Trabalho de Conclusão de Curso - Bacharelado em Matemática

Uma introdução ao Grupo de Tranças de Artin

Matheus Pantrigo Licarião Barbosa

Universidade Federal do ABC

Título: Uma introdução ao Grupo de Tranças de Artin

Autor: Matheus Pantrigo Licarião Barbosa
Orientador: Prof. Dr. Edson Ryoji Okamoto Iwaki

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Miranda Machado
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos
Universidade Federal de ABC

Santo André, 16 de Fevereiro de 2022.

Sumário

1 Introdução 7

2 Preliminares 9

2.1 Grupos Livres . . . 9

2.2 Presentações . . . 13

3 Tranças 15

3.1 O que é uma trança . . . 15

3.2 O Grupo de Tranças B_n . . . 20

3.3 Uma presentação para o Grupo de n-Tranças . . . 24

4 Uma ordem para o Grupo de Tranças 31

4.1 O monoide B_n^+ . . . 32

4.2 Uma ordem linear para B_n . . . 35

5 Grupos Livres e sua relação com B_n 40

6 Apêndice 48

6.1 O Centro do Grupo de Tranças . . . 48

6.2 Redução de alças . . . 52

Agradecimentos

Começarei estes agradecimentos lembrando a pessoa que foi mais importante em toda minha jornada acadêmica, aquela cujo sem o esforço eu muito provavelmente não estaria aqui escrevendo. Está é a senhora Geronice, que além de ter enfrentado as dificuldades de ter que lidar com uma gravidez de 6 meses também teve que lidar com um filho muito cabeça dura. Já na minha formação básica agradeço a aqueles professores que incentivaram minha curiosidade e vontade de aprender matemática, citando em específico os professores Nilson Umbria e o professor Marco, mas também a professora Andrea, que me apresentou a UFABC. Agradeço aos meus amigos, os quais compartilhei jogos e brincadeiras. Eles foram peça importante em me manter são durante o período de pandemia. Agradeço especificamente aos Gabrieis, Bruno e Sérgio, mas especialmente a Luciana.

Agradeço ao carinho e paciência de todos os professores que participaram de minha jornada na UFABC, mas em especial os professores Rodrigo, Mariana, Ana Carolina e Nazar. Agradeço, por fim, ao meu orientador Edson Iwaki, que foi um ótimo orientador, extremamente compreensivo e que ao longo de nossas duas Iniciações Científicas foi me guiando nos mundos da Álgebra e da Teoria do Números e me mostrou o quanto eles podem ser bonitos, tornando nossas reuniões muito agradáveis e interessantes. Agradeço também por ter me ajudado a afiar minha intuição matemática e meu rigor, afinal essas são duas ferramentas que eu pretendo levar para o resto da vida.

Os artigos de Artin [ARTIN 1925], onde este explorava o entrelaçamento de cordas no espaço euclidiano tridimensional de maneira intuitiva e geométrica, e [ARTIN 1947], onde isto foi feito de maneira rigorosa e algébrica, introduziram o conceito do Grupo de Tranças de Artin B_n, sendo o estopim para a criação de um novo campo da matemática conhecido como Teoria de Tranças. Desde então vários matemáticos dedicaram seu trabalho a expandir as fronteiras desse campo. Hoje a Teoria de Tranças é um campo de pesquisa ativo. O Grupo de Tranças B_n permitiu diversas generalizações, como os grupos de Artin-Tits e o Grupo de Tranças Virtual. Além disso, o Grupo de Tranças de Artin tem sido importante para diversas áreas dentro e fora da matemática, como Topologia, Álgebra, Geometria, Física de Partículas, Biologia e Astrofísica.

Um dos objetivos principais desse TCC é investigar que a existência de uma ordem invariante a concatenação á esquerda em B_n implica que B_n não possui elementos de ordem finita. Começaremos nosso TCC estudando o Grupo de Tranças B_n, verificaremos que o conjunto $\mathcal{B}_n$ de todas as n-tranças, quando munido da operação de concatenação, possui estrutura de grupo e apresentaremos algumas de suas propriedades. Definiremos P_n, o grupo de tranças puras, e veremos que ${}^{B_n}\!/_{P_n}$ é isomorfo ao grupo de permutações S_n. Estudaremos a relação de B_n com os grupos livres, fato que naturalmente nos levará a estudarmos sua presentação através de geradores. E, por fim, estudaremos também uma demonstração de Dehornoy [DEHORNOY 2002] que mostra que B_n, de fato, possuí uma ordem invariante por concatenação á esquerda, o que nos permite concluir, entre outros fatos, que o grupo B_n é livre de torção, isto é, B_n não possui elementos de ordem finita.

Palavras Chaves: Grupo de Tranças de Artin, Grupo Livre, Ordem Invariante a esquerda, livre de torção

Abstract

In [ARTIN 1925] Artin investigated the intertwining of strings in the three-dimensional euclidean space geometrically and intuitively. Later, these concepts were algebraically and rigorously investigated in [ARTIN 1947]. These articles introduced what is known today as Artin Braid Group B_n. This was the beginning of a new mathematical field called Braid Theory. Since then, several mathematicians have dedicated their work to expand the frontiers of this field. Braid Theory is an active research field. Artin Braid Group was a base for a great number of generalizations, including the Virtual Braid Group and the Artin-Tits Group. The Braid Group B_n has also been an important tool for many fields inside and outside Math, such as Topology, Algebra, Geometry, Particle Physics, Biology, and Astrophysics.

One of the main objectives of this thesis is to investigate that the existence of a left-invariant order on B_n will imply that B_n does not have elements of finite order. We shall start our undergraduate thesis with the study of Artin Braid Group B_n, we will verify that the set $\mathcal{B}_n$ of all n-braids, equipped with concatenation, has a group structure and also present some of its properties. We will define P_n, the Pure Braid Group, and verify that ${B_n}/{P_n}$ is isomorphic to the symmetric group with n letters, S_n. To verify the existence of such order, we investigate the relation between Artin's Braid Group and Groups, the inspection over its presentation will naturally follow. Furthermore, we also study a proof due to Dehornoy [DEHORNOY 2002] regarding the existence of a concatenation left-invariant ordering on B_n. This result leads us to conclude, among other facts, that B_n is torsion-free, i.e. , it has no elements with finite order.

Keywords: Artin's Braid Group, Free Group, Left-invariant Order, Torsion-free

1 Introdução

Considere a seguinte estrutura, dois planos paralelos em E^3 o espaço euclidiano tridimensional, cada um com $n \geq 2$ pontos igualmente espaçados. Chamemos os pontos superiores de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e os inferiores de $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Seja d_i uma corda que conecte A_j em B_k. Além disso, estabelecemos a restrição que dado um terceiro plano, paralelo aos dois primeiros, ele deve intersectar o segmento d_l em apenas um ponto, isto é, não são admitidos nós ou dois (ou mais) segmentos que comecem ou terminem no mesmo ponto. O resultado dessa construção é o que chamamos de uma n-trança.

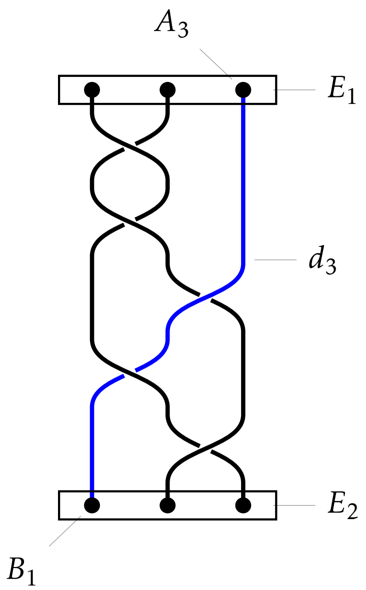


Figura 1.1: Uma 3-trança.

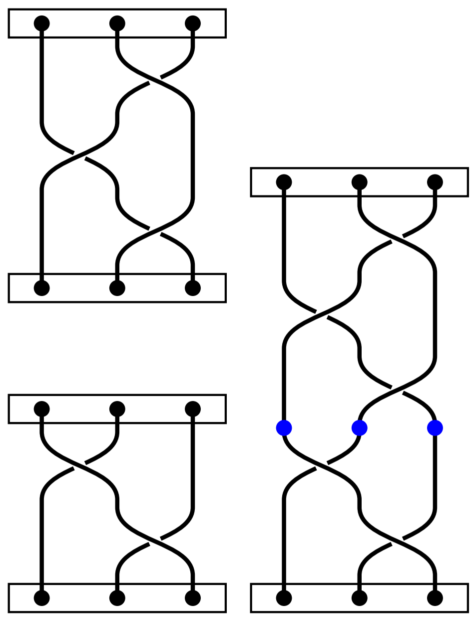


Figura 1.2: A operação de concatenação.

Através da operação de concatenação, que consiste em "colarmos"a parte inferior de uma n-trança com a superior de outra, conseguiremos verificar que as n-tranças possuem a estrutura de um grupo, o que será o tópico principal do capítulo 3.2.

O primeiro estudo aprofundado do conceito de n-tranças foi feito por Emil Artin em [ARTIN 1925] e [ARTIN 1947] sendo o primeiro publicado em 1925, com uma abordagem mais geométrica e intuitiva, e o segundo publicado em 1947, com uma abordagem mais rigorosa e algébrica.

O grupo de tranças é interessante por si próprio, permitiu generalizações como os grupos de Artin-Tits, o Grupo de Tranças Virtuais e o Grupo de Tranças de Superfície. Ademais, desde sua formulação ele tem tido um papel importante em diversas outras áreas da matemática, como topologia, geometria e álgebra, além de diversas aplicações na área da Física de Partículas, Química, Biologia e Astrofísica. A Teoria das Tranças contínua sendo até hoje uma área ativa de pesquisa.

Seja $n \geq 2$ inteiro positivo. Seria natural nos perguntarmos quantas tranças existem e, caso elas sejam infinitas, existem tranças de ordem finita? Para respondermos isso precisamos investigar o conjunto dos elementos de torção de B_n. O resultado apresentado por Dehornoy et al em [DEHORNOY 2002] de que o grupo B_n possuí uma ordem invariante a esquerda, isto é, possuí uma ordem total estrita de seus elementos que é invariante a concatenação á esquerda, nos dá uma resposta elementar para a questão da existência de elementos de ordem finita em B_n. Um dos objetivos do TCC será estudar a construção feita por Dehornoy e, por fim, apresentar que B_n não possui elementos de ordem finita, e portanto, B_n é um grupo livre de torção para cada inteiro $n \geq 2$. A produção deste trabalho será feito como indicado a seguir. Dado que a operação de um Grupo Livre é dada por concatenação de suas palavras e a operação em B_n é dada pela justaposição de suas tranças, além de que todo grupo isomorfo a um grupo quociente de um Grupo Livre [DUMMIT 2004] é natural que se queira investigar a relação entre o Grupo de Tranças e os Grupos Livres.

Começaremos nossos estudos com as definições e propriedades básicas de Grupos Livres, o que será feito ao longo do Capítulo 2. Usaremos como fontes primárias [DUMMIT 2004] e [MURASUGI 2012]. Em seguida, durante o Capítulo 3 utilizaremos [MURASUGI 2012] e [GONZALES-MENESES 2010] para introduzirmos a noção de Grupo de Tranças e suas propriedades fundamentais, as quais serão utilizadas para estudarmos a existência de uma ordem em B_n. Durante o capítulo 4, utilizaremos como fonte primária [DEHORNOY 2002] para estudarmos uma ordenação de B_n^+, o Grupo de Tranças positivas, e introduzirmos os resultados que, por fim, no capítulo 5, nos permitirão chegar ao resultado que garantem a existência de uma ordem invariante a esquerda em B_n a qual nos permitirá concluir que B_n é um grupo livre de torção. Caso haja tempo hábil após a execução dos estudos supracitados, novos tópicos poderão ser abordados. Ao longo deste trabalho também utilizaremos ilustrações para tornar mais claras as explicações de conceitos. Estas serão produzidas utilizando a biblioteca "Braids"do LaTeX.

2 Preliminares

2.1 Grupos Livres

Antes de começarmos o nosso estudo do Grupo de Tranças de Artin, veremos uma breve introdução a teoria dos Grupos Livres. Dessa forma, quando estivermos mais familiarizados com a noção de geradores e as relações, estudaremos as mesmas no contexto do Grupo de Tranças.

Seja S um conjunto. Gostaríamos de construir um Grupo a partir do conjunto S, para tal precisamos de uma operação binária que satisfaz algumas propriedades. Lembremos de um conceito: O Grupo gerado por S, dada uma operação binária, é o menor grupo que contém S. Gostaríamos então de gerar um Grupo a partir do conjunto S, note, entretanto, que não queremos colocar nenhuma restrição em quais podem ser os elementos de S,queremos um Grupo *Livre* de restrições nesse sentido. Então uma maneira de definir esta operação seria através da concatenação dos elementos de S, isto é, se $S = \{a, b\}$, então alguns dos elementos do nosso grupo serão $aa, ab, bab, abab$, etc. Chamaremos essas combinações de *palavras* e definimos então $F(S)$, o conjunto de todas as palavras formadas com elementos de S. A operação que combina duas palavras também será a concatenação. Em breve será mais prático denotarmos palavras como $aaabbaab$ através de expoentes $a^3b^2a^2b$, porém em um primeiro momento devemos mostrar que esta operação está bem definida e que ela é associativa.

Ademais, qualquer mapa do conjunto gerador S para um grupo G pode ser unicamente estendido para um *homomorfismo* do grupo $F(S)$ para o grupo G. Este fato é frequentemente referenciado como a propriedade *universal* dos Grupos Livres e, de fato, caracteriza o grupo $F(S)$.

Como mencionado acima, precisamos primeiro verificar que a operação de concatenação está bem definida e é associativa. Para tal, lembremos quais são as propriedades necessárias para que $F(S)$ seja um grupo.

Definição 2.1 *Um* grupo *é um par ordenado $(G,\star)$, onde G é um conjunto e $\star$ é uma operação binária em G que satisfaz os seguintes axiomas:*

(i) $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$, *para todo* $a, b, c \in G$, *isto é,* $\star$ *é associativa.*

(ii) Existe um elemento e *em* G, *chamado de identidade de* G, *tal que para todo* $a \in G$ *vale* $a \star e = e \star a = a$.

(iii) Para cada $a \in G$ *existe um elemento* a^{-1} *de* G, *chamado inverso de* a, *tal que* $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Quando $\star$ estiver clara, como no nosso caso, diremos apenas que G é um grupo.

Iremos então começar definindo as inversas para os elementos de S e uma identidade.

Definição 2.2 *Seja* S *um conjunto e* S^{-1} *um conjunto disjunto de* S *tal que existe uma bijeção de* S *para* S^{-1}.

(i) Para cada $s \in S$ *denotaremos o elemento correspondente em* S^{-1} *por* s^{-1} *e, analogamente, para cada* $t \in S^{-1}$ *o elemento correspondente em* S *será denotado por* t^{-1}, *de forma que* $(s^{-1})^{-1} = s$.

(ii) Tome um conjunto, de um único elemento, não contido em $S \cup S^{-1}$ *e chame-o de* $\{1\}$. *Defina* $1^{-1} = 1$

e para qualquer $x \in S \cup S^{-1} \cup \{1\}$, $x^1 = x$.

Agora podemos definir mais formalmente o conceito de palavra.

Definição 2.3 *Uma* palavra *de* S *é uma sequência*

$$(s_1, s_2, s_3, \dots)$$

onde $s_i \in S \cup S^{-1} \cup \{1\}$ *e existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que se* $i \geq N$ *então* $s_i = 1$.

