R}^d$  com a medida de Lebesgue, que temos denotado por  $|\cdot|$ , conseguimos ver que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$  preservam medida.

De fato, se  $d\mu(x, z_1, \dots, z_d) = dx dw(z_1) \cdots dw(z_d)$  então

$$\begin{aligned} \mu(\Gamma_1^{-1}(E \times C_1 \times \dots \times C_d)) &= \int_A \int_{H_1} \cdots \int_{H_d} \prod_{i=1}^d \mathbb{1}_{\{-C_i + x - \langle x, n_i \rangle n_i\}}(z_i) dw(z_d) \cdots dw(z_1) dx \\ &= \mu(E \times C_1 \times \dots \times C_d). \end{aligned}$$

Para ver que  $\Gamma_3$  preserva medida faça  $d\nu(x_1, \dots, x_d) = dx_1 \cdots dx_d$  a produto das medidas de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$  (ou a medida de Lebesgue em  $(\mathbb{R}^d)^d$ ), e considere borelianos em  $\mathbb{R}^d$  da forma

$$C_i = \{x = \alpha n_i + z_i \in \mathbb{R}^d : a_i \leq \alpha \leq b_i, z_i \in D_i \subset H_i\},$$

$i = 1, \dots, d$ .

Primeiro note que  $|C_i| = (b_i - a_i)w(D_i)$  e, além disso,

$$\Gamma_3^{-1}(C_1 \times \dots \times C_d) = \{(\alpha_i)_1^d, (z_i)_1^d : \alpha_i \in [a_i, b_i], z_i \in D_i, i = 1, \dots, d\},$$

## 2 Recobrimento

e portanto

$$\begin{aligned}
 \mu(\Gamma_3^{-1}(C_1 \times \cdots \times C_d)) &= \mu([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \times D_1 \times \cdots \times D_d) \\
 &= \prod_i (b_i - a_i) w(D_i) \\
 &= \prod_i |C_i| \\
 &= v(C_1 \times \cdots \times C_d).
 \end{aligned}$$

Como as funções  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$  preservam medida, segue que

$$|Det\Gamma^*| = |Det\Gamma_2| = |Det(n_i)|.$$

□

**Definição 2.10** *Seja  $A$  uma bola de raio  $r(A)$  centrada na origem em  $\mathbb{R}^d$  e  $\bar{w}$  a medida dada por*

$$d\bar{w} = |Det(n_i(y_i))_{i=1}^d| dw(y_1) \dots dw(y_d)$$

sobre  $(\partial A)^d$ , em que  $n_i(y_i)$  é o normal a  $\partial A$  em  $y_i$ .

Seja  $Cone(n_1, \dots, n_k)$  o cone fechado gerado pelos vetores  $n_1, \dots, n_k$  e seja  $Cone^o(n_1, \dots, n_k)$  o seu interior.

Para  $v \in \mathbb{R}^d$ , defina:

$$\beta_d(A, v) = \int_{\partial A} \dots \int_{\partial A} \mathbb{1}(v \in Cone(n_1(y_1), \dots, n_d(y_d))) d\bar{w}$$

e

$$\beta_d^0(A, v) = \int_{\partial A} \dots \int_{\partial A} \mathbb{1}(v \in Cone^o(n_1(y_1), \dots, n_d(y_d))) d\bar{w}$$

**Definição 2.11** *Defina também as seguintes quantidades*

$$\alpha(A, v) = (d!)^{-1} |A|^{-(d-1)} \beta_d(A, v), \tag{2.1}$$

$$\alpha_0(A, v) = (d!)^{-1} |A|^{-(d-1)} \beta_d^0(A, v),$$

É interessante observar que para  $a > 0$ , a medida  $w(\partial(aA)) = a^{d-1} w(\partial A)$ , de modo que

$$\beta_d^0(aA, v) = a^{(d-1)d} \beta_d^0(A, v) \quad \text{e} \quad \beta_d(aA, v) = a^{(d-1)d} \beta_d(A, v).$$

Além disso  $\beta_d^0(A, v) \leq \beta_d(A, v) \leq [w(\partial A)]^d < \infty$ .

## 2 Recobrimento

Segue assim

$$\alpha(aA, v) = (d!)^{-1}|aA|^{-(d-1)}\beta_d(aA, v) = (d!)^{-1}|A|^{-(d-1)}\beta_d(A, v) = \alpha(A, v),$$

e além disso

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq w(\partial A)^d |A|^{1-d} < \infty \text{ se } r(A)^d < \infty.$$

**Lema 2.12**

$$\beta_d(A, v) = \beta_d^0(A, v) \quad q.s.$$

e

$$\alpha(A, v) = \alpha_0(A, v) \quad q.s.$$

**Demonstração:** Tome  $B$  uma bola em  $\mathbb{R}^d$

$$|B \cap Cone(n_1(y_1), \dots, n_d(y_d))| = |B \cap Cone^o(n_1(y_1), \dots, n_d(y_d))|$$

dessa forma, pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_B \beta_d(A, v) dv &= \int_{\partial A} \dots \int_{\partial A} \int_B \mathbb{1}(v \in Cone(n_1(y_1), \dots, n_d(y_d))) dv d\bar{w} \\ &= \int_{\partial A} \dots \int_{\partial A} |B \cap Cone(n_1(y_1), \dots, n_d(y_d))| d\bar{w} \\ &= \int_{\partial A} \dots \int_{\partial A} |B \cap Cone^o(n_1(y_1), \dots, n_d(y_d))| d\bar{w} \\ &= \int_B \beta_d^0(A, v) dv \end{aligned}$$

Portanto, como  $B$  é arbitrário,  $\beta = \beta_0$  e  $\alpha = \alpha_0$  para quase todo  $v$ . □

Finalmente, é interessante observar que como a distribuição de  $\Xi$ , assim como  $\partial A$  são invariantes por rotações, então  $\beta_d$  e  $\alpha$  não dependem de  $v \in \mathbb{R}^d$ .

**Definição 2.13** Considere  $\Xi' = \{B \in \Xi : 0 \notin B\}$  com  $D_v^\delta = D_v^\delta(0) = \{x : |x| < \delta, \langle x, v \rangle < 0\}$  e defina:

$$\beta_+ = \beta_d^+(A, v, \lambda, \delta) = \beta_d(A, v) / \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D_v^\delta)$$

e

$$\begin{aligned} \beta_- &= \beta_d^-(A, v, \lambda, \delta) = \int_{\partial A} \dots \int_{\partial A} \mathbb{1}(v \in Cone^o(n_1(y_1), \dots, n_d(y_d))) \\ &\quad \times \mathbb{P}(\Xi' \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^\delta) d\bar{w} \end{aligned}$$

Supondo que  $A$  não tenha interior vazio e, assim, que  $\beta_+$  e  $\beta_-$  não sejam nulos, definamos:

$$\alpha_+ = \alpha_+(A, v, \lambda, \delta) = (d!|A|^{d-1})^{-1} \beta_+(A, v), \tag{2.2}$$

$$\alpha_- = \alpha_-(A, v, \lambda, \delta) = (d!|A|^{d-1})^{-1} \beta_-(A, v) \tag{2.3}$$

## 2 Recobrimento

$e$

$$\gamma(A, \lambda) = \lambda^d |A|^{d-1} e^{-\lambda|A|} \quad (2.4)$$

Para finalizar essa seção, note que se trocarmos  $A$  por  $aA$  e  $\delta$  por  $a\delta$  encontramos que

$$\mathbb{P}(\Xi_\lambda + aA \text{ cobrir } D_v^{a\delta}) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{a}\Xi_\lambda + A \text{ cobre } D_v^\delta\right).$$

Além disso

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{a}\Xi_\lambda \cap B = \emptyset\right) = \mathbb{P}(\Xi_\lambda \cap aB = \emptyset) = e^{-\lambda a^d |B|},$$

de modo que  $\frac{1}{a}\Xi_\lambda$  é um processo de Poisson de intensidade  $a^d \lambda$ .

Isso nos mostra que

$$\alpha_+(aA, v, \lambda, a\delta) = \alpha(aA, v) / \mathbb{P}(\Xi_\lambda + aA \text{ cobrir } D_v^{a\delta}) = \alpha(A, v) / \mathbb{P}\left(\frac{1}{a}\Xi_\lambda + A \text{ cobrir } D_v^\delta\right) = \alpha_+(A, v, a^d \lambda, \delta).$$

Analogamente

$$\alpha_-(aA, v, \lambda, a\delta) = \alpha_-(A, v, a^d \lambda, \delta).$$

### 2.3 Recobrimento de um cilindro

A seguir vamos estimar a probabilidade de cobertura de um retângulo do tipo  $[0, t] \times [0, 1]^{d-1}$  pelo processo  $\Xi$ . Para simplificar o argumento vamos identificar quase todos os lados deste retângulo, e trabalharemos com o cilindro  $[0, t] \times T^{d-1}$ , onde  $T^{d-1}$  é o toro  $d - 1$  dimensional.

Assim, para os resultados que seguem,  $\Xi$  denotará o Processo de Poisson em  $\mathbb{R} \times T^{d-1}$  com intensidade  $\lambda$  e  $C_t$  o cilindro  $[0, t] \times T^{d-1}$  para algum  $t \geq 0$ . Também assumimos  $e = (1, 0, \dots, 0)$ , e abusando da notação, denotaremos por  $\cup \Xi = \cup_{B \in \Xi} B$ .

Defina

$$\tau = \tau(\Xi) = \inf\{s \geq 0 : (s, x') \notin \cup \Xi\},$$

ou seja,  $\tau \geq t \Leftrightarrow \Xi$  cobre  $C_t$ .

**Lema 2.14** *Suponha que*

$$2r(A) < \delta < \frac{1}{2}$$

*então a distribuição de  $\tau$  é, exceto pela massa pontual em zero, absolutamente contínua com f.d.p  $\phi(t)$  satisfazendo:*

$$\gamma(A, \lambda) \alpha_-(A, e, \lambda, \delta) P(\tau \geq t) \leq \phi(t) \leq \gamma(A, \lambda) \alpha_+(A, e, \lambda, \delta) P(\tau \geq t), t > 0$$

**Demonstração:** Suponha  $A$  aberto.

Como  $T^{d-1}$  é compacto, temos que  $\tau = t$  se, e só se,  $C_t$  é coberto por  $\Xi$ , mas existe um ponto  $x = (t, x')$  não coberto pelo processo.

Sejam  $B_1, \dots, B_k \in \Xi$  os conjuntos de  $\Xi$  cujo fecho contenha  $x$ .



## 2 Recobrimento

Seque que  $x \in \cap_{i=1}^k \partial B_i$  e, se  $t > 0$  então existe algum  $\epsilon > 0$  tal que  $D_\epsilon^\epsilon(x) \subset \cup_i B_i$ , de modo que  $e$  é especial para  $B_1, \dots, B_k$  em  $x$ .

Agora o lema 2.8 nos permite ignorar a possibilidade de  $k > d$  (porque a probabilidade de a intersecção das fronteiras ser não vazia é 0), e de  $k < d$  (a probabilidade de  $e$  ser especial é 0 neste caso), e considerar que  $k = d$ .

Deste modo

$$\begin{aligned} \tau = t \Leftrightarrow \exists x = (t, x') \text{ e conjuntos } B_1, \dots, B_d \in \Xi : x \in \cap_{i=1}^d \partial B_i \\ \text{e } e \text{ é especial para } B_1, \dots, B_d \text{ em } x, x \notin \cup \Xi \\ \text{e } \Xi \text{ cobre } C_t \end{aligned}$$

Note que, também pelo lema 2.8,  $x$  e  $B_1, \dots, B_d$  são únicos (a menos de reordenação  $\{B_i\}$ ).

Dada então uma função  $g$  positiva e mensurável em  $[0, \infty)$  com  $g(0) = 0$ , defina:

$$\psi(B_1, \dots, B_d, \Xi) = \begin{cases} g(t) \cdot \mathbb{1}(\Xi \text{ cobre } C_t \text{ e } x \notin \cup \Xi), & \text{se } \exists x = (t, x') \text{ tq } x \in \cap_{i=1}^d \partial B_i \\ & \text{e } e \text{ é especial para } \{B_i\} \text{ em } x, t > 0. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

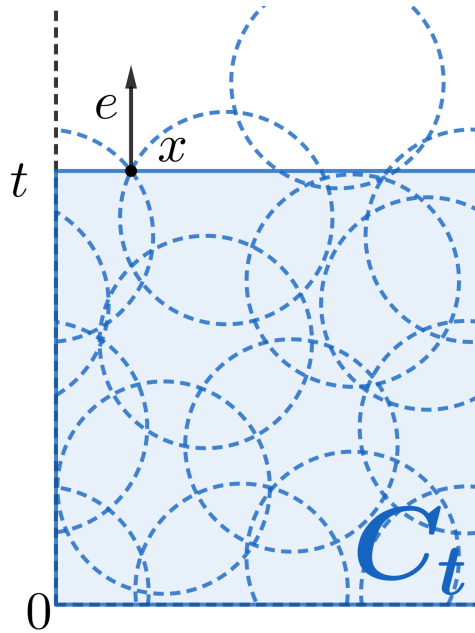


Figura 2.4: Cilindro de altura  $t$ , coberto pelo processo  $\Xi$ . Destaque para vetor especial

Então

$$\sum_{\Xi} \psi(B_1, \dots, B_d, \Xi) = d! g(\tau) \text{ q.s.,}$$

onde o termo  $d!$  apenas conta as permutações de  $\{B_i\}_1^d$  na soma.