Por conta de S *conter todos elementos as quais formarão nossas palavras, chamaremos* S *de alfabeto.*

Podemos então pensar em uma palavra como o produto finito de elementos de S e seus inversos, onde pode haver repetição. Ao permitirmos repetições e inversas nos deparamos com um problema, nem sempre teremos a menor versão possível de nossa palavra, visto que podem haver casos como $ab^{-1}ba$, e gostaríamos que isto fosse o mesmo que aa. Isso motiva a seguinte definição

Definição 2.4 *Dizemos que a palavra* $(s_1, s_2, s_3, \dots)$ *é uma* palavra reduzida *se*

(1) $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$ *para todo* i *com* $s_i \neq 1$ *e*

(2) se $s_k = 1$ *para algum* k*, então* $s_i = 1$ *para todo* $i \geq k$.

A palavra reduzida $(1, 1, \dots)$ é chamada de *palavra vazia* e é denotada por 1. Simplificaremos nossa notação, escrevendo a palavra reduzida $(s_1^{\epsilon_1}, s_2^{\epsilon_2}, \dots, s_n^{\epsilon_n})$, $s_i \in S, \epsilon_i = \pm 1$, como $s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon_n}$. Seja $F(S)$ o conjunto de todas as palavras reduzidas em S e a imersão de S em $F(S)$ dada por

$$s \mapsto (s, 1, 1, \dots)$$

Note que este mapa é injetor, uma vez que duas palavras reduzidas, $s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon}$ e $r_1^{\delta_1} r_2^{\delta_2} \dots r_m^{\delta}$ serão iguais se, e somente se, $n = m$ e $\delta_i = \epsilon_i$, $1 \leq i \leq n$, isto é, nossas sequências de elementos de S, quando vistas como t-uplas, devem ser iguais coordenada a coordenada. Dada a injetividade do mapa, podemos identificar S através de sua imagem e então consideraremos S como um subconjunto de $F(S)$.

Após essa construção, voltamos a nosso objetivo a qual era mostrar que $F(S)$ é um grupo. Seguimos então por introduzir a *operação binária* em $F(S)$. A operação que queremos construir deve preservar a condição de palavra reduzida, isto é, $F(S)$ deve ser fechado pela operação. Para tal, não podemos apenas concatenar uma palavra a seguir da outra, precisamos garantir que casos como $\dots bb^{-1} \dots$ não aconteçam.

Definição 2.5 *Sejam* $r_1^{\delta_1} r_2^{\delta_2} \dots r_m^{\delta_m}$ *e* $s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon}$ *palavras reduzidas e assumimos, sem perda de generalidade, que* $m \leq n$. *Seja* k *o menor inteiro em* $1 \leq k \leq m+1$ *tal que* $s_k^{\epsilon_k} \neq r_{m-k+1}^{-\delta_{m-k+1}}$. *Então, o produto dessas palavras é definido como a seguir:*

$$(r_1^{\delta_1} r_2^{\delta_2} \dots r_m^{\delta_m})(s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon_n}) = \begin{cases} r_1^{\delta_1} r_2^{\delta_2} \dots r_{m-k+1}^{\delta_{m-k+1}} s_k^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon}, & \text{se } k \leq m \\ s_{m+1}^{\epsilon_{m+1}} \dots s_n^{\epsilon}, & \text{se } k = m+1 \leq n \\ 1, & \text{se } k = m+1 \text{ e } m = n \end{cases}$$

Afirmação 2.6 *$F(S)$ dotado da operação que definimos acima é um grupo, a qual chamaremos de* Grupo Livre.

Demonstração: Se S é vazio, então $F(S)$ é o grupo trivial. Suponha então que S é um conjunto não vazio. Sejam $s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon_n}$ e $r_1^{\delta_1} r_2^{\delta_2} \dots r_m^{\delta_m} \in F(S)$ palavras reduzidas. Pela operação que definimos acima, e pela definição de palavra reduzida, valem as seguintes igualdades:

$$(s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon_n})(1) = (1)(s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon_n}) = s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon_n}$$

segue, portanto, que a palavra vazia 1 é a identidade.

Novamente pela definição da operação temos que a inversa de uma palavra reduzida $s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n}$, será a palavra reduzida $s_n^{-\epsilon_n}s_{n-1}^{-\epsilon_{n-1}}\dots s_1^{-\epsilon_1}$.

Basta então mostrarmos a associatividade. Para cada $s \in S \cup S^{-1} \cup \{1\}$ defina $\sigma_s : F(S) \to F(S)$ da seguinte forma:

$$\sigma_s(s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n}) = \begin{cases} s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n}, & \text{se } s_1^{\epsilon_1} \neq s^{-1} \\ s_2^{\epsilon_2}s_3^{\epsilon_3}\dots s_n^{\epsilon_n} & \text{se } s_1^{\epsilon_1} = s^{-1} \end{cases}$$

Note que σ_s possui uma inversa natural em $\sigma_{s^{-1}}$ e então σ_s é um automorfismo, logo uma permutação de $F(S)$. Seja $A(S)$ um subgrupo do Grupo Simétrico gerado por $\{\sigma_s \,|\, s \in S\}$. Note que o mapa

$$s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n} \mapsto \sigma_{s_1}^{\epsilon_1} \circ \sigma_{s_2}^{\epsilon_2} \circ \dots \circ \sigma_{s_n}^{\epsilon_n}$$

é uma bijeção de conjuntos entre $F(S)$ e $A(S)$ que respeita suas operações binárias. Como $A(S)$ é um grupo, portanto associativo, então $F(S)$ também o é. □

Teorema 2.7 (Propriedade Universal dos Grupos Livres) *Seja G um grupo, $F(S)$ um grupo livre sobre o alfabeto S. Então dada qualquer função $\varphi : S \to G$, existe uma única função $\Phi : F(S) \to G$ tal que o diagrama a seguir comuta:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\textit{Inclusão}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F(S) \arrow[d, "\Phi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Demonstração: Tal mapa Φ deve satisfazer $\Phi(s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n}) = \varphi(s_1)^{\epsilon_1}\varphi(s_2)^{\epsilon_2}\dots\varphi(s_n)^{\epsilon_n}$ uma vez que deve ser um homomorfismo (o que provaria a unicidade). Verifiquemos então que Φ é um homomorfismo. Sejam $s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n}$ e $r_1^{\delta_1}r_2^{\delta_2}\dots r_m^{\delta_m}$ palavras reduzidas de S. Então $\Phi((s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n})(r_1^{\delta_1}r_2^{\delta_2}\dots r_m^{\delta_m})) = \varphi(s_1)^{\epsilon_1}\dots\varphi(s_n)^{\epsilon_n}\varphi(r_1)^{\delta_1}\dots\varphi(r_m)^{\delta_m}$, pela associatividade generalizada de G

$$\begin{aligned} \Phi((s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n})(r_1^{\delta_1}r_2^{\delta_2}\dots r_m^{\delta_m})) &= (\varphi(s_1)^{\epsilon_1}\dots\varphi(s_n)^{\epsilon_n})(\varphi(r_1)^{\delta_1}\dots\varphi(r_m)^{\delta_m}) \\ &= \Phi(s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n})\Phi(r_1^{\delta_1}r_2^{\delta_2}\dots r_m^{\delta_m}) \end{aligned}$$

Suponha que $s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n} = r_1^{\delta_1}r_2^{\delta_2}\dots r_m^{\delta_m}$, então $\varphi(s_1)^{\epsilon_1}\varphi(s_2)^{\epsilon_2}\dots\varphi(s_n)^{\epsilon_n} = \varphi(r_1)^{\delta_1}\varphi(r_2)^{\delta_2}\dots\varphi(r_m)^{\delta_m}$ e portanto $\Phi(s_1^{\epsilon_1}s_2^{\epsilon_2}\dots s_n^{\epsilon_n}) = \Phi(r_1^{\delta_1}r_2^{\delta_2}\dots r_m^{\delta_m})$. □

Este Teorema nos dá um resultado muito forte. Uma vez que conseguimos construir um Grupo Livre a partir de qualquer conjunto S, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que *qualquer grupo* é isomorfo a um Grupo Quociente de um Grupo Livre.

Corolário 2.8 *$F(S)$ é único a menos de um isomorfismo único, que é o mapa de identidade no conjunto S.*

Demonstração: Isto segue da Propriedade Universal dos Grupos Livres. Sejam $F(S)$ e $F'(S)$ dois grupos livres gerados por S. Como S está contido em $F(S)$ e $F'(S)$, podemos utilizar a propriedade universal para garantir a existência de um homomorfismos de grupos únicos $\Phi : F(S) \to F'(S)$ e $\Phi' : F(S) \to F'(S)$, que restritos a S são a identidade. A composição $\Phi'\Phi$ é um homomorfismo de $F(S)$ a $F(S)$ que é a identidade quando restrito a S, então pela unicidade ele deve ser o mapa identidade. Por outro lado $\Phi'\Phi$ é a identidade, logo Φ é um isomorfismo (com inversa Φ'), o que demonstra o corolário. $\square$

Definição 2.9 *Um grupo $F(S)$ é dito um* Grupo Livre *sobre o conjunto S. Um grupo F é um* grupo livre *se existe um conjunto S tal que $F = F(S)$, nesse caso chamamos o conjunto S de um conjunto de* geradores livres *de F. A cardinalidade de S é chamada de* Posto *do grupo livre.*

2.2 Presentações

Definição 2.10 *Seja S um subconjunto de um grupo G tal que $G = \langle S \rangle$.*

(1) Uma presentação de G é um par (S,R), onde R é um conjunto de palavras em $F(S)$ tal que $\langle R \rangle$ em $F(S)$ é igual ao kernel no homomorfismo $\pi : F(S) \to G$ (onde π restrito a S é a identidade). Os elementos de S são chamados geradores *e aqueles em R são chamados de* relações *de G.*

(2) Dizemos que G é finitamente gerado se existe uma presentação (R,S) tal que S é um conjunto finito. Dizemos que G é finitamente presentado se existe uma presentação S,R tal que S e R são conjuntos finitos.

Um grupo pode ter diversas presentações diferentes. Um exemplo de presentação é a do grupo Diedral

$$D_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ba)^2 = 1 \rangle.$$

Se um grupo G pode ser finitamente presentado, com $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ e $R = \{w_1, w_2, \ldots, w_k = 1\}$, então podemos escrever

$$G = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n \mid w_1 = w_2 = \cdots = w_k = 1 \rangle$$

Em particular, durante os próximos capítulos estudaremos o Grupo de Traças de Artin B_n, cuja presentação é dada por

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n | \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ se } |i-j| > 1,\ \sigma_j \sigma_i \sigma_j = \sigma_i \sigma_j \sigma_i \text{ se } |i-j| = 1 \right\rangle$$

As presentações de um grupo são excepcionalmente úteis para encontrar homomorfismos entre grupos. Seja G um grupo gerado pelos elementos a, b, com relações $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Se existem elementos a', b' de um grupo H que satisfazem essas relações, então existe um homomorfismo entre G e H.

3 Tranças

Ao contrário de diversas estruturas matemáticas abstratas, as tranças matemáticas possuem uma contraparte tangível, portanto será mais fácil encontrar bases para assentar o pensamento quando estivermos estudando suas propriedades. Não serão todas as propriedades pertencentes a uma trança comum que serão de nosso interesse. Alguns exemplos são o material ou grossura da trança investigada, isto significa que essas propriedades não serão consideradas quando formos *diferenciar* duas tranças.

Já tratando de propriedades que estaremos interessados, avaliaremos os trançados de cada trança. É claro que, mesmo que feitas com uma máquina de produção, duas tranças produzidas a partir do mesmo modelo possuirão diferenças, ainda que mínimas. Estabeleceremos quais diferenças serão toleráveis e então conseguiremos criar classes de equivalências entre tranças, que efetivamente será a estrutura que trabalharemos.

3.1 O que é uma trança

Definição 3.1 *Considere dois planos paralelos $E_1, E_2 \in E^3$ no espaço euclidiano tridimensional, com n segmentos $d_1, \ldots, d_n$ que conectam pontos iniciais $A_1, \ldots, A_n$ pertencentes a E_1, a pontos finais $B_1, \ldots, B_n$ pertencentes a E^2, satisfazendo os seguintes itens:*

1. *Os segmentos $d_1, \ldots, d_n$ são distintos dois a dois;*
2. *Cada d_i conecta algum A_i com algum B_j, onde i e j podem ser diferentes. Porém, não é permitido conectar A_i com A_j ou B_i com B_j, ou seja, podemos apenas conectar pontos finais a pontos iniciais.*
3. *Dado um plano qualquer paralelo a E_1 e E_2, este deve intersectar os arcos d_i em apenas um ponto, isto é, os segmentos d_i de nossa trança devem descer monotonamente.*

Tal configuração de n-arcos, é chamada de n-trança, ou de trança com n cordas. Por sua vez, cada segmento d_i será chamado de corda *ou i-ésima corda.*

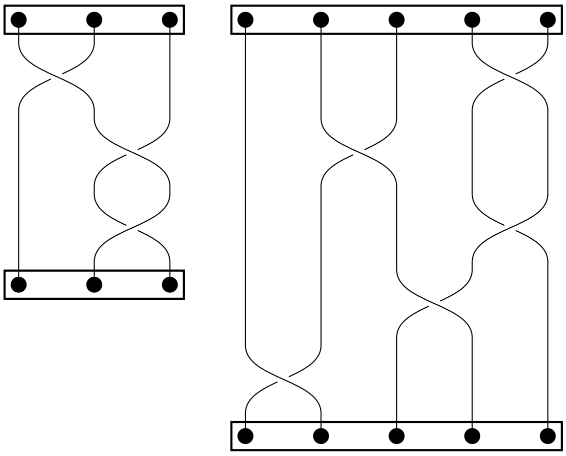


Figura 3.1: Exemplos de Tranças

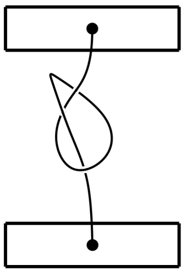


Figura 3.2: Uma não trança

denotaremos por $\mathcal{B}_n$ o conjunto de todas as n-tranças.

Observação 3.2 *Estritamente falando os arcos $d_1, \ldots, d_n$ deveriam ser poligonais, porém nossa representação será feita através de curvas para facilitar a visualização.*

Em geral trabalharemos com *diagramas regulares*, encaixados entre traços, das tranças no plano, pois, por mais que já estejamos reproduzindo uma projeção em um plano de nossas tranças, já que estas estão sendo vistas em um papel, elas deveriam estar sendo visualizadas como uma configuração de cordas no espaço 3D. De forma então a uniformizarmos nossa representação, definimos

Definição 3.3 *Seja p uma aplicação que leva a trança $\beta \in B_n$ a sua projeção no plano yz e possuí as seguintes propriedades:*

1. *$p(\beta)$ tem um número finito de pontos de intersecção.*

2. *Se Q é um ponto de intersecção de $p(\beta)$, então a imagem inversa $p^{-1}(Q) \cap \beta$ de Q em β tem exatamente dois pontos. Portanto, no máximo dois pontos distintos de β*

são aplicados sobre o mesmo ponto em $p(\beta)$. Nesses casos, diremos que Q é um ponto duplo de $p(\beta)$ e, de maneira a conseguirmos diferenciar qual corda está por cima da outra, apagamos, na proximidade do ponto duplo, um pequeno pedaço de cada um dos lados da corda que passa por baixo.

3. *Um vértice de β nunca é aplicado sobre um ponto de $p(\beta)$.*

Uma projeção de uma trança β, em um plano, que possuí as propriedades acima, com exceção da convenção descrita para representação de cruzamentos, é dita uma Projeção Regular *de β. Um diagrama que composto por uma projeção regular ajustada para cumprir com a convenção de cruzamentos é dito um* Diagrama Regular *de β.*

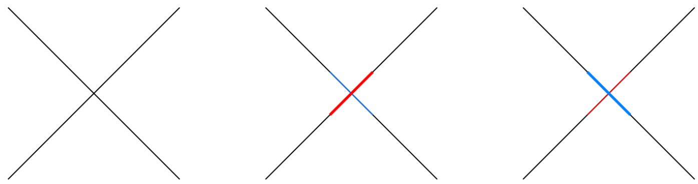


Figura 3.3: Ponto duplo e suas representações possíveis em um diagrama regular

Imagine por um momento que nossas representações de tranças estivessem sendo feitas por desenhos a mão livre. Ainda que estivéssemos representando a mesma trança e fossemos desenhistas profissionais, ela teria pequenas diferenças quando fossem comparados dois desenhos. Disto precisamos estabelecer uma forma de verificar se duas tranças são equivalentes, daí surge a seguinte definição.

Definição 3.4 *(Movimento elementar) Suponhamos que $\mathbb{D}$ é um cubo unitário e que dentro desse cubo existe uma coleção de cordas satisfazendo as condições da Definição 3.1, isto é, uma trança. Chamemos tal trança de β . (Pelos propósitos dessa definição, estabelecermos rigorosamente os movimentos permitidos que nos permitirão estabelecer uma classe de equivalência entre as tranças, é necessário ser mais rigoroso e considerar exclusivamente a imagem poligonal de uma corda). Chamemos de d uma das cordas de β. Seja d uma corda de β, AB uma aresta de d e C um ponto em $\mathbb{D}$ tal que o triângulo $\triangle ABC$ (em $\mathbb{D}$) não intersecta nenhuma corda de β e intersecta d apenas no segmento AB. Além disso, suponhamos que*

1. *$AC \cup CB$ intersecta todo plano de E_s, para todo $0 \leq s \leq 1$, no máximo em um ponto.*

Dado que os itens acima são respeitados, então a operação que denotaremos por Ω, definida como:

2. *Substitua AB pelas duas arestas $AC \cup CB$,*

ou o inverso da operação de Ω, isto é, se $AC \cup CB$ é uma parte da corda e $\triangle ABC$ não intersecta nenhuma outra corda, então a operação, que denotaremos como Ω^{-1}, definida como

2' Substitua $AC \cup CB$ pela aresta AB,

é chamada um movimento elementar *sobre uma trança. Note que, devido a condição* (1) *acima, após aplicarmos um movimento elementar, e portanto uma série de movimentos elementares, a configuração resultante continua sendo uma trança.*

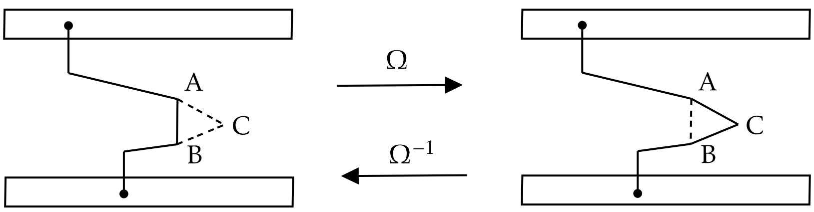


Figura 3.4: O movimento elementar

Considere a seguinte trança: Note que na área destacada a terceira corda passa por

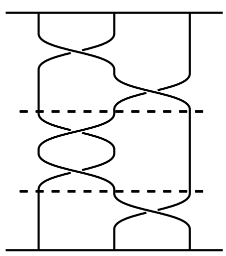


Figura 3.5: Um movimento elementar antes

cima da segunda corda e imediatamente passa por cima novamente. Dessa forma é possível realizarmos dois movimentos elementares, como descritos na definição e adquirirmos a seguinte trança

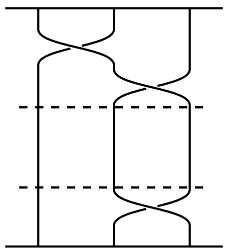


Figura 3.6: Um movimento elementar depois

Definição 3.5 *(Equivalência entre tranças) Uma n-trança β é dita* equivalente *(ou igual) a uma outra trança $\beta^{'}$, e denotamos por $\beta \sim \beta^{'}$, se β pode ser transformada em $\beta^{'}$ aplicando a β uma série finita de movimentos elementares no interior do cubo $\mathbb{D}$.*

Observação 3.6 *Note que $\sim$ é uma relação de equivalência. É reflexiva por definição, não necessitando de movimento elementar. Também é simétrica. De fato, sejam $\beta, \beta^{'} \in \mathcal{B}_n$, se $\beta \sim \beta^{'}$, então existe uma sequência finita de movimentos elementares, tal que*

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_{m-1} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m = \beta^{'}.$$

e portanto, em cada um dos passos, tomando o inverso, temos

$$\beta = \beta_0 \xleftarrow{(\Omega^{\pm 1})^{-1}} \beta_1 \xleftarrow{(\Omega^{\pm 1})^{-1}} \dots \xleftarrow{(\Omega^{\pm 1})^{-1}} \beta_{m-1} \xleftarrow{(\Omega^{\pm 1})^{-1}} \beta_m = \beta^{'},$$

e então $\beta^{'} \sim \beta$.

A transitividade também segue. Seja $\tilde{\beta} \in \mathcal{B}_n$ tal que $\beta \sim \tilde{\beta}$ e $\tilde{\beta} \sim \beta^{'}$. Então existe uma sequência finita de movimentos elementares que levam β em $\tilde{\beta}$ e outra sequência finita de movimentos elementares que levam $\tilde{\beta}$ em $\beta^{'}$. Combine essas duas sequência e assim teremos uma sequência finita de movimentos elementares que levam β em $\beta^{'}$. Logo $\beta \sim \beta^{'}$

Denotamos o conjunto das classes de equivalência das n-tranças como $B_n = \mathcal{B}_n / \sim$.

Definição 3.7 *Seja f um mapa do conjunto de todas as tranças $\mathcal{B}$ para algum objeto algébrico, como um número ou polinômio, então se f possui a seguinte propriedade*

$$\beta \sim \beta^{'} \implies f(\beta) = f(\beta^{'})$$

então f é dita ser uma invariante *de $\mathcal{B}$, ou simplesmente* invariante de tranças.

Exemplo 3.8 Seja $f(\beta)$ o número de cordas de β, então o mapa $f : \mathcal{B} \to \mathbb{N}$ é um invariante de tranças.

Exemplo 3.9 Seja β uma n-trança e suponha que a i-ésima corda d_i de β une A_i com $B_{j(i)}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Defina $\pi : \mathcal{B}_n \to S_n$ como

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j(1) & j(2) & \ldots & j(n) \end{pmatrix}.$$

Se $\beta \sim \beta^{'}$, então para cada i, a i-ésima corda em cada uma das duas tranças deve levar ao mesmo ponto final $B_{j(i)}$. Então elas devem possuir a mesma permutação.

Usualmente a permutação para uma dada trança é chamada de permutação da trança e denotado por $\pi(\beta)$. Note que o kernel do homomorfismo π é o conjunto de n-tranças para o qual d_i une A_i com B_i.

Definição 3.10 *Uma n-trança β será chamada n-trança* pura *se*

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Isto é, uma n-trança pura é uma n-trança para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ a i-ésima corda leva A_i em B_i. Denotaremos o conjunto das classes de equivalência das n-tranças puras como P_n.

Perceba que podemos construir um isomorfismo através desse homomorfismo, mas isso será feito mais tarde.

3.2 O Grupo de Tranças B_n

A seguir estabeleceremos a operação que será utilizada no conjunto de tranças B_n. Em um primeiro momento a demonstração das propriedades necessárias para a definição de B_n como um grupo serão feitas de maneira intuitiva e com o auxilio de ilustrações para uma maior compreensão dessa nova estrutura com a qual estamos trabalhando. Entretanto, após estabelecermos os geradores do grupo B_n e sua operação de concatenação, poderemos notar que demonstrações mais rigorosas seriam semelhantes a aquelas vistas na Seção 2.1.

Definição 3.11 *Suponhamos que β_1 e β_2 são duas n-tranças em $\mathcal{B}_n$ (o conjunto de todas as n-tranças). Podemos formar uma terceira n-trança a partir das duas primeiras, a chamaremos de* produto *de β_1 com β_2, denotado por $\beta_1\beta_2$, e é obtida por concatenação, como explicamos a seguir:*

Primeiro, tomemos dois quadrados $\mathbb{U}_1$ e $\mathbb{U}_2$ que contêm β_1 e β_2, respectivamente, e "colemos"(ou de forma mais precisa identifiquemos) a aresta inferior de $\mathbb{U}_1$ com a aresta superior de $\mathbb{U}_2$. Neste processo de "colagem"das arestas podemos assumir que os respectivos pontos finais das duas tranças também são colados (ou identificados). Agora, removemos apenas a aresta resultante da colagem (que está no meio), e obtemos assim uma nova trança. Podemos assumir que a nova trança também pertence a um quadrado, digamos $\mathbb{U}$.

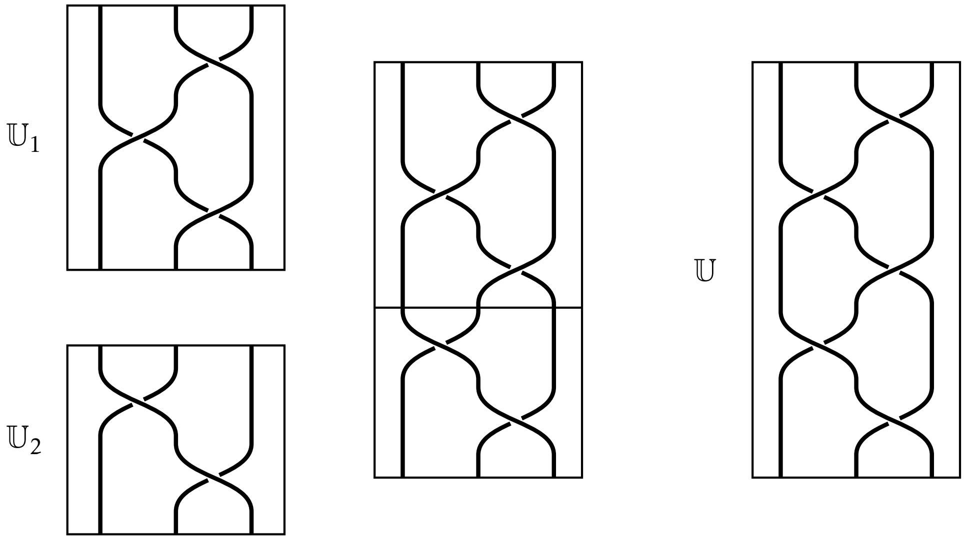


Figura 3.7: A operação de concatenação.

Esta nova n-traça é o produto das duas n-tranças β_1 e β_2.

Proposição 3.12 *Sejam $\beta, \beta^{'}, \bar{\beta}, \bar{\beta}^{'}$ n-tranças tal que $\beta \sim \beta^{'}$ e $\bar{\beta} \sim \bar{\beta}^{'}$. Então $\beta\bar{\beta} \sim \beta^{'}\bar{\beta}^{'}$.*

Demonstração: Dado que $\beta \sim \beta^{'}$, pela Definição 3.5, existe uma sequência finita,

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \ldots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_{m-1} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m = \beta^{'}.$$

Essa sequência, por sua vez, induz uma segunda sequência

$$\beta\bar{\beta} = \beta_0\bar{\beta} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1\bar{\beta} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \ldots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_{m-1}\bar{\beta} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m\bar{\beta} = \beta^{'}\bar{\beta}.$$

Portanto, temos que $\beta\bar{\beta} \sim \beta^{'}\bar{\beta}$. De forma similar, como $\bar{\beta} \sim \bar{\beta}^{'}$, então existe uma sequência finita,

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \bar{\beta}_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \ldots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \bar{\beta}_{k-1} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \bar{\beta}_k = \bar{\beta}^{'},$$

que por sua vez induz a sequência finita

$$\beta^{'}\bar{\beta} = \beta^{'}\bar{\beta}_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta^{'}\bar{\beta}_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta^{'}\bar{\beta}_{k-1} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta^{'}\bar{\beta}_k = \beta^{'}\bar{\beta}.$$

Logo, $\beta^{'}\bar{\beta} \sim \beta^{'}\bar{\beta}^{'}$.

Pela transitividade de $\sim$ segue que $\beta\bar{\beta}(\sim \beta^{'}\bar{\beta}) \sim \beta^{'}\bar{\beta}^{'}$. □

Proposição 3.13 *O produto das tranças é associativo, isto é, dados $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathcal{B}_n$*

$$(\beta_1\beta_2)\beta_3 \sim \beta_1(\beta_2\beta_3).$$

Demonstração: A demonstração segue pela ilustração a seguir □

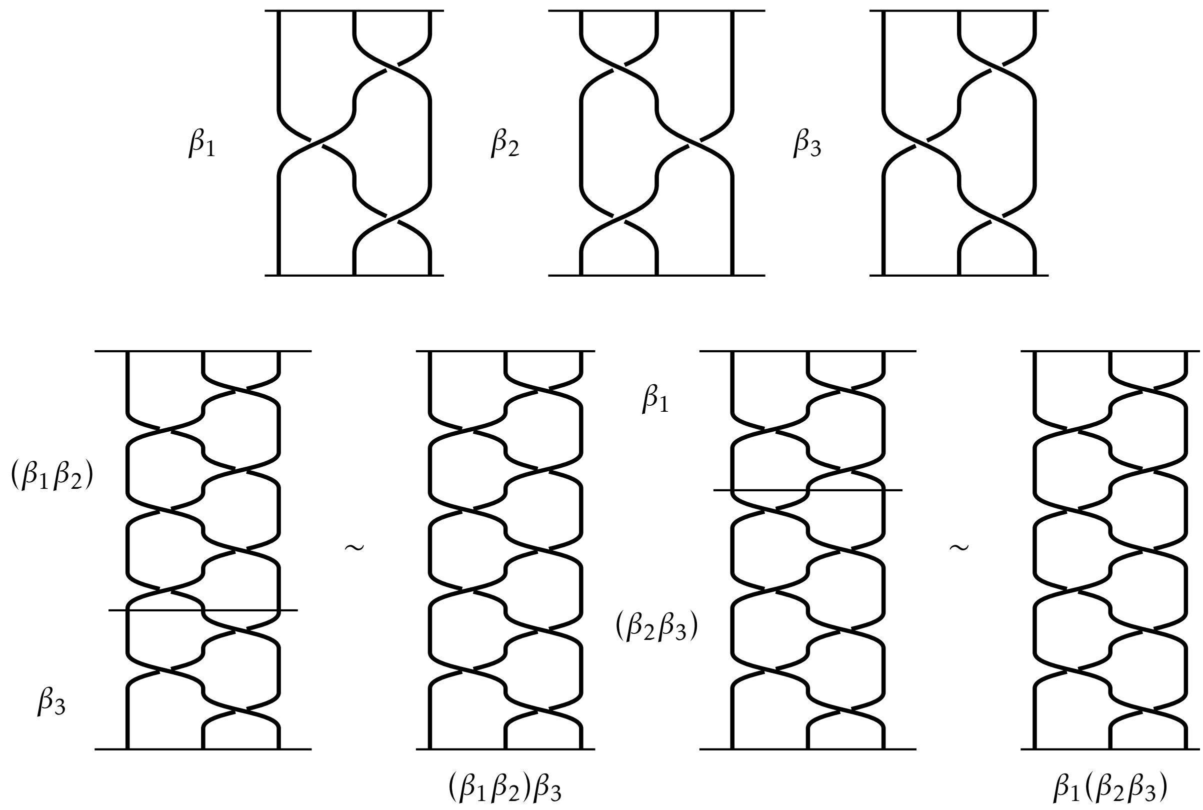


Figura 3.8: Associatividade.