## 2 Recobrimento

Logo, pelo lema 1.18,

$$d!\mathbb{E}[g(\tau)] = \int \cdots \int \mathbb{E}\psi(A + x_1, \dots, A + x_d, \Xi \cup \{A + x_i\}_1^d) \lambda^d dx_1 \dots dx_d. \quad (2.5)$$

E fazendo

$$\Psi_d(A) = \int \cdots \int \mathbb{E}\psi(A + x_1, \dots, A + x_d, \Xi \cup \{A + x_i\}_1^d) dx_1, \dots, dx_d \quad (2.6)$$

podemos reescrever a equação (2.5) como:

$$\mathbb{E}[g(\tau)] = (d!)^{-1} \lambda^d \Psi_d(A). \quad (2.7)$$

Agora, pela definição de  $\psi$ , o integrando de (2.6) é nulo a menos que exista  $x \in \mathbb{R} \times T^{d-1}$  e  $y_i \in \partial A, i = 1, \dots, d$ , tal que  $x = x_i + y_i$ .

Assim, fazendo a mudança de variáveis  $x_i = x - y_i$ , o lema 2.9 nos permite dizer que

$$\begin{aligned} \Psi_d(A) = \int_0^\infty \int_{T^{d-1}} \int_{\partial A} \cdots \int_{\partial A} \mathbb{E}[g(t) \mathbb{1}(\Xi \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t \text{ e } x \notin \cup \Xi)] \\ \times \mathbb{1}(e \text{ é especial para } \{A + x - y_i\}_1^d \text{ em } x)) d\bar{w} dx' dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

com  $x = (t, x')$  e  $\bar{w}$  como definido na secção 2.2.

Para reescrever (2.8) de modo mais adequado, primeiro note que

$$\mathbb{E}[g(t) \mathbb{1}(\Xi \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t \text{ e } x \notin \cup \Xi)] = g(t) \mathbb{P}(\Xi \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t \text{ e } x \notin \cup \Xi),$$

e que se  $e$  é especial para  $\{A + x - y_i\}_1^d$  em  $x$ , então  $e$  é especial para  $\{A - y_i\}_1^d$  em  $0 \in \mathbb{R}^d$ .

Posto isso, defina

$$\Phi_d(x, A) = \int_{\partial A} \cdots \int_{\partial A} \mathbb{P}(\Xi \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t \text{ e } x \notin \cup \Xi) \mathbb{1}(e \text{ é especial para } \{A - y_i\}_1^d \text{ em } 0) d\bar{w}.$$

Agora, o lema 2.2 nos garante que se  $e$  é especial para  $\{A - y_i\}_1^d$  em  $0$ , então  $e \in \text{Cone}(n(y_i)_1^d)$ . Além disso o lema 2.3 nos diz que para  $\bar{w}$ -quase toda escolha de  $\{y_i\}_1^d$ , se  $e \in \text{Cone}^\circ(n(y_i)_1^d)$ , então  $e$  é especial para  $\{A - y_i\}_1^d$  em  $0$ . (para  $\bar{w}$ -quase toda escolha de  $\{y_i\}_1^d \in \partial A$  temos  $\text{Det}(n(y_i)_1^d) \neq 0$ , o que garante que  $\{y_i\}_1^d$  são li).

Isso nos permite reescrever a  $\Phi_d(x, A)$  como

$$\Phi_d(x, A) = \int_{\partial A} \cdots \int_{\partial A} \mathbb{P}(\Xi \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t \text{ e } x \notin \cup \Xi) \mathbb{1}(e \in \text{Cone}(n(y_i)_1^d)) d\bar{w}. \quad (2.9)$$

Como  $\Xi$  é invariante por translações por  $(0, x')$ , essa função independe de  $x'$  e portanto podemos escrever

$$\Phi_d(x, A) = \Phi_d(t, A).$$

## 2 Recobrimento

Dessa forma

$$\begin{aligned}\Psi_d(A) &= \int_0^\infty \int_{T^{d-1}} g(t)\Phi_d(t, A)dx'dt \\ &= \int_0^\infty g(t)\Phi_d(t, A)dt.\end{aligned}$$

e pela equação (2.7)

$$\mathbb{E}[g(\tau)] = \frac{\lambda^d}{d!} \int_0^\infty g(t)\Phi_d(t, A)dt.$$

Como  $g$  é arbitrária com  $g(0) = 0$ , podemos dizer que  $\tau$  é absolutamente contínua em  $\tau > 0$  com densidade

$$\phi(t) = \frac{\lambda^d}{d!} \Phi_d(t, A). \quad (2.10)$$

Para estimar  $\phi$ , fixamos  $x$  e  $y_1, \dots, y_d$  de forma que  $e$  seja especial para  $\{A - y_i\}$  em 0, e restrinjamos  $\Xi$  para

$$\Xi'_x := \{A + y \in \Xi : x \notin (A + y)\}.$$

Note que como  $A$  é um bola centrada na origem, temos  $A = -A$  e portanto vale que

$$y + A \in \Xi'_x \Leftrightarrow x \notin y + A \Leftrightarrow y \notin x + A.$$

Segue que  $\Xi'_x$  é formado de bolas com centro em  $\Xi'_x := \Xi_\lambda \cap (x + A)^c$ , que é apenas um processo de Poisson em  $(x + A)^c$ .

A distribuição de  $\Xi'_x$  é, portanto, a distribuição condicional de  $\Xi$  dado que  $x \notin \cup \Xi$ , com

$$\mathbb{P}(x \notin \cup \Xi) = \mathbb{P}(\Xi \cap (x + A) = \emptyset) = e^{-\lambda|A|}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Xi \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t \text{ e } x \notin \cup \Xi) &= \mathbb{P}(\Xi \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t | x \notin \cup \Xi) \cdot \mathbb{P}(x \notin \cup \Xi) \\ &= \mathbb{P}(\Xi'_x \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t) \cdot e^{-\lambda|A|}\end{aligned} \quad (2.11)$$

Definindo  $D = D_e^\delta(x)$  em  $\mathbb{R}^d$ ,  $E = C_t \setminus D$  e denotando  $\Xi'_x \cup \{A + x - y_i\}$  por  $\Xi^*$ , temos que  $\Xi^*$  cobre  $C_t$  se, e só se,  $\Xi^*$  cobre  $D$  e  $E$ .

Agora, como os eventos  $\{\Xi^* \text{ cobrir } E\}$  e  $\{\Xi^* \text{ cobrir } D\}$  são crescentes, segue da desigualdade de correlação dada no lema 1.20 que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } C_t) &\geq \mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } E \cap \Xi^* \text{ cobrir } D) \\ &\geq \mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } E) \cdot \mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } D).\end{aligned}$$

Entretanto, como  $2r(A) < \delta$ , se  $y \in (A + x - y_i) \cap C_t$  então  $|y - x| < 2r(A) < \delta$ , e portanto

$$\cup_{i=1}^d A + x - y_i \subset D,$$

## 2 Recobrimento

e assim

$$\Xi^* \text{ cobre } E \iff \Xi'_x \text{ cobre } E.$$

Da mesma forma se  $y' \in y + A \in \Xi_i \setminus \Xi'_x$ , então  $y \in A + x$  e  $|y' - x| \leq |y' - y| + |y - x| < 2r(A)$ . Segue que  $y + A \subset D$ , o que nos mostra que

$$\Xi'_x \text{ cobre } E \iff \Xi \text{ cobre } E,$$

de onde concluímos que

$$\Xi^* \text{ cobre } E \iff \Xi'_x \text{ cobre } E \iff \Xi \text{ cobre } E$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } C_t) &\geq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } E)\mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } D) \\ &\geq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } C_t)\mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } D) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } C_t) &\geq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } E)\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D) \\ &= \mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } E)\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D) \\ &\geq \mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } C_t)\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D) \end{aligned}$$

Segue que

$$\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } C_t)\mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } D) \leq \mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } C_t) \leq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } C_t)/\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D),$$

e como  $\mathbb{P}(\Xi \text{ cobre } C_t) = \mathbb{P}(\tau \geq t)$ ,

$$\mathbb{P}(\tau \geq t)\mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } D) \leq \mathbb{P}(\Xi^* \text{ cobrir } C_t) \leq \mathbb{P}(\tau \geq t)/\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D).$$

Pela invariância de translação, podemos fazer  $x = 0$  nas equações acima. Assim, fazendo  $\Xi' = \Xi'_0 = \{B \in \Xi : 0 \notin B\}$  e  $D_e^\delta = \mathfrak{D}_e^\delta(0)$  temos

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) \cdot \mathbb{P}(\Xi' \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_e^\delta) \leq \mathbb{P}(\Xi'_x \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t) \leq \mathbb{P}(\tau \geq t)/\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D_e^\delta),$$

ou ainda, por (2.11)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau \geq t) \cdot \mathbb{P}(\Xi' \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_e^\delta)e^{-\lambda|A|} &\leq \mathbb{P}(\Xi \cup \{A + x - y_i\}_1^d \text{ cobrir } C_t, x \notin \cup \Xi) \\ &\leq (\mathbb{P}(\tau \geq t)/\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D_e^\delta))e^{-\lambda|A|}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Assim, pelas equações (2.9), (2.11) e (2.12),

$$\begin{aligned} \Phi_d(t, A) &\leq \int_{\partial A} \dots \int_{\partial A} \mathbb{P}(\tau \geq t)\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D_e^\delta)^{-1}e^{-\lambda|A|}\mathbb{1}(e \in \text{Cone}(n_i(y_i))_{i=1}^d)d\bar{w} \\ &= e^{-\lambda|A|}\beta_d^+(A, e)\mathbb{P}(\tau \geq t) \end{aligned}$$

e, analogamente,

## 2 Recobrimento

$$\Phi_d(t, A) \geq e^{-\lambda|A|} \beta_d^-(A, e) \mathbb{P}(\tau \geq t)$$

Das definições de  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$  e  $\gamma$  (equações (2.2),(2.3),(2.4)), temos que

$$\frac{\lambda^d e^{-\lambda|A|}}{d!} \beta_{\pm}(A, e) = \lambda^d |A|^{d-1} e^{-\lambda|A|} \frac{1}{d! |A|^{d-1}} \beta_{\pm}(A, e) = \gamma(A, \lambda) \alpha_{\pm}(A, e, \lambda, \delta)$$

Segue da equação (2.10) que

$$\gamma(A, \lambda) \alpha_-(A, e, \lambda, \delta) P(\tau \geq t) \leq \phi(t) \leq \gamma(A, \lambda) \alpha_+(A, e, \lambda, \delta) P(\tau \geq t), t > 0,$$

concluindo a demonstração. □

**Lema 2.15** *Se  $2r(A) < \delta < 1/2$ , então*

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) \leq e^{-\gamma\alpha_- t} \tag{2.13}$$

e

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) \geq e^{-\gamma\alpha_+ t} \mathbb{P}(\tau > 0) \geq e^{-\gamma\alpha_+(t+\delta)}$$

**Demonstração:** Tome  $t > 0$  e note que, pelo lema anterior,

$$\frac{d}{dt} (\mathbb{P}(\tau \geq t) e^{\gamma\alpha_- t}) = -\phi(t) e^{\gamma\alpha_- t} + \gamma\alpha_- \mathbb{P}(\tau \geq t) e^{\gamma\alpha_- t} = (-\phi(t) + \gamma\alpha_- \mathbb{P}(\tau \geq t)) e^{\gamma\alpha_- t} \leq 0$$

Assim,  $P(\tau \geq t) e^{\gamma\alpha_- t}$  é decrescente para  $t > 0$  e

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) e^{\gamma\alpha_- t} \leq \lim_{s \rightarrow 0} P(\tau \geq s) e^{\gamma\alpha_- s} = P(\tau > 0) \leq 1,$$

mostrando (2.13).

Analogamente,  $P(\tau \geq t) e^{\gamma\alpha_+ t} \geq P(\tau > 0)$  e

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) \geq e^{-\gamma\alpha_+ t} \mathbb{P}(\tau > 0). \tag{2.14}$$

Falta mostrar que

$$e^{-\gamma\alpha_+ t} \mathbb{P}(\tau > 0) \geq e^{-\gamma\alpha_+(t+\delta)},$$

ou ainda que

$$\mathbb{P}(\tau > 0) \geq e^{-\gamma\alpha_+ \delta}$$

Para isso observe que como  $2r(A) < \delta$ , para  $\epsilon > 0$  a cobertura ou não de  $[0, \epsilon) \times T^{d-1}$  depende apenas nas bolas com centro em

$$[-r(A), \epsilon + r(A)) \subset (-\delta/2, \epsilon + \delta/2) \times T^{d-1}.$$

## 2 Recobrimento

Analogamente, a cobertura de  $[\delta + \epsilon, \delta + 2\epsilon) \times T^{d-1}$  depende apenas de bolas com centro em

$$[\delta + \epsilon - r(A), \delta + 2\epsilon + r(A)) \subset (\delta/2 + \epsilon, 2\epsilon + 3\delta/2) \times T^{d-1}.$$

Assim  $\{\Xi \text{ cobre } [0, \epsilon) \times T^{d-1}\}$  e  $\{\Xi \text{ cobre } [\delta + \epsilon, \delta + 2\epsilon) \times T^{d-1}\}$  são independentes com

$$\mathbb{P}(\{\Xi \text{ cobre } [0, \epsilon) \times T^{d-1}\}) = \mathbb{P}(\{\Xi \text{ cobre } [\delta + \epsilon, \delta + 2\epsilon) \times T^{d-1}\}) = \mathbb{P}(\tau \geq \epsilon).$$

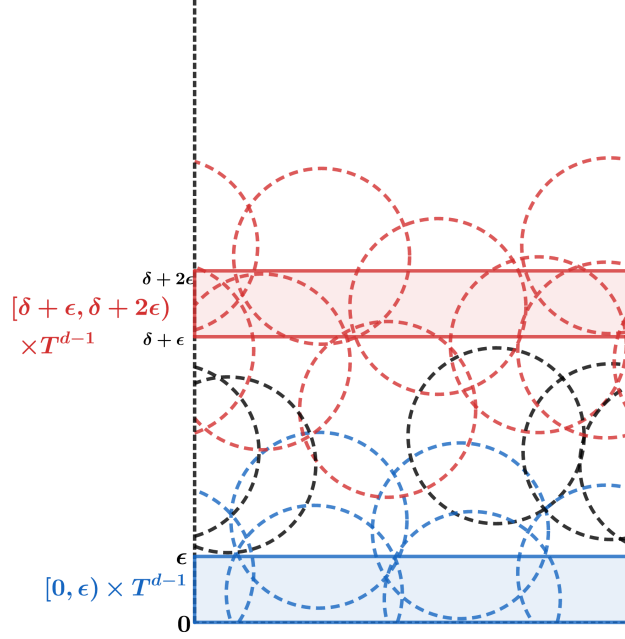


Figura 2.5: Representação de duas regiões do cilindro que distam  $\delta$ . Note que os convexos que cobrem a região em vermelho não são os mesmos que cobrem a região em azul

Assim, como

$$\{\tau \geq \delta + 2\epsilon\} \subset \{\Xi \text{ cobre } [0, \epsilon) \times T^{d-1}\} \cap \{\Xi \text{ cobre } [\delta + \epsilon, \delta + 2\epsilon) \times T^{d-1}\}$$

temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau \geq \delta + 2\epsilon) &\leq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } [0, \epsilon) \cdot \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } [\delta + \epsilon, \delta + 2\epsilon)) \\ &\leq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } [0, \epsilon])^2 \\ &= \mathbb{P}(\tau \geq \epsilon)^2 \end{aligned}$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  encontramos, por (2.14), que

$$\mathbb{P}(\tau > 0)^2 \geq \mathbb{P}(\tau > \delta) \geq e^{\gamma\alpha + t} \mathbb{P}(\tau > 0),$$

e portanto

$$\mathbb{P}(\tau > 0) \geq e^{-\gamma\alpha + \delta}.$$

□

## 2.4 Cobertura de um conjunto em $\mathbb{R}^d$

Feita a cobertura de um cilindro, partamos para a cobertura de um compacto em  $\mathbb{R}^d$ .

A estratégia, como ficará claro mais à frente, será particionar o compacto em cubos de tamanho específico.

Para isso, vamos primeiro estimar a probabilidade de cobertura de um cubo de lado maior que o diâmetro das bolas consideradas. Para isso vamos ver cada cubo como um subconjunto devidamente escolhido de um cilindro, como o da seção anterior, de modo que possamos nos valer dos resultados obtidos ali

**Lema 2.16** *Suponha  $2r(A) < \delta$  e considere o cubo  $Q$  com lado  $s > \delta$ , então:*

$$\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } Q) \leq e^{-\gamma(A,\lambda)\alpha_-(A,e,\lambda,\delta)s^d} \quad (2.15)$$

e

$$\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } Q) \geq e^{-\gamma(A,\lambda)\alpha_+(A,e,\lambda,\delta)(s+\delta)^d} \quad (2.16)$$

**Demonstração:** Considere primeiro a seguinte mudança de escala:

$$s \mapsto as$$

$$\delta \mapsto a\delta$$

$$A \mapsto aA$$

$$\lambda \mapsto a^{-d}\lambda.$$

Para entender qual a ação de tal mudança, primeiro denote por  $\Xi_{(a)}$  o processo  $a\Xi_\lambda + aA = a(\Xi_\lambda + A) = a\Xi$ , e note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a\Xi_\lambda \cap B = \emptyset) &= \mathbb{P}(\Xi_\lambda \cap a^{-1}B = \emptyset) \\ &= e^{-\lambda|a^{-1}B|} \\ &= e^{-\lambda a^{-d}|B|}, \end{aligned}$$

de modo que  $\Xi_{(a)}$  é um processo de bolas de raio  $ar(A)$  centradas em pontos de um processo de Poisson de intensidade  $a^{-d}|A|$ .

Além disso

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobrir } aK) &= \mathbb{P}(a\Xi \text{ cobrir } aK) \\ &= \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } K). \end{aligned}$$

Em particular, como  $aD_v^\delta(0) = D_v^{a\delta}(0)$ , vale que

$$\mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobrir } D_v^{a\delta}) = \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D_v^\delta),$$

e

$$\mathbb{P}(\Xi'_{(a)} \cup \{aA - ay_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^{a\delta}) = \mathbb{P}(\Xi' \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^\delta).$$

## 2 Recobrimento

Segue que essa mudança preserva  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$  e a probabilidade de  $\Xi$  cobrir  $Q$ .

Vale também que

$$\begin{aligned}
 \gamma(A, \lambda) &\mapsto \gamma(aA, a^{-d}\lambda) \\
 \lambda|A|^{d-1}e^{-\lambda|A|} &\mapsto (a^{-d}\lambda)^d|aA|^{d-1}e^{-a^{-d}\lambda|aA|} \\
 &= a^{-d^2}\lambda^d a^{d(d-1)}|A|^{d-1}e^{-a^{-d}\lambda a^d|A|} \\
 &= a^{-d^2}a^{d^2}a^{-d}\lambda^d|A|^{d-1}e^{-a^{-d}a^d\lambda|A|} \\
 &= a^{-d}\lambda^d|A|^{d-1}e^{\lambda|A|} \\
 &= a^{-d}\gamma(A, \lambda),
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\gamma(aA, a^{-d}\lambda)\alpha_-(aA, e, a^{-d}\lambda, a\delta)(as)^d = -\gamma(A, \lambda)\alpha_-(A, e, \lambda, \delta)s^d$$

e

$$\gamma(aA, a^{-d}\lambda)\alpha_+(aA, e, a^{-d}\lambda, a\delta)(as + a\delta)^d = -\gamma(A, \lambda)\alpha_+(A, e, \lambda, \delta)(s + \delta)^d.$$

Dessa forma, é possível recuperar as inequações acima a partir do resultado para algum cubo de largura  $s'$  fixo. De fato, se  $Q_s = [-s/2, s/2]^d$  e  $a = (2s)^{-1}$  encontramos que

$$\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } Q_s) = \mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobrir } aQ_s) = \mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobrir } Q_{\frac{1}{2}}).$$

Assim, tomemos  $s = 1/2$  e observemos que o cilindro fechado  $\bar{C}_1$  pode ser decomposto em  $2^d$  cubos de lado  $1/2$ , onde cada cubo é coberto por  $\Xi_{(a)}$  com a mesma probabilidade que  $Q_{\frac{1}{2}}$ .

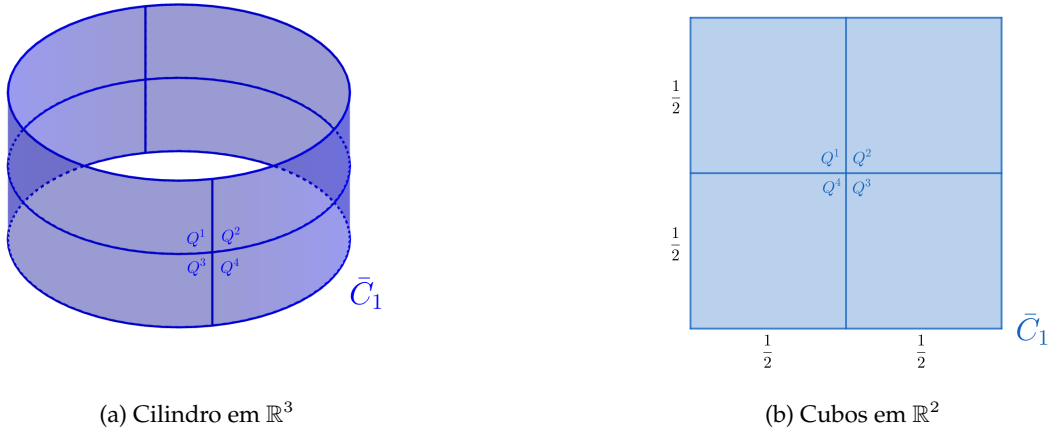


Figura 2.6: Projeção do cilindro em  $\mathbb{R}^{d+1}$  em  $\mathbb{R}^d$ , sendo dividido em  $2^d$  cubos de lado  $1/2$

Segue do lema 1.20 que

$$\mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobrir } \bar{C}_1) \geq [\mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobrir } Q_{\frac{1}{2}})]^{2^d},$$



## 2 Recobrimento

e portanto segue do lema anterior que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } Q_s) &= \mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobrir } aQ_s) \\
 &= \mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobrir } Q_{\frac{1}{2}}) \\
 &\leq [\mathbb{P}(\tau \geq 1)]^{2^{-d}} \\
 &\leq e^{-\gamma(aA, a\lambda)\alpha_-(aA, e, a^{-d}\lambda, a\delta)2^{-d}} \\
 &= e^{-(2s)^d \gamma(A, \lambda)\alpha_-(A, e, \lambda, \delta)2^{-d}} \\
 &= e^{-\gamma(A, \lambda)\alpha_-(A, e, \lambda, \delta)s^d},
 \end{aligned}$$

mostrando a primeira desigualdade, (2.15).

Para a segunda desigualdade, em (2.16), escolhemos  $a = (s + \delta)^{-1}$  e notamos que  $as < a\delta < 1$  e que  $as + a\delta = 1$ , de modo que  $as = 1 - a\delta$ .

Assim  $aQ_s = Q_{as}$  pode ser visto como um subconjunto de  $\bar{C}_{1-a\delta}$ , e portanto

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\Xi \text{ cobre } Q_s) &= \mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobre } Q_{as}) \\
 &\leq \mathbb{P}(\Xi_{(a)} \text{ cobre } \bar{C}_{1-a\delta}) \\
 &= \mathbb{P}(\tau \geq 1 - a\delta) \\
 &\leq e^{-\gamma(aA, a\lambda)\alpha_+(aA, e, a^{-d}\lambda, a\delta)(1-a\delta+a\delta)} \\
 &= e^{-\gamma(A, \lambda)\alpha_+(A, e, \lambda, \delta)(s+\delta)^d}.
 \end{aligned}$$

□

Para concluir este capítulo, vamos calcular estimativas para a probabilidade de cobertura de um compacto  $K$  em  $\mathbb{R}^d$ .

Para isso começaremos dividindo  $\mathbb{R}^d$  em cubos de tamanho  $s$ , maior que o diâmetro das bolas do processo. Feito isso usaremos, mais uma vez, um argumento de independência para obter um limite superior para a probabilidade, e a desigualdade de correlação 1.20 para o limite inferior.

Seja então  $\mathcal{F}_s$  a família de cubos  $\{s([n_1, n_1 + 1] \times [n_d, n_d + 1]) : (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d\}$ . Ou seja, cubos com lados de tamanho  $s$ , paralelos aos eixos coordenados.

**Lema 2.17** *Suponha que  $K$  seja um compacto em  $\mathbb{R}^d$  e sejam  $n_s = \#\{Q \in \mathcal{F}_s : Q \subset K\}$  e  $m_s = \#\{Q \in \mathcal{F}_s : Q \cap \partial K \neq \emptyset\}$ . Se  $2r(A) < \delta < s$ , então*

$$P(\Xi \text{ cobrir } K) \leq e^{-\gamma\alpha_-(s-\delta)^d n_s}$$

$$P(\Xi \text{ cobrir } K) \geq e^{-\gamma\alpha_+(s+\delta)^d (n_s + m_s)}$$

**Demonstração:** Ordena-se os cubos de forma que

$$\{Q_i\}_1^{n_s} = \{Q \in \mathcal{F}_s : Q \subset K\} = Q_{int}$$

2 Recobrimento

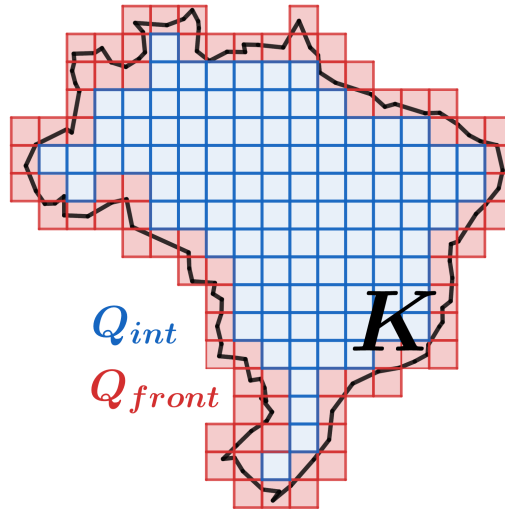


Figura 2.7: Compacto  $K$  contido em conjunto de cubos. Cubos em vermelho encontram sua fronteira, enquanto cubos em azul estão inteiramente contidos em seu interior

e

$$\{Q_i\}_{n_s+1}^{n_s+m_s} = \{Q \in \mathcal{F}_s : Q \cap \partial K \neq \emptyset\} = Q_{front}$$