Observação 3.14 *Note que o produto de n-tranças não é comutativo. Considere as tranças β_2 e β_3 da proposição anterior.*

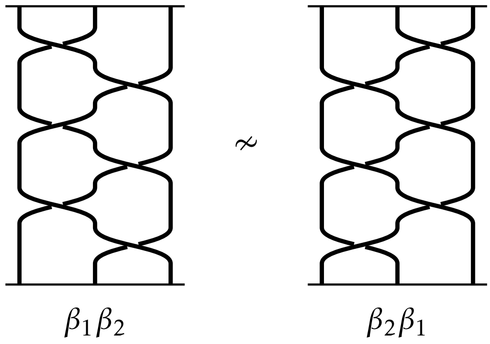


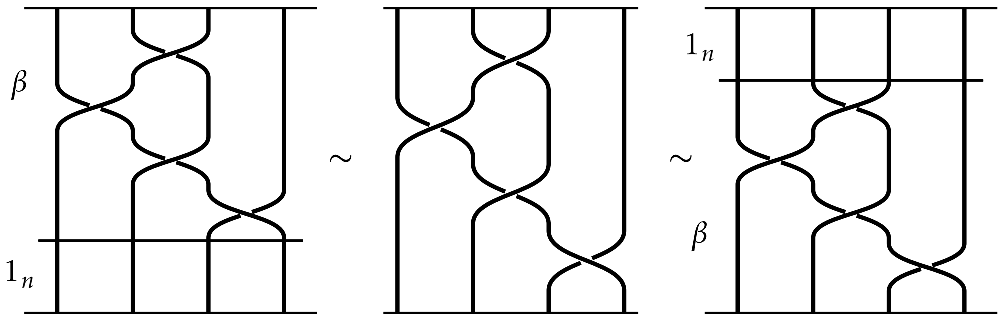
Figura 3.9: Não Comutatividade.

Proposição 3.15 *Seja e a n-trança formada apenas por cordas verticais, sem estas estarem entrelaçadas dois a dois. Então para qualquer n-trança β temos que*

$$e\beta \sim \beta \text{ e } \beta e \sim \beta.$$

A trança e é chamada trança identidade com n cordas, e a denotaremos por 1_n.

Demonstração: Basta notar que, para qualquer trança $\beta \in \mathcal{B}_n$ vale Para ver a equi-



valência, basta ”encurtarmos”as cordas. □

Proposição 3.16 *Para cada n-trança β, existe uma n-trança $\bar{\beta}$ tal que*

$$\beta\bar{\beta} \sim 1_n \text{ e } \bar{\beta}\beta \sim 1_n.$$

Tal trança é chamada inversa *de β e é denotada como β^{-1}.*

Seja β uma n-trança, vamos construir uma n-trança $\bar{\beta}$ a partir de β como segue. Imagine que a aresta inferior do quadrado $\mathbb{U}$, que contém β, atua como um espelho. Tomando a imagem espelhada de β, podemos construir uma nova n-trança, $\bar{\beta}$. Assim, basta notar que $\beta\bar{\beta} \sim 1_n$. Até agora não diferenciamos uma trança $\beta \in \mathcal{B}_n$

de sua classe de equivalência (dada pela relação $\sim$) $[\beta] \in B_n$, note, entretanto, que para considerarmos uma estrutura de grupo, de modo que o elemento neutro e o elemento inverso, sejam únicos, temos que trabalhar com as classes de equivalência das n-tranças.

Teorema 3.17 *O Conjunto de classes de equivalência de n-tranças, B_n, forma um grupo. Este grupo é usualmente chamado "grupo de n-tranças"ou "grupo de n-tranças de Artin".*

Demonstração:

- Operação binária: Definição 3.11
- Associatividade: Proposição 3.13
- Identidade: Proposição 3.15
- Inverso: Proposição 3.16 Onde o inverso da classe $[\beta]$, denotado por $[\beta]^{-1}$, é $[\beta^{-1}]$.

$\square$

3.3 Uma presentação para o Grupo de n-Tranças

Seria muito útil conseguirmos encontrar uma forma de presentar o Grupo de n-tranças através de um conjunto de geradores. Isto facilitaria que conseguíssemos encontrar grupos com estruturas que, ao primeiro momento, não parecem ser as mesmas, mas na verdade o são. Vamos então olhar para a projeção de uma trança em um plano. Podemos dividir tal projeção, de modo que cada divisão contenha apenas um um cruzamento entre as cordas. Note que cada parte da separação que fizemos é por si só uma n-trança e o produto delas compõe a nossa n-trança original. Dessa forma, denotaremos por σ_i e σ_i^{-1} as tranças representadas nas figuras a seguir

Esse conjunto $\sigma_i^{\pm 1}$, com $i = 1, 2, \dots, n-1$ é conhecido como Tranças de Artin, além de tudo este conjunto será o conjunto gerador do grupo de n-tranças, B_n.

Entretanto note que quando nos referimos a σ_i estamos, na realidade, tratando da classe de equivalência de σ_i

Proposição 3.18 *Qualquer n-trança $\beta \in B_n$ pode ser escrita como o produto de elementos do conjunto $\sigma_i^{\pm 1}$ com $i = 1, 2, \dots$, isto é,*

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$$

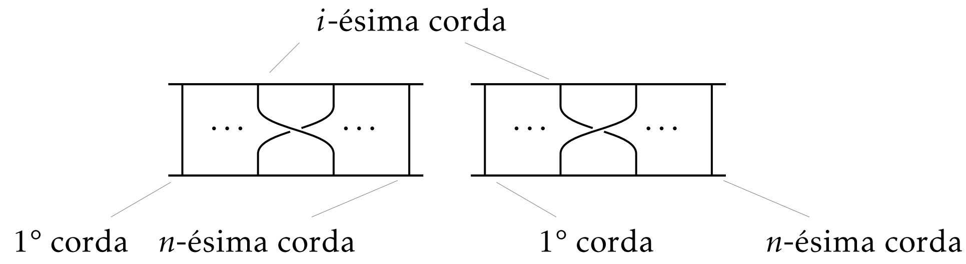


Figura 3.10: As tranças σ_i e σ_i^{-1}.

onde $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n-1$ *e* $\epsilon_i = \pm 1$ *para* $i = 1, 2, \dots, k$.

Basta notarmos que conseguimos fazer a divisão evidenciada na figura 3.11 Seme-

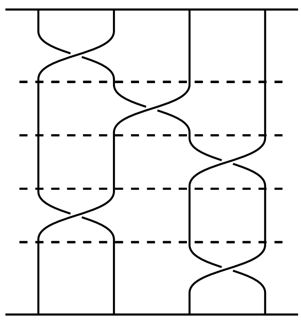


Figura 3.11: Divisão de uma trança em níveis.

lhantemente aos Grupos livres, chamaremos uma sequência $\{\sigma_{i_1}^{\epsilon_1}, \sigma_{i_2}^{\epsilon_2}, \dots, \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}\}$ de palavra, e também nos referenciaremos a cada um de seus componentes como letras. Seja $\beta \in \mathcal{B}_n$ uma trança, diremos que $\sigma_{i_1}^{\epsilon_1}\sigma_{i_2}^{\epsilon_2}\dots\sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ é uma palavra representativa da trança β se, e somente se, $\beta \sim \sigma_{i_1}^{\epsilon_1}\sigma_{i_2}^{\epsilon_2}\dots\sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$.

Agora que já temos os geradores do grupo B_n, precisamos agora procurar as relações da qual esses geradores obedecem.

Teorema 3.19 *Para qualquer* $n \geq 1$ *o grupo de n-tranças* B_n *tem a seguinte presentação,*

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ para } 1 \leq i \leq n-2 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ para } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

Omitimos a demonstração devido a sua extensão, para uma demonstração detalhada, consultar a seção 2.2 de [MURASUGI 2012]. Agora que possuímos a presentação para B_n, podemos explorar suas relações com outros grupos. Lembre que na seção anterior comentamos sobre a relação do Grupo de n-tranças com o grupo de permutações S_n, agora temos ferramentas para explorar ainda mais tal relação.

Proposição 3.20 *A aplicação $\sigma : B_n \longrightarrow S_n$ é um homomorfismo de grupos, e portanto seu núcleo, P_n, é um subgrupo normal de B_n. Além disso, o grupo quociente B_n/P_n é isomorfo a S_n e portanto $[B_n : P_n] = n!$.*

Demonstração: Sejam $\beta_1, \beta_2 \in B_n$. Note que, a permutação associada a trança $\beta_1\beta_2$, $\pi(\beta_1\beta_2)$, dado que o produto de tranças é dado por concatenação, será o mesmo que $\pi(\beta_1)\pi(\beta_2)$, isto é

$$\pi(\beta_1\beta_2) = \pi(\beta_1)\pi(\beta_2).$$

Logo, $\pi : B_n \to S_n$ é um homomorfismo de grupos. Note que, por definição do grupo de n-tranças puras P_n, para toda trança $\beta \in P_n$ temos $\pi(\beta) = (1)$, a permutação identidade. Segue como consequência que o kernel de π, P_n, é um subgrupo normal de B_n.

Queremos mostrar que π é sobrejetor. Faremos por indução no número n de cordas. Se $n = 2$ então sabemos que as permutações possíveis são (1), que é a permutação identidade e $(2,1)$ Uma trança que possui uma dessas permutações como imagem

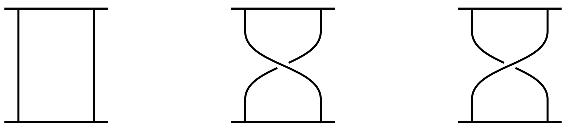


Figura 3.12: Tranças de S_2

por π são facilmente construídas, como visto na Figura 3.12. Suponha então que seja possível construir tranças para permutações em S_{k-1}, iremos mostrar que também é possível construir tranças para permutações em S_k. Seja $\rho \in S_K$, então podemos escrever

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ j(1) & j(2) & \dots & j(k) \end{pmatrix}.$$

Tome $1 \leq i \leq k$ tal que $j(i) = k$, então podemos tomar a trança dada por $\sigma_i\sigma_{i+1}\dots\sigma_{k-1}$ Note agora que, ao olharmos para a trança após sua última intersecção, temos a trança identidade. Por hipótese é possível construir uma $(k-1)$-trança para qualquer permutação de $k-1$ elementos. Seja então β a trança que representa a permutação

$$\rho^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & k \\ j(1) & j(2) & \dots & j(i-1) & j(i+1) & \dots & j(k) \end{pmatrix}.$$

então $\sigma_i\sigma_{i+1}\dots\sigma_{k-1}\beta$ irá representar a permutação ρ. Dessa forma podemos ver que π é sobrejetora.

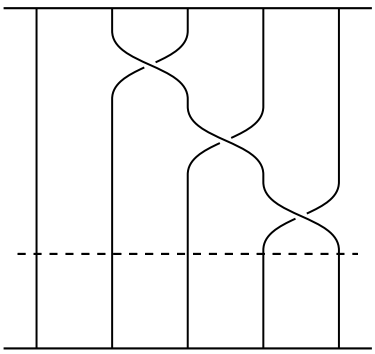


Figura 3.13: Levando uma corda a última posição

Pelo primeiro Teorema do Isomorfismo para Grupos, temos que o grupo quociente B_n/P_n é isomorfo a S_n, e como P_n é subgrupo normal de B_n segue que $[B_n : P_n] = |B_n/P_n|$. Portanto, $[B_n : P_n] = |S_n| = n!$. □

Para deixarmos claro o processo evidenciado para demonstração da sobrejeção, considere a seguinte permutação

$$\rho' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A primeira corda deve ser levada a terceira posição, logo podemos começar a construir a trança representativa pela seguinte expressão: $\sigma_1\sigma_2$. Dessa forma não precisaremos mais nos preocupar com a primeira corda. Agora verificamos que a corda

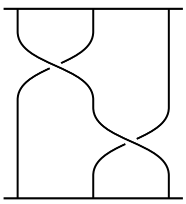


Figura 3.14: Trança $\sigma_1\sigma_2$

que deve ir para a posição 2 é a segunda, logo completamos nossa expressão e temos $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$.

Note, entretanto, que em nossa demonstração utilizamos um argumento não demonstrado anteriormente. Fica implícito da demonstração anterior que estamos considerando B_{n-1} como um subgrupo de B_n, daí segue a seguinte proposição

Proposição 3.21 *Para $1 \leq m \leq n$, o mapa $\phi : B_m \to B_n$ definido por*

$$\phi(\sigma_i) = \sigma_i$$

para $i = 1, 2, \dots, m-1$ de B_m em B_n. Além disso, ϕ é injetora, então podemos considerar B_m como um subgrupo de B_n

Demonstração: Olhando as presentações de B_m e B_n, podemos notar que ϕ é um homomorfismo, já que todas as relações de presentação de B_m são satisfeitas em B_n.

Precisamos então mostrar que ϕ é injetora. Suponha que $\phi(\beta) = 1_n$ para alguma $\beta \in B_m$, isto é, uma m-trança β para o qual adicionamos $n-m$ cordas.

Sabemos então, que existe uma sequência finita tal que

$$\phi(\beta) = \beta_0 \to \beta_1 \to \dots \to \beta_k = 1_n$$

entretanto, essa sequência induz uma segunda sequência em B_m, onde

$$\beta = \tilde{\beta}_0 \to \tilde{\beta}_1 \to \dots \tilde{\beta}_k = 1_m$$

onde, caso o movimento elementar de $\beta_i \to \beta_{i+1}$ não envolva as $n-m$ cordas que adicionamos, aplicamos o mesmo movimento para levar $\tilde{\beta}_i \to \tilde{\beta}_{i+1}$ e, caso contrário, tomamos $\tilde{\beta}_{i+1} = \tilde{\beta}_i$. Assim podemos ver que $\beta \sim 1_m$. □

Para ilustrarmos o processo descrito na demonstração acima, considere as seguintes tranças: Chamemos essas tranças de β_1 e β_2 respectivamente. Note que essas

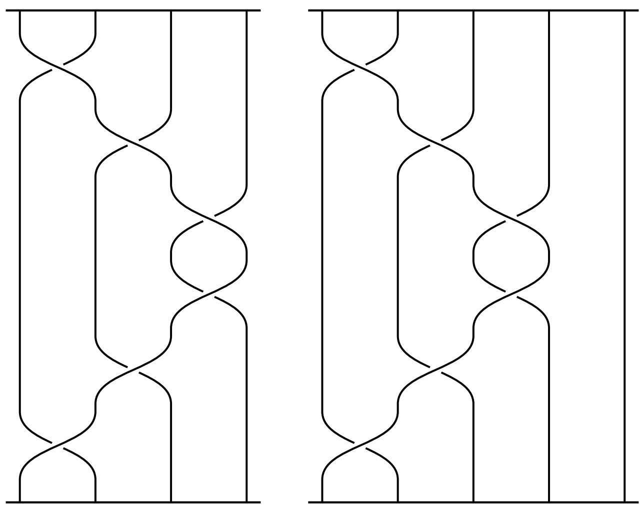


Figura 3.15: Passo 1

tranças podem ser escritas através de geradores da seguinte forma

$$\beta_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$$

e

$$\beta_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}.$$

Naturalmente, pela definição de nosso homomorfismo, sua representação é a mesma, mudando apenas o número de cordas. Sabemos que $\sigma_i\sigma_i^{-1} = 1$, note que fazer essa substituição é o mesmo que realizar um movimento elementar na representação de nossas tranças, como ilustrado na imagem a seguir onde substituímos $\sigma_3\sigma_3^{-1}$ em ambas as tranças

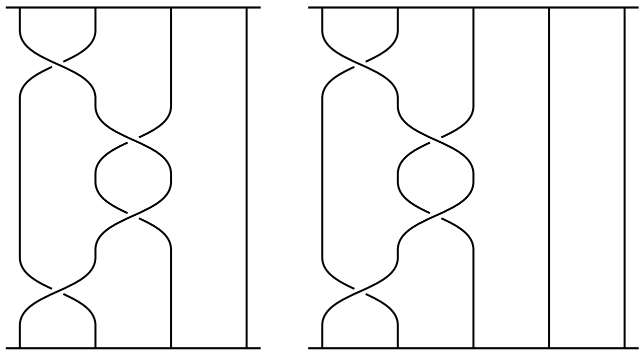


Figura 3.16: Passo 2

Basta agora fazermos novamente um movimento elementar fazendo $\sigma_2\sigma_2^{-1} = 1$ e em seguida $\sigma_1\sigma_1^{-1} = 1$ e assim chegamos na trança trivial.