Para cada  $Q_i$ , denote por  $\tilde{Q}_i$  o cubo concêntrico àquele, com lado  $s - \delta$ , ou seja,  $\tilde{Q}_i \subset Q_i$ . Pela intuição geométrica a seguir e pela equação (2.15), temos que os eventos  $\{\Xi \text{ cobre } \tilde{Q}_i\}$  e  $\{\Xi \text{ cobre } \tilde{Q}_j\}$  são independentes  $\forall i \neq j$

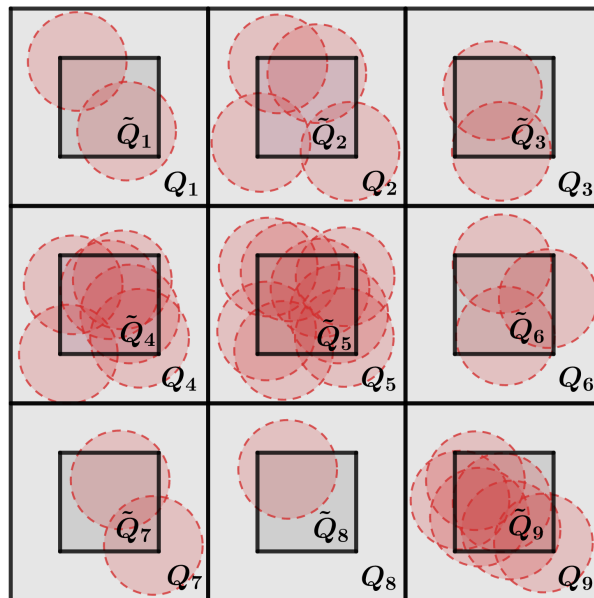


Figura 2.8: Cubos em duas dimensões com bolas centradas em pontos do cubo interno

Dessa forma

## 2 Recobrimento

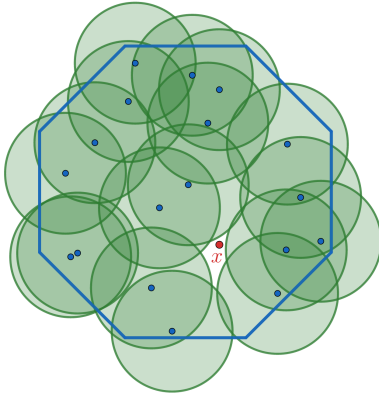
$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } K) &\leq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir todo } Q \text{ em } Q_{int}) \\
 &\leq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir todo } \tilde{Q}_i, i \in [1, n_s] \cap \mathbb{Z}) \\
 &= \prod_{i=1}^{n_s} \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } \tilde{Q}_i) \\
 &\leq e^{-\gamma\alpha_-(s-\delta)^d n_s}
 \end{aligned}$$

Note que  $K \subset \cup_1^{n_s+m_s} Q_i$ , então, pela desigualdade de correlação e pelo lema 1.20, segue que:

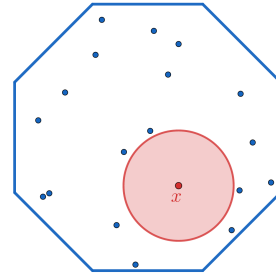
$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } K) &\geq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir todo } Q_i, \text{ para } i \in [1, n_s + m_s] \cap \mathbb{Z}) \\
 &\geq \prod_{i=1}^{n_s+m_s} \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } Q_i) \\
 &\geq e^{-\gamma\alpha_+(s+\delta)^d (n_s+m_s)}
 \end{aligned}$$

□

Dotados de uma forma de aproximar a probabilidade de recobrimento a partir de uma grade dentro da qual o compacto de estudo está inteiramente contido, podemos provar o teorema citado na introdução desse capítulo. Isso será feito já em termos de Espaçamento, dada a conexão proposta anteriormente e que podemos verificar nas figuras abaixo:



(a) Bolas em torno de pontos em um compacto, com destaque para um ponto  $x$  não coberto



(b) Bola de mesmo raio que as anteriores, em torno do ponto  $x$ , não encontrando os pontos iniciais

Figura 2.9: Intuição acerca das definições de Recobrimento e Espaçamento

## Capítulo 3

# Espaçamento

Postos os resultados importantes sobre cobertura de um compacto em  $\mathbb{R}^d$ , estamos prontos para voltar nossa atenção ao problema de espaçamento maximal.

Para tanto, considere um compacto  $K \subset \mathbb{R}^d$  e tome  $X_1, \dots, X_n \subset \mathbb{R}^d$  vetores aleatórios uniformemente distribuídos em  $K$ .

É um problema clássico da estatística extremal, a tentativa de entender a distribuição de quantidades maximais associadas a tais vetores.

Em uma dimensão, por exemplo, tomando as estatísticas de ordem  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$  da amostra dada, podemos nos perguntar sobre a distribuição de  $X_{(n)} - X_{(n-1)}$  ou  $X_{(2)} - X_{(1)}$ , ou até mesmo sobre a distribuição conjunta de  $X_{(k)} - X_{(k-1)}$ ,  $k = 2, \dots, n$ .

Em 1939 lévy mostrou em [9] que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n\Delta_n - \log n \leq u) = e^{-e^{-u}},$$

enquanto Devroye mostra em [6] que

$$\liminf \frac{n\Delta_n - \log n}{\log \log n} = 0$$

e

$$\limsup \frac{n\Delta_n - \log n}{\log \log n} = 2.$$

Em dimensões superiores são várias as formas de definir quantidades análogas. Em [5], por exemplo, os autores estudam a distribuição da maior distância entre pontos do processo. Ou seja,  $\Delta_n = \max\{|X_i - X_j|, i, j = 1, \dots, n\}$ .

Neste trabalho vamos apresentar uma versão dos resultados acima proposta por Jason em [8], onde o espaçamento  $\Delta_n$  é medido pelo diâmetro da maior bola contida em  $K$  que não contém pontos da amostra.

Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n\Delta_n^d - \log n \leq u - (d-1) \log \log n - \log \alpha) = e^{-e^{-u}},$$

### 3 Espaçamento

$$\liminf \frac{n\Delta_n^d - \log n}{\log \log n} = d - 1$$

e

$$\limsup \frac{n\Delta_n^d - \log n}{\log \log n} = d + 1,$$

onde  $\alpha$  é uma constante a ser definida, associada à geometria da bola.

## 3.1 Notação, Definições e Resultado Principal

Seja  $\Xi_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  uma amostra aleatória de pontos em  $K \subset \mathbb{R}^d$ . Assuma que  $|\partial K| = 0$  e, por simplicidade, que  $|K| = 1$ . Tomando  $A$  como uma bola centrada na origem, então Janson [8] define o espaçamento maximal como

$$\Delta_n = \sup\{r > 0 : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ tal que } x + rA \subset K \setminus \Xi_n\}.$$

Ou seja, o  $\Delta_n$  é proporcional ao raio da maior bola  $A$  em  $K$  que não encontra pontos de  $\Xi_n$ .

Defina então o Volume Maximal por

$$V_n = |\Delta_n A|,$$

que assumindo  $|A| = 1$  nos dá que

$$V_n = \Delta_n^d.$$

O termo constant  $\alpha > 0$  vem de (2.1) no capítulo anterior e é dada por

$$\alpha := \frac{1}{d!} \int_{\partial A} \cdots \int_{\partial A} |Det(n(y_i)_1^d)| \mathbb{1}(e \in Cone(n(y_i)_1^d)) dw(y_1) \cdots dw(y_d),$$

onde  $w$  denota a medida de Hausdorff  $d - 1$  dimensional,  $n(y)$  o vetor normal à  $\partial A$  em  $y$ ,  $e = (1, 0, \dots, 0)$  e  $Cone(n(y_i)_1^d)$  o cone gerado por  $(n(y_i)_1^d)$ , como no capítulo anterior.

Lembrando que  $d\bar{w} = |Det(n(y_i)_1^d)| dw(y_1) \cdots dw(y_d)$  podemos fazer

$$\alpha := \frac{1}{d!} \int_{(\partial A)^d} \mathbb{1}(e \in Cone(n(y_i)_1^d)) d\bar{w}(y_1, \dots, y_d). \quad (3.1)$$

Jason mostra que

$$\alpha = \frac{1}{d!} \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \right), \text{ para } d \geq 3$$

mas nós não apresentaremos tais cálculos.

Posto isso estamos prontos para enunciar o resultado principal deste capítulo.

**Teorema 3.1** *Seguindo a notação acima, se  $U$  é uma variável aleatória com  $\mathbb{P}(U \leq u) = e^{-e^{-u}}$ , então*

$$nV_n - \log n - (d - 1) \log \log n - \log \alpha \rightarrow U \quad (3.2)$$

em distribuição,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{nV_n - \log n}{\log \log n} = d - 1 \text{ q.s.} \quad (3.3)$$

### 3 Espaçamento

e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{nV_n - \log n}{\log \log n} = d + 1 \text{ q.s.} \quad (3.4)$$

#### 3.1.1 Estratégia da Prova

O primeiro passo será relacionar o problema de espaçamento com o problema de recobrimento colocado no capítulo anterior.

Para isso primeiro considere, sem perda de generalidade, que  $A$  é a bola aberta de volume unitário, e note que como  $X_i \in x + rA \Leftrightarrow x \in X_i - rA = X_i + rA$ , e portanto

$$\begin{aligned} \Delta_n \geq r &\iff \exists x \in K \text{ tal que } x + rA \subset K \setminus \Xi_n, \quad i = 1, \dots, n \\ &\iff \exists x \in K \text{ tal que } x + \subset K \text{ e } rAx \notin X_i + rA, \quad i = 1, \dots, n \\ &\iff \exists x \in K \text{ tal que } x + \subset K \text{ e } x \notin \cup_{i=1}^n X_i + rA \end{aligned}$$

Assim, fazendo  $K_r = \{x \in K : x - rA \subset K\}$ , temos que

$$\Delta_n \geq r \iff K_r \text{ não é coberto por } \Xi_n + rA.$$

Ou, equivalentemente,

$$\{\Delta_n < r\} = \{K_r \text{ é coberto por } \Xi_n + rA\}.$$

Isso relaciona quase diretamente o problema de espaçamento com o problema de recobrimento abordado anteriormente, falta apenas substituir  $\Xi_n$  por um processo de Poisson.

Para isso vamos substituir  $n$  por  $\{N_t\}_{t \geq 0}$ , um Processo (temporal) de Poisson com intensidade unitária.

Isso substituirá o processo Binomial  $\Xi_n = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$  pelo processo de Poisson  $\Xi_t = \{\Xi_1, \dots, \Xi_{N_t}\}$ , em  $K$  de intensidade  $t$ , nos dando acesso a todos os resultados do capítulo anterior.

Com isso, como  $N_t \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , os resultados acima seriam equivalentes à

$$N_t V_{N_t} - \log N_t - (d-1) \log \log N_t - \log \alpha \rightarrow U$$

em distribuição,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t V_{N_t} - \log N_t}{\log \log N_t} = d - 1 \text{ q.s.}$$

e

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t V_{N_t} - \log N_t}{\log \log N_t} = d + 1 \text{ q.s..}$$

Para melhorar um pouco mais as expressões acima, defina

$$\Delta(t) = \Delta_{N_t} \text{ e } V(t) = V_{N_t} = \Delta(t)^d,$$

e como  $N_t \sim \text{Poisson}(t)$ ,  $\frac{N_t}{t} \rightarrow 1$  q.s. e  $(\frac{N_t}{t} - 1) \log t \rightarrow 0$  q.s., podemos ver que as afirmações do teorema equivalem a

$$tV(t) - \log t - (d-1) \log \log t - \log \alpha \rightarrow U \quad (3.5)$$

### 3 Espaçamento

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{tV(t) - \log t}{\log \log t} = d - 1 \text{ q.s.} \quad (3.6)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{tV(t) - \log t}{\log \log t} = d + 1 \text{ q.s.} \quad (3.7)$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} N_t V(t) - tV(t) &= \left( \frac{N_t}{t} - 1 \right) tV(t) \\ &= \left( \frac{N_t}{t} - 1 \right) \log t + \left( \frac{N_t}{t} - 1 \right) (tV(t) - \log t) \\ &= \left( \frac{N_t}{t} - 1 \right) \log t + \left( \frac{N_t}{t} - 1 \right) \log \log t \left( \frac{tV(t) - \log t}{\log \log t} \right) \end{aligned}$$

e assim, se (3.6) e (3.7) são válidas então

$$N_t V(t) - tV(t) \rightarrow 0 \text{ q.s.,}$$

quando  $t \rightarrow \infty$ .

Analogamente

$$\log N_t - \log t = \log \frac{N_t}{t} \rightarrow 0 \text{ q.s.,}$$

e

$$\log \log N_t - \log \log t = \log \left( \log \frac{N_t}{t} + \log t \right) - \log \log t \rightarrow 0 \text{ q.s.,}$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , mostrando que as equações (3.5), (3.6) e (3.7) implicam nas equações (3.2), (3.3) e (3.4).

Colocado isso, note que, como vimos acima,  $\Delta(t) < r$  se, e só se,  $K_r$  é coberto por  $\Xi_t + rA$ . Mas como  $x + rA$  só alcança  $K_r$  se  $x \in K$ , podemos estender nosso processo de Poisson para todo o  $\mathbb{R}^d$  e pensar o processo de Poisson  $\{X_i\}_{i=1}^{N_t}$  em  $K$  como um subconjunto de um processo de Poisson  $\Xi_t$  de intensidade  $t$  em  $\mathbb{R}^d$ .