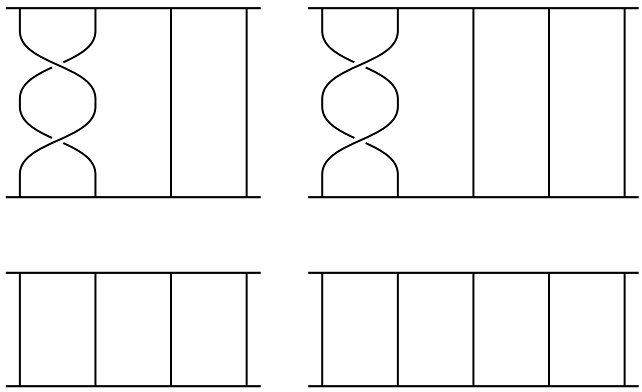


Figura 3.17: Passo 3 e 4

Corolário 3.22 *Se β é uma m-trança que não é equivalente a trança trivial, então β como uma n-trança, com $n \geq m$ também não será equivalente a trança trivial. (quando nos referimos a β como n-trança, estamos nos referindo a β com mais $n-m$ cordas retas).*

A Proposição 3.21 nos leva a pensar que, com um n grande o suficiente, seria possível explorarmos propriedades que são gerais para todos os grupos de tranças. Dessa forma, introduzimos a seguinte definição, que será muito útil no capítulo a seguir

Definição 3.23 *Denotaremos por B_∞ o grupo de tranças com base $\{\sigma_i^\epsilon \mid 1 \leq i < \infty, \epsilon = \pm 1\}$ e $\mathcal{B}_\infty$ o conjunto de tranças equivalentes á aquelas de B_∞ através de movimentos elementares.*

4 Uma ordem para o Grupo de Tranças

Neste capítulo buscaremos demonstrar um resultado que possui consequências muito significantes sobre o Grupo de Tranças. Buscaremos demonstrar que o grupo B_n possuí uma ordem a esquerda. Porém, antes de fazê-lo e apresentar o ferramental para tal, demonstraremos um resultado mais simples que irá motivar nossa busca, o de que o monoide das chamadas *tranças positivas*, B_n^+ também possui uma ordenação a esquerda. Como o tema geral do nosso capítulo será a ordenação, é proveitoso definimos uma ordem parcial não estrita e uma ordem parcial estrita

Definição 4.1 *Uma relação* $" \leq "$ *é dita uma ordem parcial não estrita em um conjunto* S *se satisfaz as seguintes propriedades*

1. *Reflexiva:* $a \leq a$ *para todo* $a \in S$.

2. *Antissimétrica: Sejam* $a, b \in S$, *se* $a \leq b$ *e* $b \leq a$, *então* $a = b$.

3. *Transitividade: Sejam* $a, b, c \in S$, *se* $a \leq b$ *e* $b \leq c$, *então* $a \leq b$.

Definição 4.2 *Uma relação* $" \prec "$ *é dita uma ordem parcial estrita em um conjunto* S *se satisfaz as seguintes propriedades*

1. *Irreflexiva:* $a \nprec a$ *para todo* $a \in S$.

2. *Assimétrica: Sejam* $a, b \in S$, *se* $a \prec b$, *então* $b \nprec a$.

3. *Transitividade: Sejam* $a, b, c \in S$, *se* $a \prec b$ *e* $b \prec c$, *então* $a \prec b$.

Definição 4.3 *Dado* $\leq$ *(resp.* $\prec$ *como definido acima, se para todo* $a, b \in S$

$$a \leq b \text{ ou } b \leq a$$

$$(\text{resp.} a \prec b \text{ ou } b \prec a).$$

Então dizemos que $\leq$ *(resp.* $\prec$*) é uma ordem* ***linear***.

4.1 O monoide B_n^+

O titulo desta seção traz duas informações novas que carecem de uma definição.

Definição 4.4 *Um monoide é uma upla $(M,\star)$ composta por um conjunto e uma operação binária, para qual valem as seguintes propriedades:*

1. ***Fechamento**: Dados $a,b \in M$ temos $a \star b \in M$.*

2. ***Associatividade:** Para todo $a,b,c \in M$ vale*

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

3. ***Elemento Neutro:** existe um único $e \in M$ tal que para todo $a \in M$ vale*

$$a \star e = e \star a = a$$

Note que esta é a mesma estrutura de um grupo, entretanto relaxamos a condição da existência de uma inversa para cada elemento. Sendo assim, todo grupo é também um monoide.

Como vimos na primeira seção, para grupos livres, é interessante definirmos também o conceito de conjunto gerador para um monoide.

Definição 4.5 *Seja M um monoide e A um subconjunto de M. Dizemos que A* gera *M, se para todo elemento $\alpha \in M$ existem $y_1, y_2, \dots, y_k \in A$ tal que*

$$\alpha = y_1 y_2 \dots y_k$$

agora que definimos o primeiro termo que estava em nosso título, seguimos para a definição do segundo

Definição 4.6 *Seja $B_n^+ \subset B_n$ o monoide gerado por $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$. As tranças que pertencem a esse monoide são chamadas de tranças positivas.*

Grande parte do trabalho empregado nos próximos capítulos será no sentido de mostrar que B_n é ordenável a esquerda. Entretanto há um resultado mais simples que concerne o monoide das n-tranças positivas.

Definição 4.7 *Seja $a,b \in B_n^+$. Escrevemos que $a \preceq b$ se existe $c \in B_n^+$ tal que $ac = b$. Nesse caso dizemos que a é prefixo de b.*

Proposição 4.8 *A relação de ordem definida acima, é uma ordem parcial.*

Demonstração: Para demonstrarmos que $\preceq$ é uma ordem parcial, mostraremos que valem as propriedades de transitividade, reflexividade e antissimétrica. Seja $a,b \in B_n^+$ se $a \preceq b$, então existe $x \in B_n^+$ tal que $ax = b$.

- Transitiva: Se $a \preceq b$ e $b \preceq d$, então $a \preceq d$. Como $a \preceq b$ e $b \preceq d$, então existem $x,y \in B_n^+$ tais que,
$$ax = b \qquad by = d.$$
Substituindo b na segunda equação, temos
$$axy = d,$$
e como $xy \in B_n^+$, então $a \preceq d$.

- Reflexiva: $a \preceq a$. Seja $e \in B_n^+$ o elemento neutro. Dessa forma podemos escrever $a = ea$ e portanto $a \preceq a$.

- Antissimétrica: Se $a \preceq b$ e $b \preceq a$ então $a = b$. Como $a \preceq b$ e $b \preceq a$, então existem $x,y \in B_n^+$ tal que:
$$ax = b \qquad by = a,$$
e portanto $axy = a$. Daqui segue que $xy = 1$ e portanto $x = y^{-1}$, note entretanto que $x \in B_n^+$, logo $x = y = e$ e assim $a = b$.

Portanto B_n^+ possui uma ordem parcial não estrita. □

Proposição 4.9 *A relação $\preceq$ é multiplicativa á esquerda, ou seja, se $a,b,x \in B_n^+$, então*
$$a \preceq b \implies xa \preceq xb$$

Demonstração: Se $a \preceq b$ então existe $y \in B_n^+$ tal que $ay = b$, concatenando x em ambos os lados, segue que $xay = xb$, isto é $xa \preceq xb$. □

Note que $\preceq$ não é multiplicativa a direita, uma vez que não vale a comutatividade.

Proposição 4.10 *Se $a,b,x,y \in B_n^+$, então vale a lei do cancelamento, isto é*
$$xay = xby \implies a = b.$$

Demonstração: Suponha que $xay = xby$. Existem $x^{-1}, y^{-1} \in B_n$ tais que
$$x^{-1}xay = x^{-1}xby$$

$$ayy^{-1} = byy^{-1} \implies a = b.$$

□

Agora que possuímos uma relação parcial de ordem em B_n^+, podemos definir o *menor* múltiplo comum de duas tranças positivas.

Definição 4.11 *Sejam $a, b \in B_n^+$, suponha que exista um $m \in B_n^+$ tal que:*

1. *$a \preceq m$, $b \preceq m$,*

2. *Para todo $m' \in B_n^+$ tal que $a \preceq m'$ e $b \preceq m'$ temos $m \preceq m'$.*

Nesse caso, definimos m como sendo o mínimo múltiplo comum (MMC) de a e b, a qual será denotado por $m = a \vee b$.

Note que a definição que fazemos é idêntica a quando estamos estudando os inteiros. Isto é natural pela forma como definimos nossa relação de ordem.

Teorema 4.12 *Seja σ_i e σ_j geradores distintos de B_n^+. Então o $MMC(\sigma_i, \sigma_j)$ será obtido da seguinte maneira:*

$$\sigma_i \vee \sigma_j = \begin{cases} \sigma_j\sigma_i & se \quad |i-j| > 1, \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & se \quad |i-j| = 1. \end{cases}$$

A demonstração deste Teorema será omitida por razões de brevidade, entretanto ela pode ser encontrada em [GARSIDE 1969]. Entretanto, note que a ideia do Teorema é semelhante a ideia do mínimo múltiplo comum entre dois primos em $\mathbb{Z}$. Dados dois primos $p, q \in \mathbb{Z}$ sabemos que o mínimo múltiplo comum será pq. Sabemos que para todo $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \geq 2$, então a pode ser representado como uma multiplicação de números primos, ou seja, os números primos podem ser visto, de maneira semelhante aos geradores de B_n, como as "letras"que compõem a representação de um número. Note que, para o caso onde σ_i e σ_j comutam, o resultado é o esperando dentro de nossa comparação com os números primos, entretanto B_n não possuí a propriedade de comutatividade, logo nesse caso precisamos fazer uso de uma propriedade dos geradores. Note que

$$\sigma_i\beta = \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\beta',$$

onde $\beta = \sigma_j\sigma_i$ e $\beta' = \sigma_i\sigma_j$. Seguimos agora para uma propriedade do MMC.

Proposição 4.13 *Sejam $a, b \in B_n^+$. Se m é o MMC entre a e b, para todo $x \in B_n^+$ vale*

$$xm = xa \vee xb$$

Demonstração: Primeiro, note que dado $x \in B_n^+$ temos $xa \preceq xm$ e $xb \preceq xm$ uma vez que nossa relação parcial de ordem é multiplicativa a esquerda. Queremos então mostrar que dado $m' \in B_n^+$ tal que $xa \preceq m'$ e $xb \preceq m'$, então $m' \preceq xm$.

Por hipótese sabemos que existem $t, s \in B_n^+$ tal que $xat = m'$ e $xbs = m'$, isto é, $xat = xbs$. Usando a lei do cancelamento, temos $at = bs$. Seja $k = at$, então $a \preceq k = at$ e $b \preceq k = bs$. Por definição temos então que $m \preceq k$ e portanto $xm \preceq xk = m'$. □

Proposição 4.14 *Seja $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ os elementos geradores de B_n. O elemento*

$$\Delta = \sigma_1(\sigma_2\sigma_1)(\sigma_3\sigma_2\sigma_1)\dots(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_1)$$

é o MMC dos geradores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, isto é, $\Delta = \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \dots \vee \sigma_{n-1}$.

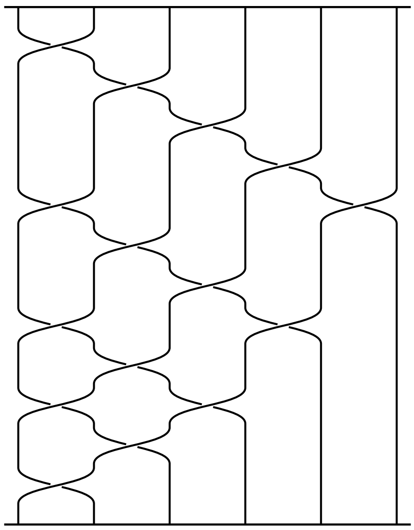


Figura 4.1: O elemento Δ.

4.2 Uma ordem linear para B_n

Neste capítulo exploraremos as ferramentas necessárias para alcançarmos a demonstração de que existe uma ordem linear (total e estrita), para o grupo B_n. Para tal precisaremos de 3 propriedades, a qual chamaremos de A, C e S. Todas elas serão essenciais para demonstrar a existência da ordenação em B_n, entretanto demonstraremos a propriedade A no capítulo 5 e enunciaremos um resultado que leva a demonstração da Propriedade C no Apêndice 6.2. Antes de entrarmos nos detalhes dessas propriedades, enunciaremos como será feita nossa ordenação

Definição 4.15 *Seja $2 \leq n \leq \infty$. Para $\beta_1, \beta_2 \in B_n$, diremos que $\beta_1 < \beta_2$ se, para algum $1 \leq i \leq \infty$ a trança representada por $\beta_1^{-1}\beta_2$ admite ao menos uma trança equivalente onde σ_i está presente, porém nem σ_i^{-1} ou $\sigma_j^{\pm 1}$ com $j < i$ está presente.*

Nesta definição estabelecemos uma propriedade para tranças: Possuir uma representação que possui uma dada σ_i mas não possui σ_i^{-1}. Nomearemos então essa propriedade

Definição 4.16 *Seja w uma palavra representativa de trança, dizemos que w é σ_1-positiva (respectivamente σ_1-negativa, respectivamente σ_1-livre) se w contém ao menos um σ_1 e nenhum σ_1^{-1} em sua representação através de geradores (respectivamente ao menos um σ_1^{-1} e nenhum σ_1, respectivamente não possui σ_1 ou σ_1^{-1} em sua representação*

Podemos tornar essa definição mais geral, mas primeiro precisamos estabelecer uma notação:

Definição 4.17 *Definimos o endomorfismo* shift, *que será denotado por sh da seguinte forma*

$$\begin{aligned} sh : & B_n \to B_n \\ & \sigma_i \mapsto \sigma_{i+1} \end{aligned}$$

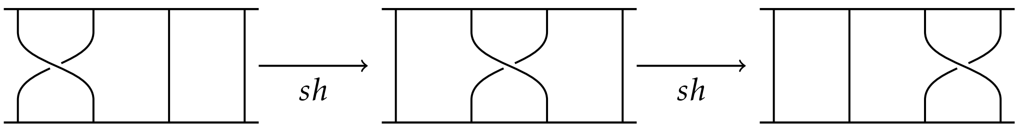


Figura 4.2: O endomorfismo sh aplicado em uma trança de B_4

E então estabelecemos a versão mais geral da Definição 4.16

Definição 4.18 *Seja w uma palavra representativa de trança, dizemos que w é σ-positiva (respectivamente σ-negativa) se é a imagem de uma palavra representativa de trança σ_1-positiva (respectivamente σ_1-negativa) por sh^{i-1} para algum $i \geq 1$, isto é, w contêm ao menos uma letra σ_i, mas nenhuma letra σ_i^{-1}, assim como nenhuma letra $\sigma_j^{\pm 1}$ com $j < i$.*

Agora conseguimos apresentar, de maneira mais clara, a maneira como tentaremos construir uma ordenação dentro do grupo de tranças B_n

Definição 4.19 *Seja $2 \leq n \leq \infty$. Para $\beta_1, \beta_2 \in B_n$, diremos que $\beta_1 < \beta_2$ se, para algum i, a trança $\beta_1^{-1}\beta_2$ admite ao menos uma representação onde σ_i está em sua composição, porém nem σ_i^{-1} ou $\sigma_j^{\pm 1}$ com $j < i$ está presente.*

O que gostaríamos de demonstrar é o seguinte Teorema

Teorema 4.20 *A relação $\leq$ definida em 4.19 é uma ordem linear em B_n que é compatível com a ordenação a esquerda.*

O que nos leva imediatamente a questão: Quais são as propriedades necessárias que $\leq$ deve satisfazer para que seja, de fato, uma ordem linear compatível com a ordenação a esquerda?