#### 3.1.2 Alguns Lemas Intermediários

Os cálculos envolvidos na prova do teorema principal podem ser tediosos, por isso é interessante lembrarmos alguns resultados do capítulo passado que nos serão úteis, já na forma que nos será útil.

Nos focaremos principalmente no lema 2.17 que nos garante que se  $2r(A) < \delta < s$ , então

$$e^{-\gamma\alpha_+(s+\delta)^d(n_s+m_s)} \leq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } K) \leq e^{-\gamma\alpha_-(s-\delta)^d n_s}$$

onde  $n_s = \#\{Q \in \mathcal{F}_s : Q \subset K\}$  e  $m_s = \#\{Q \in \mathcal{F}_s : Q \cap \partial K \neq \emptyset\}$  e  $\mathcal{F}_s = \{s([n_1, n_1 + 1] \times [n_d, n_d + 1]) : (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d\}$  é um reticulado de cubos de lado  $s$ .

Lembre também que

$$\gamma := \gamma(A, \lambda) = \lambda^d |A|^{d-1} e^{-\lambda|A|},$$

### 3 Espaçamento

e se  $D_v^\delta = D_v^\delta(0) = \{x : |x| < \delta, \langle x, v \rangle < 0\}$  temos

$$\alpha_+ = \alpha_+(A, v, \lambda, \delta) = \frac{(d!|A|^{d-1})^{-1}}{\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D_v^\delta)} \int_{(\partial A)^d} \mathbb{1}(v \in \text{Cone}(n(y_i)_1^d)) d\bar{w}$$

e

$$\alpha_- = \alpha_-(A, v, \lambda, \delta) = (d!|A|^{d-1})^{-1} \int_{(\partial A)^d} I \mathbb{1}(v \in \text{Cone}^\circ(n(y_i)_1^d)) \mathbb{P}(\Xi' \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^\delta) d\bar{w},$$

onde  $\Xi' = \{B \in \Xi : 0 \notin B\}$ .

Aqui precisamos tomar cuidado com alguns pontos importantes. Primeiro que nosso processo pontual possui intensidade  $t$ , com bolas do tipo  $rA$  centradas nestes pontos. Ou seja, aqui tomaremos  $\Xi$  como sendo

$$\Xi_t^r := \Xi_t + rA$$

e

$$\Xi'_{t,r} = \{B \in \Xi_t^r : 0 \notin B\}.$$

De modo que

$$e^{-\gamma \alpha_+(s+\delta)^d (n_s + m_s)} \leq P(\Delta(t) < r) = P(\Xi_t^r \text{ cobrir } K_r) \leq e^{-\gamma \alpha_-(s-\delta)^d n_s},$$

com

$$\gamma := \gamma(t, r) = t^d |rA|^{d-1} e^{-t|rA|} = t^d r^{d(d-1)} e^{-tr^d},$$

e

$$\alpha_+(rA, v, t, \delta) = \frac{(d!r^{d(d-1)})^{-1}}{\mathbb{P}(\Xi_t^r \text{ cobrir } D_v^\delta)} \int_{(r\partial A)^d} \mathbb{1}(v \in \text{Cone}(n(y_i)_1^d)) d\bar{w} \quad (3.8)$$

e

$$\alpha_-(rA, v, t, \delta) = (d!r^{d(d-1)})^{-1} \int_{(r\partial A)^d} \mathbb{1}(v \in \text{Cone}^\circ(n(y_i)_1^d)) \mathbb{P}(\Xi'_{t,r} \cup \{rA - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^\delta) d\bar{w}, \quad (3.9)$$

Agora, para o primeiro resultado, note que queremos

$$\mathbb{P}(tV(t) - \log t - (d-1) \log \log t - \log \alpha < u) = \mathbb{P}\left(\Delta(t) < \left(\frac{\log t + (d-1) \log \log t + \log \alpha + u}{t}\right)^{1/d}\right),$$

o que nos levará a trabalhar com bolas de raio

$$r := r(t) = \left(\frac{\log t + (d-1) \log \log t + \log \alpha + u}{t}\right)^{1/d}$$

de modo que  $r \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Para nos livrarmos dos termos  $\mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } D_v^\delta)$  e  $\mathbb{P}(\Xi' \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^\delta)$  nas expressões de  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$ , precisaremos que  $\delta \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Para isso trabalharemos com  $\delta = r\theta$ , onde  $\theta$  será uma constante definida abaixo.

Tudo isso nos leva ao seguinte lema.

**Lema 3.2** *Se  $\theta = 3R(A)$ , onde  $R(A)$  é o raio de  $A$  e  $\delta = r\theta$ , então  $\alpha_+ = \alpha_+(tr^d)$  e  $\alpha_- = \alpha_-(tr^d)$  nas equações (3.8) e*



### 3 Espaçamento

(3.9), e

$$\lim_{tr^d \rightarrow \infty} \alpha_+ = \lim_{tr^d \rightarrow \infty} \alpha_- = \alpha.$$

**Demonstração:** Primeiro note que para  $L \subset \partial A$ , temos  $w(rL) = r^{d-1}w(L)$ . Além disso  $n(ry_i) = n(y_i)$  para todo  $y_i \in \partial A$ , de modo que  $\bar{w}$  em  $r\partial A$  é tal que

$$\begin{aligned} \int_{(r\partial A)^d} f(n(y_i)_1^d) d\bar{w} &= \int_{(r\partial A)^d} f(n(y_i)_1^d) |Det(n(y_i)_i^d)| dw(y_1) \cdots dw(y_d) \\ &= r^{d(d-1)} \int_{(\partial A)^d} f(n(y_i)_1^d) |Det(n(y_i)_i^d)| dw(y_1) \cdots dw(y_d) \\ &= r^{d(d-1)} \int_{(\partial A)^d} f(n(y_i)_1^d) d\bar{w}. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos de (3.1) e (3.8) que

$$\begin{aligned} \alpha_+(rA, v, t, r\theta) &= \frac{(d!r^{d(d-1)})^{-1}}{\mathbb{P}(\Xi_t^r \text{ cobrir } D_v^{r\theta})} \int_{(r\partial A)^d} \mathbf{1}(v \in Cone(n(y_i)_1^d)) d\bar{w} \\ &= \frac{(d!)^{-1}}{\mathbb{P}(\Xi_t^r \text{ cobrir } D_v^{r\theta})} \int_{(\partial A)^d} \mathbf{1}(v \in Cone(n(y_i)_1^d)) d\bar{w} \\ &= \alpha / \mathbb{P}(\Xi_t^r \text{ cobrir } D_v^{r\theta}). \end{aligned}$$

Observe agora que como  $rD_v^\theta = rD_v^{r\theta}$ , então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Xi_t^r \text{ cobrir } D_v^{r\theta}) &= \mathbb{P}(D_v^{r\theta} \subset \cup_{x \in \Xi_t} (x + rA)) \\ &= \mathbb{P}(D_v^\theta \subset \cup_{x \in \Xi_t} ((x/r) + A)) \\ &= \mathbb{P}(D_v^\theta \subset \cup_{x \in \Xi_t/r} (x + A)). \end{aligned}$$

Mas note que para  $B \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{P}(\Xi_t/r \cap B = \emptyset) = \mathbb{P}(\Xi_t \cap rB = \emptyset) = e^{-t|rB|} = e^{-tr^d|B|},$$

de modo que  $\Xi/r$  é um processo de Poisson com intensidade  $tr^d$  e

$$\mathbb{P}(\Xi_t^r \text{ cobrir } D_v^{r\theta}) = \mathbb{P}(\Xi_{tr^d}^1 \text{ cobrir } D_v^\theta)$$

nos dando que

$$\alpha_+(rA, v, t, r\theta) = \alpha / \mathbb{P}(\Xi_{tr^d}^1 \text{ cobrir } D_v^\theta) = \alpha_+(A, v, tr^d, \theta).$$

Analogamente, temos que

$$\mathbb{P}(\Xi'_{t,r} \cup \{rA - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^{r\theta}) = \mathbb{P}(\Xi'_{tr^d,1} \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^\theta)$$

### 3 Espaçamento

e a equação (3.9) nos dá que

$$\begin{aligned}
\alpha_-(rA, v, t, r\theta) &= (d!r^{d(d-1)})^{-1} \int_{(r\partial A)^d} \mathbb{1}(v \in \text{Cone}^\circ(n(y_i)_1^d)) \mathbb{P}(\Xi'_{t,r} \cup \{rA - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^{r\theta}) d\bar{w} \\
&= (d!)^{-1} \int_{(\partial A)^d} \mathbb{1}(v \in \text{Cone}^\circ(n(y_i)_1^d)) \mathbb{P}(\Xi'_{tr^d,1} \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^\theta) d\bar{w} \\
&= \alpha_-(A, v, tr^d, \theta).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Para mostrar que  $\alpha_+ \rightarrow \alpha$ , basta mostrar que  $\mathbb{P}(\Xi_w^1 \text{ cobrir } D_v^\theta) \rightarrow 1$ , quando  $tr^d \rightarrow \infty$ .

Para isso faça  $w = tr^d$  e lembre que, fixando  $\delta' > 2r(A)$  e  $s > \delta'$ , o lema 2.17 nos diz que

$$\mathbb{P}(\Xi_w^1 \text{ cobrir } D_v^\theta) \geq \exp(-\gamma(w, 1)\alpha_+(A, v, w, \delta')(s + \delta')^d(n_s + m_s)),$$

com  $\gamma(w, 1) = w^d e^{-w} \rightarrow 0$  quando  $w \rightarrow \infty$ .

Além disso como  $\mathbb{P}(\Xi_w^1 \text{ cobrir } D_v^{\delta'})$  é crescente em  $w$ , então para  $w > 1$  temos

$$\alpha_+(A, v, w, \delta') = \alpha / \mathbb{P}(\Xi_w^1 \text{ cobrir } D_v^{\delta'}) \leq C\alpha,$$

onde  $C^{-1} = \mathbb{P}(\Xi_1^1 \text{ cobrir } D_v^{\delta'})$ .

Isso nos garante que

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Xi_w^1 \text{ cobrir } D_v^\theta) \geq \lim_{w \rightarrow \infty} e^{-\gamma\alpha_+(s+\theta)^d(n_s+m_s)} = 1,$$

e

$$\lim_{tr^d \rightarrow \infty} \alpha_+(tr^d) = \alpha.$$

Para a convergência de  $\alpha_-$  faça novamente  $w = tr^d$ , e tome  $y_1, \dots, y_d \in \partial A$  tal que  $v$  é especial para  $\{A - y_i\}_1^d$  em 0 (isso acontece para  $\bar{w}$  quase toda escolha de  $y_1, \dots, y_d$ , de acordo com o lema 2.3). Com isso, sabemos que existe  $0 < \epsilon < R(A)$  tal que  $\{A - y_i\}_1^d$  cobre  $D_v^\epsilon$ , de modo que

$$\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^\theta) = \mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^\theta \setminus D_v^\epsilon).$$

Tome então  $R := R(A)$  o raio de  $A$  e note que pelo correlação positiva dos processos de Poisson, vista em (1.3),

$$\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^\theta \setminus D_v^\epsilon) \geq \mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^\theta \setminus D_v^{2R}) \mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^{2R} \setminus D_v^\epsilon).$$

Note agora que  $\Xi'_{w,1}$  é formada por bolas do tipo  $x + A$  com  $x \in \Xi_w$  e  $0 \notin x + A$  (ou  $x \notin A$ ), de modo que  $\Xi'_{w,1}$  e  $\Xi_w^1$  coincidem fora de  $A$ . Como a cobertura de  $D_v^\theta \setminus D_v^{2R}$  não depende de bolas com centro em  $A$ , vale que

$$\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^\theta \setminus D_v^{2R}) = \mathbb{P}(\Xi_w^1 \text{ cobrir } D_v^\theta \setminus D_v^{2R}) \geq \mathbb{P}(\Xi_w^1 \text{ cobrir } D_v^\theta) \rightarrow 1,$$

quando  $w \rightarrow \infty$ .

Para mostrar que

$$\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \cup \{A - y_i\}_1^d \text{ cobrir } D_v^\theta) \rightarrow 1$$

### 3 Espaçamento

quando  $w \rightarrow \infty$ , basta mostrar que

$$\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^{2R} \setminus D_v^\epsilon) \rightarrow 1, \quad (3.11)$$

que faremos a seguir usando um argumento simples de particionamento que pode ser facilmente pulado.

Feito isso, o resultado sai do teorema da convergência dominada aplicado à (3.10).

Para mostrar (3.11), primeiro usamos novamente a correlação positiva dos processos de Poisson para mostrar que

$$\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^{2R} \setminus D_v^\epsilon) \geq \mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^{2R} \setminus D_v^R) \mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^R \setminus D_v^\epsilon).$$

Seja agora  $B_1(0)$  a bola de raio 1 centrada na origem e tome  $B \in \partial B_1(0) \cap D_v^1$  uma região fronteira de  $B_1(0)$  com diâmetro  $\kappa < 1$ , de modo que  $B$  esteja também na fronteira de  $D_v^1$ .

Defina então  $B(a, b) = \{rx : x \in B, a < r < b\}$  a região de  $D_v^b \setminus D_v^a$  delimitada pelas homotetias de  $B$ , de modo que se  $x \in B(a, b)$ , então existe  $y \in B$  e  $a < r < b$  tais que  $x = ry$ .

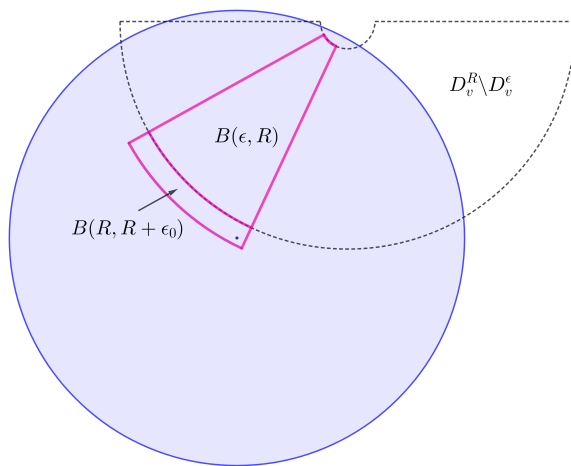


Figura 3.1: Parte do disco  $D_v^R \setminus D_v^\epsilon$  sendo coberta por apenas uma bola do processo  $\Xi'_{w,1}$ .

Tome agora  $\epsilon_0 < \epsilon(1 - \kappa)$ ,  $x_0 \in B(R, R + \epsilon_0)$  e  $x \in \epsilon B$  na fronteira de  $D_v^\epsilon$ .

Assim  $x = \epsilon y$  para algum  $y \in B$  e  $x_0 = r y_0$  para algum  $y_0 \in B$  e  $R < r < R + \epsilon$  e

$$|x - x_0| = |\epsilon y - r y_0| \leq |\epsilon y - \epsilon y_0| + |\epsilon y_0 - r y_0| \leq \epsilon \kappa + r - \epsilon \leq \epsilon \kappa + R + \epsilon_0 - \epsilon < R,$$

de onde concluímos que  $x \in x_0 + A$ , e portanto  $\epsilon B \subset x_0 + A$ .

Do mesmo modo, se  $x \in RB \subset D_v^R$  então

$$|x - x_0| = |Ry - r y_0| \leq R|y - y_0| + (r - R)|y_0| \leq R\kappa + \epsilon_0 < R\kappa + R(1 - \kappa) = R,$$

mostrando que  $RB \subset x_0 + A$  e, por convexidade,  $B(\epsilon, R) \subset x_0 + A$ .

Segue portanto que

$$\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } B(\epsilon, R)) \geq \mathbb{P}(\Xi_w \cap B(R, R + \epsilon_0) \neq \emptyset) = 1 - e^{-w|B(R, R + \epsilon_0)|}$$

### 3 Espaçamento

e assim

$$\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } B(\epsilon, R)) \rightarrow 1$$

quando  $w \rightarrow \infty$ .

Agora particionando  $\partial B_1(0) \cap D_v^1$  em  $N_\kappa$  regiões de diâmetro no máximo  $\kappa$ , temos que

$$D_v^R \setminus D_v^\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\kappa} B_i(\epsilon, R),$$

e por (1.3) temos que

$$\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^R \setminus D_v^\epsilon) \geq \prod_{i=1}^{N_\kappa} \mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } B_i(\epsilon, R)) \rightarrow 1,$$

quando  $w \rightarrow \infty$ .

Para mostrar que  $\mathbb{P}(\Xi'_{w,1} \text{ cobrir } D_v^{2R} \setminus D_v^R) \rightarrow 1$  basta particionar  $D_v^{2R} \setminus D_v^R$  em regiões  $D_i$  de diâmetro suficientemente pequeno para que  $D_i \subset x_0 + A$  sempre que  $x_0 \in D_i$ , e repetir o argumento acima. □

Como comentamos acima, a demonstração do resultado principal precisa de um ajuste fino entre as grandezas que aparecem nas desigualdades do lema 2.17. Já sabemos que  $r$  depende de  $t$  de modo que  $r \rightarrow 0$  e  $tr^d \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . No lema anterior também já fixamos o valor de  $\delta = r\theta = 3rR(A)$ . Resta agora fixar  $s$  (o tamanho dos cubos que ladrinham o compacto).

A escolha de  $s$  tem duas restrições. A primeira é que  $s \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ , pois queremos refinar as partições  $\mathcal{F}_s$  para aproximar  $k$ . A segunda é que  $s > \delta$ , por hipótese do lema 2.17.

**Lema 3.3** Tome  $s = \sqrt{r}$  e  $\delta = r\theta$  como no lema anterior. Assim, se  $r \rightarrow 0$ , então  $m_s s^d \rightarrow 0$ ,  $n_s s^d \rightarrow 1$  e  $\delta/s \rightarrow 0$ .

**Demonstração:** Defina  $\partial_a K = \{x : d(x, \partial K) \leq a\}$  e observe como  $K$  é compacto, então  $\bigcap_a \partial_a K = \partial K$ , de modo que  $|\partial_a K| \rightarrow |\partial K| = 0$ , quando  $a \rightarrow 0$ .

Além disso se  $x \in \partial K_r$ , então  $d(x, \partial K) = r < Cr$ , para  $C > 1$ , e portanto  $\partial K_r \subset \partial_{Cr} K$ .

Assim, se  $Q \in \mathcal{F}_s$  e  $Q \cap \partial K_r \neq \emptyset$ , e como o diâmetro de  $Q$  é menor que  $ds$ , então  $Q \subset \partial_{Cr+ds} K$ . Logo,  $m_s s^d \leq |\partial_{Cr+ds} K|$ .

Analogamente,  $|K| - |\partial_{Dr+ds} K| \leq |K - \partial_{Dr+ds} K| \leq n_s s^d \leq |K|$ .

Tomando  $s = r^{1/2}$ , temos que  $|\partial_{Cr+ds} K| \rightarrow |\partial K| = 0$ , quando  $r \rightarrow 0$ . Assim,  $m_s s^d \rightarrow 0$  e  $n_s s^d \rightarrow |K| = 1$ .

Vale também  $\delta/s = Dr/\sqrt{r} \rightarrow 0$ . □

Para concluir essa sessão, lembremos que o 2.17 do capítulo anterior, nos dá que se  $2r(a) < \delta < s$ , então

$$e^{-\gamma\alpha+(s-\delta)^d n_s} \leq \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } K) \leq e^{-\gamma\alpha-(s+\delta)^d (n_s+m_s)}.$$

Este resultado, somado aos lemas acima, nos dão que

### 3 Espaçamento

**Lema 3.4** *Seja  $r = r(t)$  tal que  $r \rightarrow 0$  e  $tr^d \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , e tome  $\theta = 3R(A)$ ,  $\delta = r\theta$  e  $s = \sqrt{r}$ . Nestas condições, existem  $\gamma(t, r)$ ,  $\alpha_-(tr^d)$  e  $\alpha_+(tr^d)$  tais que*

$$e^{-\gamma\alpha_+(s-\delta)^d n_s} \leq \mathbb{P}(\Delta(t) < r) = \mathbb{P}(\Xi \text{ cobrir } K_r) \leq e^{-\gamma\alpha_-(s+\delta)^d (n_s+m_s)}.$$

Além disso existem  $c_1, c_2 > 0$  tais que

$$e^{-\gamma c_1} \leq \mathbb{P}(\Delta(t) < r) \leq e^{-\gamma c_2},$$

para  $t$  suficientemente grande.

**Demonstração:** Basta lembrar que  $\Delta(t) < r$  se, e só se,  $\Xi_t^r = \Xi_i + rA$  cobre  $K_r$ . Assim o lema 2.17 nos dá que

$$e^{-\gamma\alpha_+(s+\delta)^d (n_s+m_s)} \leq \mathbb{P}(\Delta(t) < r) = \mathbb{P}(\Xi_t^r \text{ cobrir } K_r) \leq e^{-\gamma\alpha_-(s-\delta)^d n_s}.$$

Do lema 3.2 sabemos que  $\alpha_+(tr^d) \rightarrow \alpha$  e  $\alpha_-(tr^d) \rightarrow \alpha$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

O lema 3.3 nos mostra que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$  e

$$(s + \delta)^d (n_s + m_s) = \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)^d s^d (n_s + m_s) \rightarrow 1$$

e

$$(s - \delta)^d n_s = \left(1 - \frac{\delta}{s}\right)^d s^d n_s \rightarrow 1.$$

Assim, fixados  $0 < c_2 < 1 < c_1$ , temos que

$$\alpha_+(s - \delta)^d n_s < c_1$$

e

$$\alpha_-(s + \delta)^d (n_s + m_s) > c_2$$

para todo  $t$  suficientemente grande, concluindo o resultado. □

## 3.2 Demonstração do Teorema Principal

Postos os resultados técnicos necessários, estamos prontos para a demonstração do teorema principal.

Antes de mais nada, lembre que substituímos  $n \in \mathbb{N}$  por um processo de Poisson  $N_t$  de intensidade 1, nos levando às seguintes equações

$$\mathbb{P}(tV(t) - \log t - (d-1) \log \log t - \log \alpha < u) \rightarrow e^{-e^{-u}} \tag{3.12}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{tV(t) - \log t}{\log \log t} = d - 1 \text{ q.s.}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{tV(t) - \log t}{\log \log t} = d + 1 \text{ q.s.}$$

### 3 Espaçamento

Começando por (3.12), como comentamos antes, temos que

$$\mathbb{P}(tV(t) - \log t - (d-1) \log \log t - \log \alpha < u) = \mathbb{P}\left(\Delta(t) < \left[\frac{\log t + (d-1) \log \log t + \log \alpha + u}{t}\right]^{1/d}\right),$$

e fazendo

$$r := r(t) = \left[\frac{\log t + (d-1) \log \log t + \log \alpha + u}{t}\right]^{1/d}$$

e

$$tr^d = \log t + (d-1) \log \log t + \log \alpha + u,$$

de modo que  $r \rightarrow 0$  e  $tr^d \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Assim, fazendo  $\delta = 3rR(A)$ , o lema 3.4 nos dá que

$$e^{-\gamma\alpha_+(s+\delta)^d(n_s+m_s)} \leq \mathbb{P}(\Delta(t) < r) = \mathbb{P}(\Xi_t^r \text{ cobrir } K_r) \leq e^{-\gamma\alpha_-(s-\delta)^d n_s},$$

enquanto o lema 3.2 garante que  $\alpha_+(tr^d) \rightarrow \alpha$  e  $\alpha_-(tr^d) \rightarrow \alpha$  e o lema 3.3 nos mostra que  $(s+\delta)^d(n_s+m_s) \rightarrow 1$  e  $(s-\delta)^d n_s \rightarrow 1$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

Nos resta estudar apenas o comportamento de  $\gamma(t, r) = t^d r^{d(d-1)} e^{-tr^d}$ .

Para isso note que

$$\begin{aligned} \gamma(t, r) &= t(tr^d)^{d-1} e^{-(\log t + (d-1) \log \log t + \log \alpha + u)} \\ &= \frac{t(tr^d)^{d-1}}{t(\log t)^{d-1} \alpha e^u} \\ &= \left(\frac{\log t + (d-1) \log \log t + \log \alpha + u}{\log t}\right)^{d-1} \frac{e^{-u}}{\alpha}, \end{aligned}$$

e portanto  $\gamma \rightarrow \frac{e^{-u}}{\alpha}$ , concluindo a prova de (3.5) e (3.2).

As provas das equações 3.6 e 3.7 seguem das desigualdades apresentadas nos três próximos lemas:

**Lema 3.5**  $\liminf_{t \rightarrow \infty} (tV(t) - \log t) / \log \log t \geq d-1$  q.s.

**Demonstração:** Tome algum  $c < d-1$  e defina

$$t_k = e^{\sqrt{k}}$$

$$\omega_k = \log t_k + c \log \log t_k$$

$$\gamma_k = t_k \omega_k^{d-1} e^{-\omega_k} = (\log t_k + c \log \log t_k)^{d-1} (\log t_k)^{-c} \geq k^{(d-1-c)/2}$$

Agora, pelo lema 3.4, para algum  $c_2 > 0$  e  $k$  suficientemente grande

$$P(t_k V(t_k) < \omega_k) \leq e^{-c_2 k^{(d-1-c)/2}},$$

### 3 Espaçamento

e como a soma em  $k$  do lado esquerdo da inequação converge, segue do lema de Borel-Cantelli que

$$P(t_k V(t_k) < \omega_k \text{ infinitas vezes}) = 0.$$

Suponha agora que  $t_k V(t_k) \geq \omega_k$  e  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ . Então, como  $1 - x < e^{-x}$  e

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} < \frac{1}{\sqrt{k}},$$

então

$$\frac{t_{k-1}}{t_k} = e^{\sqrt{k-1} - \sqrt{k}} > 1 - (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) > 1 - \frac{1}{\sqrt{k}},$$

e como  $V(t)$  é decrescente em  $t$ , dado  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} tV(t) - \log t &\geq t_{k-1}V(t_k) - \log t_k \\ &\geq \frac{t_{k-1}}{t_k} \omega_k - \log t_k \\ &= \frac{t_{k-1}}{t_k} (\log t_k + c \log \log t_k) - \log t_k \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) (\log t_k + c \log \log t_k) - \log t_k \\ &= c \log \log t_k - \frac{1}{\sqrt{k}} (\sqrt{k} + c \log \sqrt{k}) \\ &\geq c \log \log t - (1 + \epsilon), \end{aligned}$$

se  $k$  é suficientemente grande.