Proposição 4.21 *Dado um grupo G, uma ordem linear invariante a esquerda existe em G se, e somente se, existe um subconjunto Π de G que satisfaz $\Pi \cdot \Pi \subset \Pi$ e tal que $1, \Pi$ e Π^{-1} é uma partição de G.*

Demonstração: ($\Longleftarrow$) Seja tal Π dado. Defina $f < g \iff f^{-1}g \in \Pi$ e então, dado $h \in G$ temos $hf < hg \iff (hf)^{-1}hg = f^{-1}g \in \Pi \iff f < g$ e dessa forma temos uma ordem invariante a esquerda.

($\Longrightarrow$) Por outro lado, dada uma ordem invariante a esquerda $<$, tome $\Pi = \{g \in G; 1 < g\}$ e assim, Π, Π^{-1} e $\{1\}$ formaram uma partição de G e $\Pi \cdot \Pi \subset \Pi$, como desejado $\square$

A proposição anterior irá delinear o caminho pela qual seguiremos para demonstrar o Teorema 4.20. Dessa forma basta demonstrarmos que o conjunto $B_n^{\sigma-\text{pos}}$ de todas as n-tranças que admitem ao menos uma representação σ-positiva se qualifica como nosso Π. E assim chegamos nas propriedades essenciais para nossa demonstração

Propriedade A (Aciclicidade) - Uma trança que admite ao menos uma representação σ_1-positiva é não trivial.

Propriedade C (Comparação) - Toda trança em B_n admite uma representação que é σ_1-positiva, σ_1-negativa ou σ_1-livre.

e introduzimos também uma versão alternativa da propriedade acima, que tornará nosso trabalho mais direto.

Propriedade C (Comparação, versão alternativa) - Toda trança em B_n admite uma representação σ-positiva, σ-negativa ou vazia.

Verificar que uma trança é não trivial nem sempre é fácil. Considere a seguinte trança $\beta = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$. Essa trança é apenas uma representação equivalente da trança trivial. Note que, utilizando a propriedade $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ temos

$$\beta = \sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = \sigma_2\sigma_2^{-1} = 1.$$

Este é um exemplo relativamente simples de uma trança, que apenas após a utilização de algumas propriedades se revela ser a trança trivial. A **propriedade A** nos permite garantir que tranças com uma certa propriedade, ser σ_1-positiva, não serão triviais. A **propriedade C**, por outro lado, irá nos permitir dividir o grupo B_n e irá nos dar a intuição de uma partição que será necessária para a demonstração da existência da ordem invariante a multiplicação a esquerda.

Observação 4.22 *Agora, vejamos que a* ***Propriedade C*** *é equivalente a versão alternativa da* ***Propriedade C****. Note que, por definição, uma palavra representativa de trança que é σ-positiva é também σ_1-positiva ou σ_1-livre. A equivalência contrária segue por indução em n o número de cordas. Para $n = 2$, toda trança σ-positiva (resp. negativa ou vazia) é também uma trança σ_1-positiva (resp. σ_1-negativa ou σ-livre) e portanto as duas propriedades são equivalentes nesse caso. Tomando uma palavra representativa de uma n-trança w. Pela (Propriedade C) conseguimos encontrar uma palavra representativa equivalente, $\tilde{w}$, que é σ_1-positiva, σ_1-negativa ou σ_1-livre. Nos dois primeiros casos já temos a equivalência. No caso de $\tilde{w}$ ser σ_1-livre, note que existe uma palavra representativa de uma $n-1$-trança w_1 tal que $sh(w_1) = \tilde{w}$. Aplicando nossa hipótese de indução em w_1 temos que existe $\tilde{w_1}$, uma palavra equivalente a w_1, que é σ-positiva, σ-negativa ou vazia. Como $w \sim sh(w_1)$ e $w_1 \sim \tilde{w_1}$ temos que $w \sim sh(\tilde{w_1})$ que por sua vez também será σ-positiva, σ-negativa ou vazia.*

Para o caminho que tomaremos, utilizaremos ainda outra versão, esta mais fraca, da **Propriedade C**:

Propriedade C_∞: Toda trança em B_∞ admite uma palavra representativa de trança a qual é σ_1-positiva, σ_1-negativa ou σ_1-livre.

A seguir, vejamos que assumindo a **Propriedade A** e a **Propriedade C** conseguimos uma demonstração do Teorema 4.20.

Demonstração do Teorema 4.20: Usando 4.21 basta mostrar que $B_n^{\sigma-\text{pos}}, (B_n^{\sigma-\text{pos}})^{-1}$ e $\{1\}$ formam uma partição de B_n. O fato que $B_n^{\sigma-\text{pos}}, (B_n^{\sigma-\text{pos}})^{-1}$ e $\{1\}$ cobrem B_n segue da versão alternativa da **Propriedade C**. Agora, suponha que exista $\beta \in B_n^{\sigma-\text{pos}} \cap (B_n^{\sigma-\text{pos}})^{-1}$. Então temos que como $\beta \in B_n^{\sigma-\text{pos}}$ existe uma palavra representativa de trança equivalente a β, chamemo-a de $b\tilde{e}ta$, e como $\beta \in (B_n^{\sigma-\text{pos}})^{-1}$, então $\beta^{-1} \in B_n^{\sigma-\text{pos}}$ e então podemos tomar $\widetilde{\beta^{-1}}$ como sua equivalente σ-positiva. Porém, note que $1 \sim \beta\beta^{-1} \sim \tilde{\beta}\widetilde{\beta^{-1}}$, dessa forma a trança unitária1 admite uma representação σ-positiva. No entanto, 1 é invariante com relação a função sh, logo 1 é σ_1-positiva. Contudo, isso contradiz a **Propriedade A**. $\square$

Observação 4.23 *Note que a ordenação $<$ não possui outras propriedades que não a in-*

variância a esquerda. Por exemplo, tome $\beta_1 = \sigma_1\sigma_2^{-1}$ *e* $\beta_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$*. Perceba que* β_1 *é* σ_1*-positiva, e portanto* $\beta_1 > 1$*. Entretanto considere a trança* $\beta_2^{-1}\beta_1\beta_2$*, que é representada por* $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ *e portanto pela sua versão equivalente* $\sigma_2\sigma^{-1}$*, que contêm uma letra* σ_1^{-1} *e nenhuma* σ_1*. Dessa forma, segue por definição que* $\beta_2 < \beta_1\beta_2$*. Note que isso significa que para* $<$ *não é valida a multiplicação a direita, pois* $\beta_1 > 1$ *não implica que* $\beta_1\beta_2 > \beta 2$*.*

Pela observação acima, podemos verificar que a ordem $<$ não é compatível que certas propriedades, entretanto em 4.8 verificamos existe uma ordem parcial em B_+, sem a necessidade de qualquer uma das propriedades que citamos nesse capítulo. Se torna natural tentarmos verificar se B_+ possui propriedades que não conseguimos encontrar na ordem $<$, como de fato tem. Uma dessas propriedades vem do fato que o conjugado de uma trança positiva maior que 1 também será maior que 1. Esta afirmação nos leva a enunciar ainda outra propriedade

Propriedade S (Subpalavra): Toda trança da forma $\beta^{-1}\sigma_i\beta$ admite uma palavra representativa de trança σ-positiva. Ou seja, vale $\sigma_i\beta > \beta$

Uma consequências dessa propriedade é

Proposição 4.24 *Sejam* β_1 *e* β_2 *tranças e alguma representação de* β_2 *pode ser obtida inserindo letras* σ_i *em um representante de* β_1*. Então temos* $\beta_2 > \beta_1$*.*

Demonstração: Faremos a demonstração por indução na seguinte hipótese $\sigma_i^n\beta_2 > \beta_2$. Para $n = 1$ temos pela **Propriedade S** que vale $\sigma_i\beta_2 > \beta_2$ então se $\beta_2 \sim \sigma_i\beta_1$ temos, pela compatibilidade de $>$ com a multiplicação a esquerda que $\beta_2 > \beta_1$. Agora, supondo que nossa hipótese é verdadeira para $n = k$ temos que $\sigma_i^k\beta_2 > \beta_2$, multiplicando a esquerda por σ_i, $\sigma_i^{k+1}\beta_2 > \sigma_i\beta_2 > \beta_2 \sim \sigma_i^{k+1}\beta_1$. □

5 Grupos Livres e sua relação com B_n

Já vimos no Capítulo 2.1 que uma característica muito interessante dos Grupos Livres é que todo grupo é quociente de um grupo livre. Em seguida vimos que as existem algumas semelhanças entre o Grupo de Tranças B_n e um Grupo Livre, como é definida suas operações e como podemos tratar de ambos olhando apenas seus geradores. Neste capítulo exploraremos ainda mais a relação entre suas estruturas e através disso conseguiremos demonstrar que, dada uma trança *beta* que admite ao menos uma representação σ_1-positiva, então β é não trivial, que é o resultado que convencionamos chamar de **propriedade A**. As ferramentas que utilizaremos durante esse capítulo nos levam a definir

Definição 5.1 *Seja G um grupo e $\varphi : G \to G$ um homomorfismo. Então chamaremos φ de* endomorfismo. *Se φ for um isomorfismo, então chamaremos φ de um* automorfismo.

Definição 5.2 *Denotaremos por F_n o Grupo Livre de ordem n com base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e denotaremos por F_∞ o grupo livre com base $\{x_i \mid 1 \leq i < \infty\}$*

Definição 5.3 *Para $i < n$, denotaremos por $\hat{\sigma_i}$ o automorfismo de F_n definido por*

$$\hat{\sigma_i}(x_k) = \begin{cases} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & para\ k = i \\ x_i & para\ k = i+1 \\ x_k & para\ k \neq i, i+1 \end{cases}$$

Note que $\hat{\sigma_i}$ é de fato um automorfismo. $\hat{\sigma_i}$ é um homomorfismo por definição, então basta notar que, para $k \neq i, i+1$ temos $x_k = \hat{\sigma_i}(x_k)$, para $k = i$ temos que $x_i = \hat{\sigma_i}(x_{i+1})$ e, por fim, $x_{i+1} = \hat{\sigma_i}(x_{i+1})\hat{\sigma_i}(x_i)\hat{\sigma_i}(x_{i+1})$.

Lema 5.4 *Para $1 \leq n \leq \infty$ o mapa $\sigma_i \mapsto \hat{\sigma_i}$ estende um homomorfismo de B_n em $Aut(F_n)$.*

Demonstração: Basta notar que $\hat{\sigma_i}$ satisfaz as relações do grupo de tranças. De fato, sejam σ_i e σ_j dois geradores de B_n e k um inteiro. Se $k \neq i, i+1$ e $|i-j| > 1$ e,tão temos que

$$\hat{\sigma_i}\hat{\sigma_j}(x_k) = \hat{\sigma_j}\hat{\sigma_i}(x_k) = x_k.$$

Caso $|i-j|=1$ então devemos separar em casos. Se $k \neq i, i+1, i+2$ e $j=i+1$, então

$$\hat{\sigma_i}\hat{\sigma_j}\hat{\sigma_i}(x_k) = \hat{\sigma_j}\hat{\sigma_j}\hat{\sigma_j}(x_k) = x_k.$$

O caso em que $j=i-1$ e $k \neq i, i+1, i-1$ é semelhante.

Caso $k=i$ e $j=i+1$ temos

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma_i}\hat{\sigma_{i+1}}\hat{\sigma_i}(x_i) &= \hat{\sigma_i}\hat{\sigma_{i+1}}(x_i x_{i+1} x_i^{-1}) \\
&= \hat{\sigma_i}(x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1}) \\
&= x_i x_{i+1} x_i^{-1} x_i x_{i+2} x_i^{-1} x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} \\
&= x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} \\
&= \hat{\sigma_{i+1}}(x_i x_{i+1} x_i^{-1}) \\
&= \hat{\sigma_{i+1}}\hat{\sigma_i}(x_i) \\
&= \hat{\sigma_{i+1}}\hat{\sigma_i}\hat{\sigma_{i+1}}(x_i).
\end{aligned}$$

Caso $k=i+1$ e $j=i+1$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma_i}\hat{\sigma_{i+1}}\hat{\sigma_i}(x_{i+1}) &= \hat{\sigma_i}\hat{\sigma_{i+1}}(x_i) \\
&= \hat{\sigma_i}(x_i) \\
&= x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\
&= \hat{\sigma_{i+1}}(x_i x_{i+2} x_i^{-1}) \\
&= \hat{\sigma_{i+1}}\hat{\sigma_i}(x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1}) \\
&= \hat{\sigma_{i+1}}\hat{\sigma_i}\hat{\sigma_{i+1}}(x_{i+1}).
\end{aligned}$$

Caso $k=i+2$ e $j=i+1$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma_i}\hat{\sigma_{i+1}}\hat{\sigma_i}(x_{i+2}) &= \hat{\sigma_i}\hat{\sigma_{i+1}}(x_{i+2}) \\
&= \hat{\sigma_i}(x_{i+1}) \\
&= x_i \\
&= \hat{\sigma_{i+1}}(x_i) \\
&= \hat{\sigma_{i+1}}\hat{\sigma_i}(x_{i+1}) \\
&= \hat{\sigma_{i+1}}\hat{\sigma_i}\hat{\sigma_{i+1}}(x_{i+2}).
\end{aligned}$$

Os casos onde $j=i-1$ são similares. $\square$

Para cada trança β denotaremos por $\hat{\beta}$ o automorfismo associado pela composição dos automorfismos $\hat{\sigma}_i$, onde σ_i está presente na decomposição de β em relação aos geradores de B_n. Para w uma palavra representativa de trança, denotaremos por $\hat{w}$ o automorfismo associado com a trança representada por w. A seguir, construiremos a primeira parte da demonstração que culminará no resultado que garante a existência de uma ordenação em B_n, veremos então a existência de Π referenciado na demonstração da Proposição 4.21. Note que a imersão de B_n em B_{n+1} induzida pela identidade nos σ_i é compatível com a imersão de $Aut(F_n)$ em $Aut(F_{n+1})$ induzido pela identidade nos x_i. Seja $\psi \in Aut(F_n)$ dado, então considere o seguinte automorfismo em F_{n+1}: $\phi(\psi(x_k)) = \psi(x_k)$ para todo $k < n+1$. Se $\phi(\psi(x_k)) = x_k$ para todo $k < n+1$, então $\psi(x_k) = x_k$ para todo $k < n+1$, isto é, ψ é a identidade. Logo, podemos tratar $Aut(F_n)$ como um subconjunto de $Aut(F_{n+1})$. Note que já demonstramos um resultado semelhante para B_n e B_{n+1}, então, para trabalharmos de maneira geral, trabalharemos com B_∞ e $Aut(F_\infty)$.

Definição 5.5 *Para x uma letra x_i ou x_i^{-1}, denotamos por $S(x)$ o subconjunto de F_∞ composto por todas as palavras reduzidas que terminam com x.*

Lembre que, uma palavra reduzida é aquela que não contém em sua composição padrões do tipo xx^{-1} ou $x^{-1}x$.

Definição 5.6 *Seja u uma palavra representativa de trança. Denotaremos por $red(u)$ a palavra reduzida obtida removendo todos os padrões xx^{-1} e $x^{-1}x$.*

Agora investigaremos a imagem do conjunto $S(x_1^{-1})$ pelo automorfismo $\hat{\sigma}_i^{\pm}$.