Segue que

$$\frac{tV(t) - \log t}{\log \log t} \geq c - \frac{1 + \epsilon}{\log \log t}$$

q.s. para todo  $t$  suficientemente grande. E assim

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{tV(t) - \log t}{\log \log t} \geq c,$$

para todo  $c < d - 1$ , e o resultado segue. □

**Lema 3.6**  $\limsup_{t \rightarrow \infty} (tV(t) - \log t) / \log \log t \leq d + 1$  q.s.

**Demonstração:** Como na demonstração do lema 3.5. Tome algum  $c > d + 1$  e sejam  $t_k, \omega_k$  e  $\gamma_k$  como na demonstração anterior. Pelo lema 3.4, para  $C > \infty$ ,

$$P(t_k V(t_k) \geq \omega_k) \leq 1 - e^{-\gamma_k \alpha_+} \leq \gamma_k \alpha_+ \leq C k^{(d-1-c)/2}$$

Como  $c > d + 1$ , o lado direito é somável e segue também que  $\limsup (tV(t) - \log t) / \log \log t \leq c$  q.s. □

**Lema 3.7**  $\limsup_{t \rightarrow \infty} (tV(t) - \log t) / \log \log t \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} (tV(t) - \log t) / \log \log t + 2$  q.s.

### 3 Espaçamento

**Demonstração:** Considere

$$c < \liminf \frac{tV(t) - \log t}{\log \log t}$$

e seja  $1 < b < 2$ .

Defina então  $t_k$  como

$$t_k = e^{k^{1/b}}$$

e

$$\omega_k = \log t_k + c \log \log t_k,$$

como anteriormente.

Seja  $r_k$  tal que  $\omega_k = t_k r_k^d$  e

$$t'_k = t_k \left( 1 + b \frac{\log \log t_k}{\log t_k} \right) = t_k (1 + k^{-1/b} \log k).$$

Note agora que

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = e^{(k+1)^{1/b} - k^{1/b}} > 1 + (k+1)^{1/b} - k^{1/b}.$$

E como  $b > 1$ , temos que  $f(x) = x^{1/b}$  é côncava ( $f''(x) < 0$ ), e portanto  $f(x+1) - f(x) > f'(x+1)$  e

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} > 1 + b^{-1}(k+1)^{1/b-1}.$$

Além disso, como  $1 < b < 2$ , temos que  $x^{2/b}/b(x+1) > \log x$  para  $x$  suficientemente grande, e assim

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} > 1 + b^{-1}(k+1)^{1/b-1} > 1 + \frac{k^{1/b}}{b(k+1)} > 1 + k^{-1/b} \log k = \frac{t'_k}{t_k},$$

para  $k$  suficientemente grande, nos dando  $t_{k+1} > t'_k > t_k$ .

Lembrando que  $\Xi_t = \{X_i\}_{i=1}^{N_t}$ , observe que  $\Xi_{t'_k} \setminus \Xi_{t_k}$  não depende de  $\Xi_t$ , para  $t \leq t_k$ .

Se  $\Delta(t_k) \geq r_k$ , então existem pontos  $x \in K_{r_k}$  tais que  $x + r_k A \subset K \setminus \Xi_{t_k}$ . Seja  $Y_k$  um desses pontos se  $\Delta(t_k) \geq r_k$  ou qualquer ponto de  $K_{r_k}$  se  $\Delta(t_k) < r_k$ .

Logo  $Y_k$  é um ponto aleatório que depende apenas de um  $\Xi_{t_k}$ , tal que  $Y_k + r_k A \subset K \setminus \Xi_{t_k}$  se  $\Delta(t_k) \geq r_k$ .

Seja  $M_k$  o número de pontos em  $(\Xi_{t'_k} \setminus \Xi_{t_k}) \cap (Y_k + r_k A)$ . Portanto, como  $M_k$  é independente de  $Y_k$ , então  $M_k$  tem distribuição de Poisson com esperança:

$$\begin{aligned} (t'_k - t_k) |Y_k + r_k A| &= (t'_k - t_k) r_k^d = (t'_k/t_k - 1) \omega_k \\ &= k^{1/b} \log k (k^{1/b} + cb^{-1} \log k) < \log k + 1 \end{aligned}$$

Supondo que  $k$  seja grande o suficiente,

$$P(M_k = 0) > \exp(-\log k + 1) = e^{-1}/k$$

e

$$\sum_k P(M_k = 0) = \infty.$$



### 3 Espaçamento

Como a distribuição de  $M_k$  depende de  $\Xi_{t'_k} \setminus \Xi_{t_k}$  e  $t'_k < t_{k+1}$ , as variáveis  $M_k$  são independentes. Pelo lema de Borel-Cantelli e a somatória anterior,

$$P(M_k = 0 \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

Pela escolha de  $c$  temos

$$c < \liminf \frac{tV(t) - \log t}{\log \log t}$$

e portanto

$$t_k r_k^d = \omega_k = \log t_k + c \log \log t_k \leq t_k V(t_k)$$

para  $k$  suficientemente grande.

Ou seja,  $\Delta(t_k) \geq r_k$  para todo  $k$  suficientemente grande, e portanto

$$P(\Delta(t_k) \geq r_k \text{ e } M_K = 0 \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

Entretando, se  $\Delta(t_k) > r_k$  e  $M_k = 0$ , então  $Y_k + r_k A \subset K \setminus \Xi_{t'_k}$ , e para tal  $k$ ,

$$\Delta(t'_k) = \Delta(t_k) \geq r_k.$$

Vale assim que

$$\begin{aligned} t'_k V(t'_k) &\geq t'_k r_k^d \\ &= (1 + b \log \log t_k / \log t_k) \omega_k \\ &= \log t_k + c \log \log t_k + b \log \log t_k + bc(\log \log t_k)^2 / \log t_k \\ &\geq \log t'_k + (b + c) \log \log t'_k - 1, \end{aligned}$$

para  $k$  suficientemente grande.

Assim,

$$\limsup_k \frac{t'_k V(t'_k) - \log t'_k}{\log \log t'_k} \geq b + c$$

q.s., e seguindo o mesmo argumento dos lemas anteriores mostramos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{tV(t) - \log t}{\log \log t} \geq b + c$$

quase certamente, para todo  $1 < b < 2$  e  $c < \liminf (tV(t) - \log t) / \log \log t$ .

O resultado segue fazendo  $b \nearrow 2$  e  $c \nearrow \liminf (tV(t) - \log t) / \log \log t$ . □

# Apêndice A

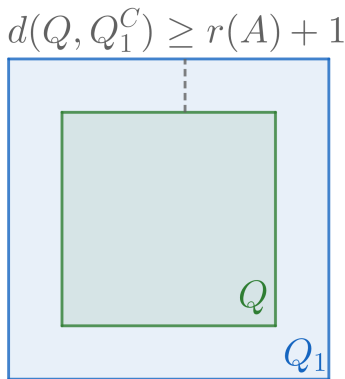
## Resultados sobre a Geometria de Bolas

**Lema A.1** Duas afirmações seguem das definições anteriores:

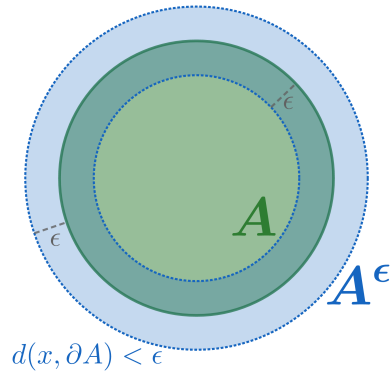
1. Para quase toda coleção  $\{x_i\}_{i=1}^d, \cap_{i=1}^d \partial A_i$  é um conjunto finito, com  $A_i = A + x_i$
2. Para quase toda coleção  $\{x_i\}_{i=1}^{d+1}, \cap_{i=1}^d \partial A_i$  é um conjunto vazio

**Demonstração:**

1. Basta provar para  $x_i$  num cubo fixo  $Q$  suficientemente grande. Seja  $Q_1$  um cubo maior, com  $d(Q, Q_1^C) \geq r(A_i) + 1$  (uma noção geométrica semelhante é apresentada na demonstração do lema 2.15). Tome, para  $0 < \epsilon < 1$ ,  $A^\epsilon = \{x : d(x, \partial A) < \epsilon\}$  e note que  $|A^\epsilon| \leq c\epsilon$  para uma constante  $c \in \mathbb{R}^+$ .



(a) Cubos concêntricos de lado diferente em  $\mathbb{R}^2$



(b) Anel em torno de circunferência

Então

$$\begin{aligned} \int_Q \dots \int_Q |\cap_1^d (A_i^\epsilon)| dx_1 \dots dx_d &= \int_{Q_1} \int_Q \dots \int_Q I(x \in A_i^\epsilon, i = 1, \dots, d) dx_1 \dots dx_d dx \\ &= \int_{Q_1} \prod_{i=1}^d |Q \cap (x - A_i^\epsilon)| dx \leq |Q_1| |A^\epsilon|^d \leq c\epsilon^d. \end{aligned}$$

Pelo lema de Fatou,

$$\int_Q \dots \int_Q \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-d} |\cap_1^d (A_i^\epsilon)| dx_1 \dots dx_d \leq c < \infty$$

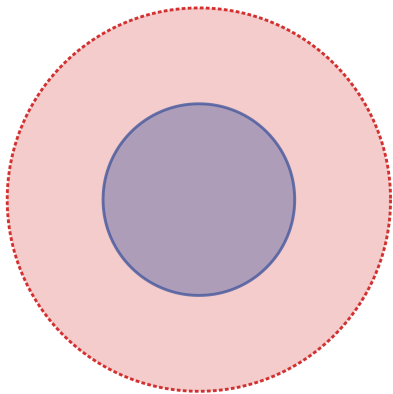
Entretanto, se  $x \in \cap_1^d \partial A_i$ , então  $B_\epsilon(x) \subset \cap_1^d (A_i^\epsilon)$ . Portanto

$$\# \cap_1^d \partial A_i \leq c \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-d} |\cap_1^d (A_i^\epsilon)|$$

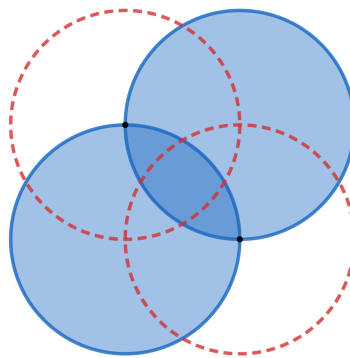
E, assim,

$$\int_Q \dots \int_Q \# \cap_1^d \partial A_i dx_1 \dots dx_d < \infty$$

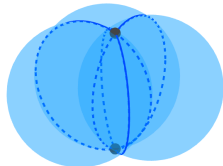
2. Segue do item anterior.



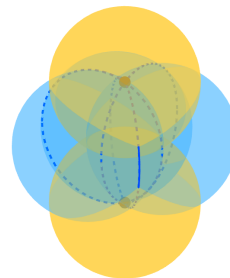
(a) Círculo em  $\mathbb{R}^2$  e centros possíveis para um segundo círculo



(b) Centros possíveis para um terceiro círculo



(c) Três esferas em  $\mathbb{R}^3$



(d) Centros possíveis para uma quarta esfera

Figura A.2: Ilustração do argumento do lema: quando o número de convexas é maior que  $d$ , o próximo convexo tem apenas um conjunto de pontos de medida zero para seu centro, como é o caso da circunferência em  $\mathbb{R}^2$  e da superfície da esfera em  $\mathbb{R}^3$ , para que a intersecção de suas fronteiras seja não vazia

□

**Definição A.2** Uma região  $R \in \mathbb{R}^d$  é um cone se para todo  $x \in R$  e  $\alpha > 0$ , temos que  $\alpha x \in R$ .

Dizemos que  $R$  é um cone com ponta se  $R$  é cone e se dado  $x \in R \setminus \{0\}$ , temos que  $-x \notin R$ .

Finalmente, o cone gerado por vetores  $\{n_i\}_1^k \subseteq \mathbb{R}^d$  é dado pela região fechada e convexa dada por

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(n_1, \dots, n_k) = \left\{ \sum_1^k c_i n_i : c_i \geq 0, i = 1, \dots, k \right\}.$$

**Lema A.3**  $\mathcal{C}(n_1, \dots, n_k)$  é um cone com ponta se, e só se,

$$c_1 n_1 + \dots + c_k n_k = 0, c_i \geq 0, i = 1, \dots, k \implies c_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, k.$$

Em particular, se  $\{n_i\}_1^k$  é l.i., então  $\mathcal{C}$  é um cone com ponta.

**Demonstração:** ( $\implies$ )

Suponha que existam constantes  $c_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ , não todas nulas, tais que

$$c_1 n_1 + \dots + c_k n_k = 0.$$

Neste caso, supondo sem perda de generalidade que  $c_1 > 0$ , então

$$-n_1 = \frac{c_2}{c_1} n_2 + \dots + \frac{c_k}{c_1} n_k \in \mathcal{C},$$

pois  $c_i/c_1 \geq 0$  para todo  $i = 2, \dots, k$ . Mas isso contradiz o fato de  $\mathcal{C}$  ser cone com ponta.

( $\Leftarrow$ )

Tome  $x \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$  e constantes  $c_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ , tais que

$$x = c_1 n_1 + \dots + c_k n_k.$$

Suponha que  $-x \in \mathcal{C}$ , e tome constantes  $d_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ , tais que

$$-x = d_1 n_1 + \dots + d_k n_k.$$

Segue que

$$0 = (c_1 + d_1) n_1 + \dots + (c_k + d_k) n_k,$$

e portanto  $c_i + d_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Como  $c_i, d_i \geq 0$ , temos  $c_i = d_i = 0, i = 1, \dots, k$  e  $x = 0$ , concluindo a demonstração.  $\square$

**Lema A.4** Seja  $k \geq 1$ . Para q.t.p  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{dk}$ , vale que se  $x \in \cap_1^k \partial(A + x_i)$  e  $n_i$  é normal a  $A + x_i$  em  $x$ , então  $\{n_i\}_1^k$  gera um cone com ponta em  $\mathbb{R}^d$ .

**Demonstração:** Dados  $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^d, m \geq 1$  defina

$$H(y_1, \dots, y_m) = \left\{ y_m + \sum_1^{m-1} a_i (y_i - y_m) : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m-1 \right\},$$

o menor hiperplano que contém  $y_1, \dots, y_m$ . Deste modo, temos que  $y \in H$  se, e só se,  $y - y_m$  for combinação linear de  $\{y_i - y_m\}_1^{m-1}$ .

A seguir, observe que se  $n_i$  é normal a  $A + x_i$  em  $x \in \partial(A + x_i)$ , então  $n_i \parallel x - x_i$ . Se tomarmos  $n_i$  unitário, teremos então  $n_i = x - x_i$ .

## A Resultados sobre a Geometria de Bolas

Suponha então que existam constantes  $c_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , não todas nulas, tais que

$$c_1 n_1 + \dots + c_k n_k = 0,$$

e suponha sem perda de generalidade que  $c_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $c_j = 0$ ,  $j = m + 1, \dots, k = 0$ .

Segue que

$$c_1(x - x_1) + \dots + c_m(x - x_m) = 0,$$

e fazendo  $\alpha = \sum_1^m c_i$  temos

$$\alpha(x - x_m) = c_1(x_1 - x_m) + \dots + c_{m-1}(x_{m-1} - x_m),$$

de modo que

$$x \in H = H(x_1, \dots, x_m) \subseteq \mathbb{R}^d.$$

É importante observar que  $1 \leq \dim(H) \leq \min\{d, m-1\}$ , e portanto, se  $\dim(H) = l \leq d$ , existem  $\{y_1, \dots, y_l\} \subset \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$  tal que

$$H(x_1, \dots, x_m) = H(y_1, \dots, y_l, x_m),$$

e portanto podemos considerar que  $m \leq d + 1$  e  $\dim(H) = m - 1$ .

Note agora que para  $i = 1, \dots, m$ , o conjunto  $A + x_i \cap H$  é uma bola  $m - 1$  dimensional de raio 1 em  $H$ , com centro em  $x_i \in H$ .

Assim, se  $A + x_i \cap H = A' + x_i$  onde  $A' = A \cap H$ , então  $x \in \cap_1^m \partial(A' + x_i)$ .

Reduzimos assim o problema ao caso de  $m$  bolas em um espaço  $m - 1$  dimensional, e sabemos que  $L = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{dk} : \cap_1^k \partial(A' + x_i) \neq \emptyset\}$  tem medida de Lebesgue  $dk$ -dimensional nula para todo  $k > d$  pelo lema 2.4, concluindo a demonstração. □

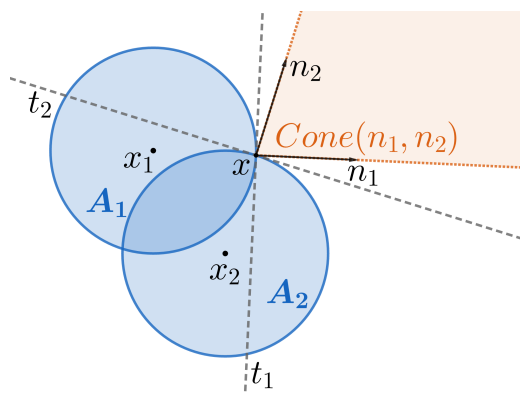


Figura A.3: Cone gerado pelos vetores normais

### Lema A.5

1. Para quase todo  $\{x_i\}_{i=1}^k$ , se  $x \in \cap_{i=1}^k \partial A_i$ , então  $x \in \partial \cup_{i=1}^k \bar{A}_i$ .
2. Para quase todo  $\{x_i\}_{i=1}^n$ ,  $(\cup_{i=1}^n (A_i))^o = \cup_{i=1}^n A_i^o$

**Demonstração:**

1. Sejam  $n_i$  normais em  $x$ . Pelo lema A.4,  $\exists \nu$  com  $\langle \nu, n_i \rangle > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Consequentemente,  $x + t\nu \notin \cup_{i=1}^k \bar{A}_i$  quando  $t > 0$  e  $x \notin (\cup_{i=1}^k \bar{A}_i)^\circ$ .
2. Suponha que  $x \in (\cup_{i=1}^n (A_i))^\circ \setminus \cup_{i=1}^n (A_i)^\circ$ . Ordenaremos o índices de forma que  $x \in \bar{A}_i$  para  $i \in [1, k] \cap \mathbb{Z}$ , mas não para  $i > k$ , então  $x \in \cap_{i=1}^k \partial(A_i)$  e  $x \in (\cup_{i=1}^k (A_i))^\circ$ . A afirmação segue da demonstração do item anterior.

□

**Definição A.6** Denote por  $Cone(n_1, \dots, n_k)$  o conjunto  $\{\sum_{i=1}^k c_i n_i : c_i \geq 0\}$

**Lema A.7** Seja  $k \geq 1$ . Para quase toda coleção  $\{x_i\}_{i=1}^k$  é válido que, se  $\nu$  é especial para  $\{A_i\}_{i=1}^k$  em  $x$  e  $n_i$  é normal a  $A_i$  em  $x$ ,  $i = 1, \dots, k$ , então  $\nu \in Cone(n_1, \dots, n_k)$ .

**Demonstração:** Suponha que  $\nu \notin Cone(n_1, \dots, n_k)$ . Assim, existe um vetor  $e$  tal que  $\langle \nu, e \rangle < 0$  e  $\langle n_i, e \rangle \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Pelo lema A.4, assuma que existe um vetor  $f$  com  $\langle n_i, f \rangle > 0$ , segue que  $e' = e + \epsilon f$ , com  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeno,  $\langle \nu, e' \rangle < 0$  e  $\langle n_i, e' \rangle > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Consequentemente, se  $\delta > 0$ , então  $x + \delta e' \notin \cup_{i=1}^k A_i$  e  $\nu$  não é especial em  $x$ . □

**Lema A.8** Seja  $1 \leq k \leq d - 1$ . Para quase todo  $\{x_i\}_{i=1}^k$ , o conjunto  $\mathbb{K}_5 = \{\nu : \exists x \text{ tq } \nu \text{ é especial para } \{A_i\}_{i=1}^k \text{ em } x\}$  tem medida de Lebesgue zero.

**Demonstração:** Seja  $V_x$  o span linear de todos os vetores especiais para  $\{A_i\}_{i=1}^k$  em  $x$ . Pelo lema A.7,  $V_x \leq k < d$  para todo  $x$ .

Seja  $\nu$  um vetor especial em  $x$  e seja  $D_\nu^\delta(x) \subset \cup_{i=1}^k (A_i)$ . Suponha que  $|y - x| < \delta$  e que um vetor  $w$  arbitrário seja especial em  $y$ . Então  $y \in \cap_{i=1}^k \bar{A}_i$ . Se  $\langle \nu, y - x \rangle > 0$ , então para um  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeno,  $x - \epsilon(y - x) \subset D_\nu^\delta(x) \subset (\cup_{i=1}^k (A_i))^\circ$  e, como  $\bar{A}_i$  é convexo  $\forall i$ , então existe uma vizinhança de  $x$  em  $\cup_{i=1}^k \bar{A}_i$ . Pelo lema A.5, temos que  $\langle y - x, \nu \rangle \leq 0$ . Então, para algum  $\eta > 0$ ,  $D_\nu^\eta(y) \subset D_\nu^\eta(x)$  e  $\nu$  é especial em  $y$ . Tome uma coleção de vetores  $\{e_j\}_{j=1}^l$  especiais em  $x$ , formando uma base para  $V_x$ . A conclusão anterior nos permite encontrar um  $\delta > 0$  tal que se  $|y - x| < \delta$  e  $V_y \neq 0$ , então  $\{e_j\}_{j=1}^l \in V_y$  e, dessa forma,  $V_x \subset V_y$ . Se, além disso,  $dim(V_x) = dim(V_y)$ , então  $V_x = V_y$ . Portanto, para todo  $l = 1, \dots, d - 1$ , o conjunto  $\{x : dim V_x = l\}$  pode ser coberto por bolas nas quais  $V_x$  é constante. Logo, existe no máximo um conjunto enumerável de Espaços  $V_x$  e o conjunto de vetores especiais está incluso na união de uma coleção enumerável de hiperplanos. □

**Lema A.9** Para quase todo conjunto  $\{x_i\}_{i=1}^d$ , o conjunto

$$\mathbb{K}_6 = \{\nu : \exists x, x' \text{ diferentes tais que } \nu \text{ é especial para } \{A_i\}_{i=1}^d \text{ em } x \text{ e em } x'\}$$

tem medida zero

**Demonstração:** Suponha que  $\nu$  seja especial em  $x$  e em  $x'$  e tome  $y = x' - x$ . Seja  $n_i$  o normal a  $A_i$  em  $x$ . Como  $x' \in \cap_{i=1}^d \bar{A}_i$ ,  $\langle n_i, y \rangle \leq 0$  para  $i = 1, \dots, d$ .

- Se  $\langle n_i, y \rangle = 0 \forall i$ , então  $x + ty + \epsilon n_i \notin A_i$ , quando  $\epsilon > 0$ . Como  $x + ty \in \bar{A}_i$  por convexidade, para  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\{x + ty : 0 \leq t \leq 1\} \in \cap_{i=1}^d \partial(A_i)$ . Portanto, basta aplicar o lema 2.4

A Resultados sobre a Geometria de Bolas

- Se  $\langle n_i, y \rangle < 0$  para algum  $i$  (escolha esse  $i$  igual a 1, S.P.G.), tome  $D_\nu^d(x) \subset \cup_i(A_i)$ . Dessa forma, se  $\epsilon > 0$  é pequeno,  $D_\nu^{\delta/2}(x - \epsilon y) \subset d_\nu^\delta(x) \subset \cup_{i=1}^d(A_i)$ . Entretanto,  $x - \epsilon y \notin \bar{A}_i$ , e  $x - \epsilon y \notin (A_i)^\circ$ ,  $i = 2, \dots, d$  pois, de outra forma,  $x \in (A_i)^\circ$  por convexidade. Como  $\nu$  é especial para  $\{A_i\}_{i=2}^d$  em  $x - \epsilon y$ . Esse caso segue do lema A.8

□

**Lema A.10** Seja  $l \geq 1$ . Pra quase todo  $\{x_i\}_{i=1}^{d+1}$ , o conjunto

$$\mathbb{K}_7 = \{\nu : \exists x \in \cap_{i=1}^d \partial A_i, y \in \cap_{i=l+1}^{d+1} \partial A_i \text{ tq } \langle \nu, x - y \rangle = 0\}$$

tem medida de Lebesgue nula

**Demonstração:** Pelo lema 2.4, os conjuntos  $\cap_{i=1}^d \partial A_i$  e  $\cap_{i=l+1}^{d+1} \partial A_i$  são, para quase todo conjunto de pontos  $\{x_i\}_1^{d+1}$ , finitos e disjuntos, dessa forma,  $\mathbb{K}_7$  é a união de um número finito de hiperplanos

□

**Lema A.11**  $p = P(\text{existirem } d + 1 \text{ conjuntos diferentes } B_1, \dots, B_{d+1} \in \Xi \text{ tais que } \cap_1^{d+1} \partial B_i \neq \emptyset) = 0$

**Demonstração:** Tome  $f(B_1, \dots, B_{d+1}) = I(\cap_1^{d+1} \partial B_i \neq \emptyset)$ . Pelos lemas 1.18 e 2.4

$$\begin{aligned} p &\leq \mathbb{E} \sum_{\Xi} f(B_1, \dots, B_{d+1}) = \\ &= \lambda^{d+1} \int \dots \int f(A_1, \dots, A_{d+1}) dx_1 \dots dx_{d+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

# Referências Bibliográficas

- [1] C. Aaron, A. Cholaquidis, and R. Fraiman. A generalization of the maximal-spacings in several dimensions and a convexity test. *Extremes*, pages 1–30, 2014.
- [2] A. Baddeley, I. Bárány, and R. Schneider. Spatial point processes and their applications. *LECTURE NOTES IN MATHEMATICS-SPRINGER-VERLAG-*, 1892:1, 2007.
- [3] P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, 1995.
- [4] R. Cheng and N. Amin. Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 394–403, 1983.
- [5] P. Deheuvels. Strong limit theorems for maximal spacings from a general univariate distribution. *The Annals of Probability*, pages 1181–1193, 1984.
- [6] L. Devroye. A log log law for maximal uniform spacings. *The Annals of Probability*, pages 863–868, 1982.
- [7] S. Janson. Random coverings in several dimensions. *Acta Mathematica*, 156(1):83–118, 1986.
- [8] S. Janson. Maximal spacings in several dimensions. *The Annals of Probability*, pages 274–280, 1987.
- [9] P. Lévy. Sur la division d’un segment par des points choisis au hasard. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences Paris*, 208:147–149, 1939.
- [10] J. Møller and R. P. Waagepetersen. *Statistical inference and simulation for spatial point processes*. Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [11] D. Pollard. Miniempirical. <http://www.stat.yale.edu/~pollard/Books/Mini/>, 2015. Manuscript(Acessado: 22/04/2024).
- [12] B. Ranneby. The maximum spacing method. an estimation method related to the maximum likelihood method. *Scandinavian Journal of Statistics*, pages 93–112, 1984.