Definição 5.7 *Denotaremos por sh o endomorfismo shift, que tem como domínio o monoide gerado por $x_1^{\pm}, x_2^{\pm}\dots$ que leva $x_k^{\pm}$ a $x_{k+1}^{\pm}$ para todo k. Para $f \in Aut(F_\infty)$, denotaremos por $sh(f)$ o automorfismo de F_∞ definido por $sh(f)(x_1) = x_1$ e $sh(f)(x_{k+1}) = sh(f(x_k))$.*

Lema 5.8 *Seja $f \in Aut(F_\infty)$. Então $sh(f)$ é um endomorfismo quando restrito a $S(x_1^{-1})$.*

Demonstração: Seja ux^{-1} um elemento de $S(x_1^{-1})$. Por construção temos que $sh(f)(ux_1^{-1}) = red(sh(f)(u)x_1^{-1})$. Suponha que $sh(f)(ux_1^{-1}) \notin S(x_1^{-1})$. Então x_1^{-1} deve ser cancelada por alguma letra x_1 que ocorre em $sh(f)(u)$. Tal letra x_1 em $sh(f)(u)$ deve vir de uma letra x_1 em u, visto que $sh(f)(x_1) = x_1$ e $sh(f)$ é injetora. Daí deve existir uma decomposição $u = u_1x_1u_2$ onde $sh(f)(u_2) = 1$. Note, entretanto, que pela injetividade de $sh(f)$ temos que $u_2 = 1$. Portanto $u \in S(x_1)$ contradizendo a hipótese que $ux_1^{-1} \in S(x_1^{-1})$. □

Lema 5.9 *O automorfismo $\hat{\sigma}_i$ leva $S(x_i)$ e x_i^{-1} em $S(x_i^{-1})$.*

Demonstração: Seja ux_i^e, com $e = \pm 1$, um elemento arbitrário de $S(x_i) \cup S(x_i^{-1})$ onde $u \notin S(x_i^{-e})$. Então temos que $\hat{\sigma}_i(ux_i^e) = red(\hat{\sigma}_i(u)x_ix_{i+1}x_i^{-1})$. Suponha que $\hat{\sigma}_i(ux_i^e) \notin S(x_i^{-1})$. Tal suposição implica que a letra x_i^{-1} em $\hat{\sigma}_i(ux_i^e)$ deve ser cancelada por alguma letra x_i em $\hat{\sigma}_i(u)$. Pela definição de $\hat{\sigma}_i$ sabemos que este x_i deve vir de algum x_{i+1} ou $x_i^{\hat{e}}$, com $\hat{e} = \pm 1$, em u. Consideremos o primeiro caso. Sendo assim podemos escrever $u = u_1x_{i+1}u_2$. Assim temos

$$\hat{\sigma}_i(ux_i^e) = red(\hat{\sigma}_i(u_1)x_i\hat{\sigma}_i(u_2)x_ix_{i+1}^ex_i^{-1}),$$

Por nossa hipótese, temos que $red(\hat{\sigma}_i(u_2)x_ix_{i+1}^e) = \epsilon$, onde ϵ representa a palavra vazia. Note que para tal temos que ter $\hat{\sigma}_i(u_2) = x_{i+1}^{-e}x_i^{-1}$, assim, pela definição de $\hat{\sigma}_i$ temos que

$$x_{i+1}^{-e}x_i^{-1} = x_i^{-1}x_ix_{i+1}^{-e}x_i^{-1} = \hat{\sigma}_i(x_{i+1}^{-1}x_i^{-e}),$$

mas isto implica que $u_2 = x_{i+1}^{-1}x_i^{-e}$, contradizendo o fato que $ux_i^e \in S(x_i) \cup S(x_i^{-1})$.

No segundo caso, escrevemos $u = u_1x_i^{\hat{e}}u_2$ onde $\hat{e} = \pm 1$. Então segue que

$$\hat{\sigma}_i(ux_i^e) = red(\hat{\sigma}_i(u_1)x_ix_{i+1}^{\hat{e}}x_i^{-1}\hat{\sigma}_i(u_2)x_ix_{i+1}^ex_i^{-1})$$

temos como hipótese que $red(x_{i+1}^{\hat{e}}x_i^{-1}\hat{\sigma}_i(u_2)x_ix_{i+1}^e) = \epsilon$. Note que isso implica que $\hat{\sigma}_i(u_2) = x_ix_{i+1}^{-e-\hat{e}}x_i^{-1} = \hat{\sigma}_i(x_i^{-e-\hat{e}})$, logo $u_2 = x_i^{-e-\hat{e}}$. Podemos então separar em casos

$$\begin{aligned} e = 1 &\implies u_2 = x_i^{-2} \text{ ou } u_2 = \epsilon \\ e = -1 &\implies u_2 = \epsilon \text{ ou } u_2 = x_i^2 \end{aligned}$$

Note que em todos os casos temos $u \in S(x_i^{-e})$, um absurdo. □

Continuaremos utilizando as propriedades dos automorfismos $\hat{\sigma}_i$ para deduzir algumas implicações

Proposição 5.10 *Seja β uma trança, tal que β admite ao menos uma representação σ_1-positiva. Então a palavra $\hat{\beta}(x_1)$ termina com x_1^{-1}.*

Demonstração: De nossa hipótese, temos que $\hat{\beta}$ admite uma decomposição da forma

$$\hat{\beta} = sh(f_0) \circ \hat{\sigma}_1 sh(f_1) \circ \ldots \hat{\sigma}_1 \circ sh(f_p).$$

Então temos que $sh(f_p)(x_1) = x_1$ e $\hat{\sigma}(x_1) = x_1x_2x_1^{-1}$, um elemento de $S(x_1^{-1})$. Assim, pelo Lema 5.8 que todo termo $sh(f_k)$ irá levar $S(x_1^{-1})$ e pelo Lema 5.9 temos que $\hat{\sigma}_i$ também o fará. □

Corolário 5.11 (Propriedade A) *Uma trança que possui ao menos uma representação σ_1-positiva é não trivial.*

Demonstração: Seja β uma trança que admite uma representação σ_1-positiva, então pela proposição 5.10 temos que a palavra $\hat{\beta}(x_1)$ é diferente de x_1, logo $\hat{\beta}$ não será o automorfismo identidade e, portanto, β é não trivial. □

A seguir, suporemos a validade da **Propriedade** C_∞ para conseguirmos mostrar que a volta da Proposição 5.10 também é válida. A partir dai conseguiremos caracterizar a ordenação $<$ para o grupo B_n através dos homomorfismos $\hat{\sigma}_i$.

Lema 5.12 *Para $k \neq i, i+1$ e $e = \pm 1$, o automorfismo $\hat{\sigma}_i$ leva $S(x_k^e)$ nele mesmo.*

Demonstração: Seja $ux_k^e \in S(x_k^e)$ com $u \notin S(x_k^{-e})$. Suponha que $\sigma_i(ux_k^e) \notin S(x_k^e)$, isto é, $red(\hat{\sigma}(u)x_k^e) \notin S(x_k^e)$, de forma que podemos escrever $u = u_1 x_k^{-e} u_2$, onde $red(\hat{\sigma}(u_2)) = \epsilon$, mas isto implica que $u_2 = \epsilon$ e portanto $u \in S(x_k^{-e})$, um absurdo. □

Lema 5.13 *O automorfismo $\hat{\sigma}_i$ leva $S(x_{i+1})$ em $S(x_i) \cup S(x_{i+1}) \cup S(x_{i+1}^{-1})$, e $S(x_{i+1}^{-1})$ em $S(x_i^{-1})$.*

Demonstração: Seja ux_{i+1} um elemento arbitrário de $S(x_{i+1})$, onde $u \notin S(x_{i+1}^{-1})$. Então temos $\hat{\alpha}_i(ux_{i+1}) = red(\hat{\alpha}_i(u)x_i)$. Suponha que $\hat{\alpha}_i(ux_{i+1}) = \hat{\alpha}_i(u)x_i \notin S(x_i)$. Isto significa que deve existir uma letra $x_i^{-1} \in \hat{\alpha}_i(u)$. Essa letra deve vir da aplicação de $\hat{\alpha}_i$ em x_{i+1}^{-1} ou $x_i^{\pm 1}$ em u. Consideramos então os casos possíveis.

O primeiro caso é $u = u_1 x_{i+1}^{-1} u_2$. Assim temos

$$\hat{\alpha}_i(ux_{i+1}) = red(\hat{\alpha}_i(u_1)x_i^{-1}\hat{\alpha}_i(u_2)x_i),$$

Para que $\hat{\alpha}_i(u)x_i \notin S(x_i)$ precisamos então que $red(\hat{\alpha}_i(u_2)) = \epsilon$. Isso implica que $u_2 = \epsilon$, mas aí temos que $u \in S(x_{i+1}^{-1})$, uma contradição.

Vamos para o segundo caso onde $u = u_1 x_i^e u_2$ e $e = \pm 1$, com $u_1 \notin S(x_i^{-e})$. Com essas hipóteses, temos que

$$\hat{\alpha}_i(ux_{i+1}) = red(\hat{\alpha}_i(u_1)x_i x_{i+1}^e x_i^{-1}\hat{\alpha}_i(u_2)x_i),$$

por hipótese temos que $red(\hat{\alpha}_i(u_2)) = \epsilon$. Temos então que $u_2 = \epsilon$, logo $u = u_1 x_i^e$ e assim

$$\hat{\alpha}_i(u)x_{i+1} = red(\hat{\alpha}_i(u_1)x_i x_{i+1}^e).$$

Caso a letra final x_{i+1}^e não seja eliminada na redução, então não há nada o que fazer. Suponha então que x_{i+1}^e é eliminada na redução. Então esta eliminação deve ocorrer por conta de uma letra x_i^{-e} em $\hat{\alpha}_i(u_1)$. Sendo assim, deve existir uma decomposição $u_1 = u_1^{'} x_i^{-e} u_1^{''}$, sendo assim, temos

$$\hat{\alpha}_i(u_{i+1}) = red(\hat{\alpha}_i(u_1^{'}) x_i x_{i+1}^{-e} x_i^{-1} \hat{\alpha}_i(u_1^{''}) x_i)$$

onde $red(x_i^{-1}\hat{\alpha}_i(u_1^{''})x_i) = \epsilon$. Porém, isso implica que $u_1^{''} = \epsilon$ e então, temos que $u_1 \in S(x_i^{-e})$, uma contradição. Temos então que $\hat{\alpha}_i(u) \in S(x_{i+1}^{e})$ é a única possibilidade. O Argumento para a imagem de $S(x_{i+1}^{-1})$ é análogo. □

Daí, usando o fato que os conjuntos $S(x_i^{\pm 1})$ formam uma partição de $F_\infty \setminus 1$, e aplicando os lemas 5.12 e 5.13 temos que as únicas possibilidades para o automorfismos $\hat{\alpha}_i^{-1}$ são as seguintes

Lema 5.14 *O automorfismo $\hat{\alpha}_i^{-1}$ leva $S(x_k^e)$ em si mesmo para $k \neq i, i+1$, onde $e = \pm 1$. Leva $S(x_i)$ em $S(x_{i+1})$, $S(x_i^{-1})$ em $S(x_i) \cup S(x_i^{-1}) \cup S(x_{i+1}^{-1})$ e leva ambos $S(x_{i+1})$ e $S(x_{i+1}^{-1})$ em $S(x_{i+1})$.*

Juntando todos os resultados conseguidos anteriormente, obtemos

Proposição 5.15 *Seja β uma trança.*

(i) Se β possui uma palavra representativa σ_1-positiva, então $\hat{\beta}(x_1) \in S(x_1^{-1})$;

(ii) Se β possui uma palavra representativa σ_1-livre, então $\hat{\beta}(x_1) = x_1$;

(iii) Se β possui uma palavra representativa σ_1-negativa, então $\hat{\beta}(x_1) \in S(x_k^{\pm 1})$ para algum k com $k \geq 2$.

Demonstração:

(i) Se β possui uma palavra representativa σ_1-positiva, então, pela Proposição 5.10 temos que $\hat{\beta}(x_1) \in S(x_1^{-1})$.

(ii) Se β possui uma palavra representativa σ_1 livre, então, pela definição dos automorfismos $\hat{\sigma}_i$ temos que $\hat{\beta}(x_1) = x_1$

(iii) Por fim, se β possui uma palavra representativa σ_1-negativa, então existe uma decomposição de $\beta = \beta_1 \sigma_1^{-1} sh(\beta_2)$, onde β_1 admite uma representação que não contém σ_1. $sh(\hat{\beta_2})$ não possui $\sigma_1^{\pm 1}$ em sua representação por definição, logo $sh(\hat{\beta_2})(x_1) = x_1$, portanto $(\sigma_1^{-1} sh(\hat{\beta_2}))(x_1) = x_2^{-1} x_1 x_2$, um elemento de $S(x_2)$, e portanto também de $\bigcup_{k \geq 2} S(x_k^{\pm 1})$. Então $\hat{\sigma}_1^{-1}$, assim como todos $\hat{\sigma}_k^{\pm}$ onde $k \geq 2$, leva $\bigcup_{k \geq 2} S(x_k^{\pm})$ em si mesmo. Note que o único automorfismo que pode levar $S(x_k^{\pm})$, com $k \geq 2$, em $S(x_1^{\pm})$ é $\hat{\sigma}_1$.

□

Aplicando o endomorfismo shift podemos obter uma generalização da Proposição acima.

Proposição 5.16 *Seja β uma trança*

(i) Se β admite uma palavra representativa σ-positiva, então existe i tal que $\hat{\beta}(x_j)$ é igual a x_j para $j < i$, e $\hat{\beta}(x_i)$ termina com x_i^{-1};

(ii) Se β admite uma palavra representativa σ-negativa, então existe i tal que $\hat{\beta}(x_j)$ é igual para $j < i$, e $\hat{\beta}(x_i)$ termina com $x_k^{\pm 1}$ para algum k, onde $k \geq i+1$.

Assumiremos a validade da **Propriedade** C_∞ que irá garantir que toda trança em B_∞ admite uma palavra representativa que é $\sigma_1 - positiva$, $\sigma_1 - negativa$ ou $\sigma_1 - livre$ para mostrarmos que os itens das proposições 5.15 e 5.16 são equivalências. Note que a **Propriedade** C_∞ é dada por, nada mais que, a união das restrições da **Propriedade C** a $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, uma demonstração da **Propriedade C** será dada no Apêndice, utilizando uma técnica diferente também desenvolvida em [DEHORNOY 2002].

Corolário 5.17 *Seja β uma trança.*

(i) A trança β admite uma palavra representativa σ_1-positiva se, e somente se $\hat{\beta}(x_1) \in S(x_1^{-1})$;

(ii) A trança β admite uma palavra representativa σ_1-livre se, e somente se $\hat{\beta}(x_1) = x_1$;

(iii) A trança β admite uma palavra representativa σ_1-negativa se, e somente se $\hat{\beta}(x_1) \in S(x_k^{\pm 1})$, para algum $k \geq 2$;

(iv) A trança β admite uma palavra representativa σ-positiva se, e somente se existe i tal que $\hat{\beta}(x_j) = x_j$ para $j < i$ e $\hat{\beta}(x_i) \in S(x_i^{-1})$;

(v) A trança β admite uma palavra representativa σ-negativa se, e somente se existe i tal que $\hat{\beta}(x_j) = x_j$ para $j < i$ e $\hat{\beta}(x_i) \in S(x_k^{\pm 1})$ para algum $k \geq i+1$.

E assim obtemos uma caracterização da ordenação de tranças que enunciamos em 4.19

Corolário 5.18 *Seja β_1, β_2 tranças. Então $\beta_1 < \beta_2$ se, e somente se, o automorfismo associado com $\beta_1^{-1}\beta_2$ leva x_j para x_j quando $j < i$ e leva leva x_i a uma palavra que termina com x_i^{-1}.*

Com isso podemos utilizar o fato de que, para todo $2 \leq n \leq \infty$, o grupo B_n possuí uma ordem invariável a esquerda, como definimos em 4.19, e assim utilizamos o seguinte Teorema

Teorema 5.19 *Seja G um grupo ordenável compatível com a multiplicação a esquerda. Então G é um grupo livre de torção.*

Demonstração: Seja G um grupo ordenável compatível com a multiplicação a esquerda e $\beta \in G$, onde $\beta \neq 1$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\beta > 1$. Faremos por indução no expoente de β. O caso base faz parte de nossa hipótese, portanto é verdadeiro. Suponha então que $\beta^k > \beta^{k-1} > 1$. Multiplicando a esquerda por β temos $\beta^{k+1} > \beta^k > 1$. Sendo assim não é possível existir m tal que $\beta^m = 1$. O caso para $\beta < 1$ é análogo. □

Como Corolário deste Teorema, temos o resultado

Corolário 5.20 *O grupo B_n é livre de torção para todo $n \geq 2$.*

6.1 O Centro do Grupo de Tranças

Desenvolveremos nessa seção mais uma propriedade do Grupo de tranças. Caracterizaremos seu centro como sendo o conjunto gerado por Δ^2, onde Δ é a trança que definimos em 4.14

Definição 6.1 *Considerando*

$$\lambda_k = \sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1$$

uma trança de B_n, com $1 \leq k \leq n-1$ podemos reescrever o elemento Δ como

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}$$

A partir dessa definição temos como objetivo mostrar que Δ^2 faz parte e gera o centro do grupo B_n, para tal precisaremos entender como uma letra σ_i interage com λ_k.

Lema 6.2 *Seja $\lambda_k = \sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1$, onde $1 \leq k \leq n-1$. Dado σ_i com $i \geq k+2$, então $\sigma_i \lambda_k = \lambda_k \sigma_i$*

Demonstração: A demonstração deste lema seguirá da propriedade do grupo de tranças B_n, onde $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ para $|i-j| \geq 2$. Faremos por indução em k. Para $k = 1$ temos $\sigma_i \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_i$ pela propriedade supracitada. Suponha então que para $l < k$ segue $\sigma_i \lambda_l = \lambda_l \sigma_j$. Para $l+1$ temos que $\sigma_i \lambda_{l+1} = \sigma_i \sigma_{l+1} \lambda_l$, pela propriedade do grupo de tranças e pela nossa hipótese de indução, segue que $\sigma_i \sigma_{l+1} = \sigma_{l+1} \sigma_i \lambda_l = \sigma_{l+1} \lambda_l \sigma_i = \lambda_{l+1} \sigma_i$. □

Lema 6.3 *Seja $\lambda_k = \sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1$, onde $1 \leq k \leq n-1$. Se $i < k$, então $\sigma_i \lambda_k = \lambda_k \sigma_{i+1}$.*

Demonstração: Faremos por indução em k. Para $k = 2$ temos $\sigma_1 \lambda_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \lambda_2 \sigma_2$ usando novamente uma propriedade do grupo de tranças B_n.

Agora suponha que para $l < k$ temos $\sigma_i\lambda_l = \lambda_l\sigma_{i+1}$. Para $l+1$ temos $\sigma_i\lambda_{l+1} = \sigma_i\sigma_{l+1}\lambda_l$, agora temos dois casos:

$$\begin{cases} \sigma_{l+1}\sigma_i\lambda_l, & \text{se } |i-l-1| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\lambda_{i-1}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

No primeiro caso temos $\sigma_{l+1}\sigma_i\lambda_l = \sigma_{l+1}\lambda_l\sigma_{i+1} = \lambda_{l+1}\sigma_{i+1}$ por nossa hipótese de indução. No segundo caso temos $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\lambda_{i-1} = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\lambda_{i-1} = \sigma_{i+1}\sigma_i\lambda_{i-1}\sigma_{i+1} = \lambda_{i+1}\lambda_{i+1}$ e assim completamos a demonstração. □

Lema 6.4 *Seja* $\lambda_k = \sigma_k\sigma_{k-1}\ldots\sigma_1$, *onde* $2 \leq k \leq n-1$. *Então* $\lambda_k^2 = \lambda_{k-1}\lambda_k\sigma_1$.

Demonstração: Aqui iremos utilizar extensivamente o Lema 6.3.

Faremos por indução em k. No caso $k = 2$ temos

$$\lambda_2^2 = \lambda_2\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\lambda_2\sigma_1 = \lambda_1\lambda_2\sigma_1.$$

Suponha que para $l < k$ temos $\lambda_l^2 = \lambda_{l-1}\lambda_l\sigma_1$. Então para $l+1$ temos

$$\begin{aligned} \lambda_{l+1}^2 &= \lambda_{l+1}\lambda_{l+1} \\ &= \lambda_{l+1}\sigma_{l+1}\lambda_l \\ &= \sigma_l\lambda_{l+1}\lambda_l \\ &= \sigma_l\sigma_{l+1}\lambda_l^2 \\ &= \sigma_l\sigma_{l+1}\lambda_{l-1}\lambda_l\sigma_1 \\ &= \lambda_l\lambda_{l+1}\sigma_1 \end{aligned}$$

□

Lema 6.5 *Seja* $\lambda_k = \sigma_k\sigma_{k-1}\ldots\sigma_1$, *onde* $1 \leq k \leq n-1$. *Então* $\sigma_i\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k\sigma_{k+1-i}$ *para* $i \leq k$.

Demonstração: Faremos por indução em k. Para $k = 1$ temos $\sigma_1\lambda_1 = \lambda_1\sigma_1$. Suponha que para $l < k$ temos $\sigma_i\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_l = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_l\sigma_{l+1-i}$. Então, para $l+1$ temos $\sigma_i\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{l+1}$. Pela hipótese de indução temos

$$\sigma_i\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{l+1} = \lambda_1\lambda_2\ldots\sigma_{l+1-i}\lambda_{l+1} \qquad = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{l+1}\sigma_{l+2-i}$$

□

Agora conseguimos demostrar o primeiro resultado envolvendo Δ.

Proposição 6.6 *Seja Δ o MMC dos geradores de B_n, então*

$$\sigma_i \Delta = \Delta \sigma_{n-i}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Demonstração: Basta notar que $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$. Utilizando o lema anterior, segue nosso resultado. $\square$

Teorema 6.7 *Seja $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$, sendo que $\lambda = \sigma_k \sigma_{k-1} \ldots \sigma_1$, onde $1 \leq k \leq n-1$, então $\Delta^2 \in Z(B_n)$.*

Demonstração: Aplicando Δ em ambos os lados da igualdade denotada na Proposição 6.6 temos

$$\begin{aligned}
\sigma_i \Delta \Delta &= \Delta \sigma_{n-i} \Delta \\
\sigma_i \Delta \Delta &= \Delta \Delta \sigma_{n-(n-i)} \\
\sigma_i \Delta^2 &= \Delta^2 \sigma_i
\end{aligned}$$

Assim vemos que Δ^2 comuta com todos os geradores de B_n, segue então que Δ^2 pertence ao centro de B_n, $Z(B_n)$. $\square$

Agora iremos mostrar que para $n > 2$ segue que Δ^2 irá gerar o centro de B_n. Para o caso B_2 temos apenas um gerador, e assim o centro será um grupo cíclico infinito dado por

$$\langle \sigma_1 \rangle = \langle \Delta \rangle.$$

Porém, antes precisamos enunciar o seguinte resultado, cuja a ideia da demonstração é apresentada por Gonzales-Menezes em [GONZALES-MENESES 2010].

Proposição 6.8 *Toda trança de B_n pode ser escrita de maneira única como $\Delta^p A$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $A \in B_n^+$, de modo que Δ não é prefixo de A.*

Teorema 6.9 *Se $n > 2$, então $Z(B_n) = \langle \Delta^2 \rangle$.*

Demonstração: Sabemos pelo Teorema 6.7 que $\Delta^2 \in Z(B_n)$, logo

$$\langle \Delta^2 \rangle \subseteq Z(B_n).$$

Seja $\beta \in Z(B_n)$. Pela proposição anterior, existem $p \in \mathbb{N}$ e $A \in B_n^+$ únicos tais que

$$\beta = \Delta^p A$$

onde $\Delta \preceq A$. Suponha então que $A \neq 1$. Então $\sigma_i \preceq A$ para algum i. Vamos avaliar os casos possíveis.

Suponha que p seja par, então $p = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Então $\Delta^p \in Z(B_n)$, uma vez que $\Delta^2 \in Z(B_n)$. Pela nossa hipótese temos que $\beta \in Z(B_n)$, logo $A \in Z(B_n)$, uma vez que $Z(B_n)$ é um subgrupo de B_n. Seja $1 \leq j \leq n-1$ tal que $|j-i| = 1$, então defina

$$\gamma = A\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i A$$

Note que $\sigma_j \preceq \gamma$, e como $\sigma_i \preceq A$, então $\sigma_i \preceq \gamma$, isto é, γ é um múltiplo comum de σ_j e σ_i. Pelo Teorema 4.12 onde definimos o MMC de dois geradores positivos, temos que

$$\sigma_j\sigma_i\sigma_j = MMC(\sigma_i, \sigma_j) \preceq \gamma = \sigma_j\sigma_i A$$

ou seja $\sigma_j\sigma_i\sigma_j \preceq \sigma_j\sigma_i A$, isto é, $\sigma_j \preceq A$ Note que agora este processo pode ser aplicado em σ_j. Dai segue que $\sigma_l \preceq A$ para todo $1 \leq l \leq n-1$ e portanto $\Delta \preceq A$, um absurdo.
Suponha agora que p seja impar, isto é, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2m+1$. Tomemos $1 \leq j \leq n-1$ tal que $|i-j| = 1$. Então segue que

$$\begin{aligned}
\Delta^p A\sigma_{n-j}\sigma_{n-i} &= \sigma_{n-j}\sigma_{n-i}\Delta^p A && (6.1)\\
&= \sigma_{n-j}\sigma_{n-i}\Delta^{2m}\Delta A && (6.2)\\
&= \Delta^{2m}\sigma_{n-j}\sigma_{n-i}\Delta A && (6.3)\\
&= \Delta^p\sigma_j\sigma_i A && (6.4)\\
& && (6.5)
\end{aligned}$$

Note que isso é o mesmo que dizer que $A\sigma_{n-j}\sigma_{n-i} = \sigma_j\sigma_i A$. Definimos então $\gamma = \sigma_j\sigma_i A$. Novamente temos que $\sigma_j \preceq \gamma$ e $\sigma_i \preceq A$, logo $\sigma_i \preceq \gamma$ e analogamente a primeira parte da demonstração, temos que $\sigma_j \preceq A$, uma contradição.
Logo, devemos ter $A = 1$, e assim todo elemento de $Z(B_n)$ deve ser da forma Δ^p. Suponha, por absurdo, que p seja impar. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2m+1$. Note que, nesse caso temos

$$\sigma_1\Delta^{2m+1} = \sigma_1\Delta^{2m}\Delta = \Delta^{2m+1}\sigma_{n-1}.$$

Porém, nossa hipótese garante que $\Delta^{2m+1} \in Z(B_n)$, sendo assim $1 = n - 1$ e portanto $n = 2$, uma contradição a nossa escolha de n. Logo p deve ser par.

$\square$

6.2 Redução de alças

O método que descreveremos a seguir será útil para demonstrar a **Propriedade C**, isto é, que toda trança admite uma representação σ_1-positiva, σ_1-negativa ou σ_1-livre. Ele se utilizará principalmente das propriedades dos geradores do grupo de tranças B_n, em particular da propriedade $\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j$. Ele também nos munirá com um algoritmo que nos permitirá, dado uma trança β, encontrar uma trança equivalente que seja σ-positiva ou σ-negativa.

Definição 6.10 *Uma palavra representativa de trança da forma $\sigma_i^e sh^i(u)\sigma_i^{-e}$ com $e = \pm 1$ é dita uma σ_i-alça*

Suponha que β seja uma trança que não seja σ-positiva ou σ negativa, então isso significa que existe i o menor índice tal que $\sigma_i^{\pm 1}$ está presente em β, entretanto $\sigma_i^{\mp 1}$ também deve estar. Logo, existe uma subpalavra de β da forma $\sigma_i^{\pm 1} sh^i(u)\sigma_i^{\mp 1}$, ou seja, β possui uma σ_i-alça. Queremos então mostrar que existe uma algoritmo que torna possível mostrar que existe uma palavra representativa de β que seja σ-positiva ou σ-negativa.

Definição 6.11 *Uma alça $\sigma_i^e u\sigma^{-e}$ é dita* permitida *se a palavra u não incluir nenhuma σ_{i+1}-alça. Dizemos que a palavra representativa de trança w é alcançada através de um passo de redução de alça da trança v se alguma subpalavra de w tem o formato $\sigma_i^e u\sigma^{-e}$ e v é obtida aplicando o seguinte homomorfismo*

$$\sigma_i^{\pm 1} \mapsto \varepsilon, \quad \sigma_{i+1}^{\pm 1} \mapsto \sigma_{i+1}^{-e}\sigma_i^{\pm 1}\sigma_{i+1}^{e}, \quad \sigma_k^{\pm} \mapsto \sigma_k^{\pm} \textit{ para } k \geq i+2$$

Note que o homomorfismo definido acima preserva a trança. Seja $\beta = \sigma_i^e sh^i(v)\sigma_i^{-e}$ uma palavra reduzida de trança, então podemos escrever $\sigma_i^e sh^i(v)\sigma_i^{-e} = \sigma_i^e\sigma_{i+1}^d v'\sigma_{i+1}^{-d}\sigma_i^{-e}$ ou então podemos utilizar as relações de trança para encontrar uma subpalavra v' que satisfaça essa condição. Agora note que

$$\begin{aligned}
\sigma_{i+1}^{-d}\sigma_{i+1}^{d}\sigma_i^{e}\sigma_{i+1}^{d}v'\sigma_{i+1}^{-d}\sigma_i^{-e}\sigma_{i+1}^{-d}\sigma_{i+1}^{d} &= \sigma_{i+1}^{-d}\sigma_i^{e}\sigma_{i+1}^{d}\sigma_i^{e}v'\sigma_i^{-e}\sigma_{i+1}^{-d}\sigma_i^{-e}\sigma_{i+1}^{d} \\
&= \sigma_{i+1}^{-d}\sigma_i^{e}\sigma_{i+1}^{d}v'\sigma_{i+1}^{-d}\sigma_i^{-e}\sigma_{i+1}^{d}
\end{aligned}$$

é o mesmo que aplicar o homomorfismo referido, entretanto pode ser encontrado utilizando apenas as relações de trança.

Assim temos o seguinte resultado

Lema 6.12 *(i) A redução de alça leva uma palavra em palavras equivalentes.*

(ii) Se uma palavra não vazia w não contém nenhuma alça, então ela é σ-positiva ou σ-negativa

A seguir enunciaremos os resultados que garantem a validade da **Propriedade C**, entretanto as demonstrações serão omitidas e poderão ser consultadas no Capítulo 3 de [DEHORNOY 2002].

Definição 6.13 *Diremos que uma palavra representativa de tranças w converge através de passos de redução de alça, ou simplesmente converge, se após uma quantidade finita de passos de redução de alça encontramos $w^{'}$ uma palavra representativa de trança equivalente a w, tal que $w^{'}$ é σ-positiva, σ-negativa ou é a palavra vazia.*

Definição 6.14 *Dizemos que uma palavra representativa de trança não vazia w possui* largura *n se a diferença entre o maior e o menor índice i onde σ_i ou σ_i^{-1} pertencem a w é $n-2$.*

Proposição 6.15 *Seja w uma palavra representativa de trança de tamanho l e largura n, então toda sequência de redução de alça aplicada em w converge em até $2^{n^4 l}$ passos*

Corolário 6.16 *Toda n-trança é equivalente a uma palavra representativa de trança que é σ-positiva, σ-negativa ou vazia.*

A demonstração do Corolário segue da aplicação do Lema 6.12. Mais do que isso, este resultado nos permite resolver o problema da palavra, verificar se uma palavra é equivalente a unidade, em B_∞

Proposição 6.17 *Seja w uma palavra representativa de trança e β uma trança equivalente a w.*

(i) Temos que $\beta = 1$ em B_∞ se, e somente se, w, através de redução de alças, converge para a palavra vazia.

(ii) Temos que $\beta > 1$ em B_∞ se, e somente se, w é converge para uma palavra σ-positiva.

Referências Bibliográficas

[ARTIN 1925] ARTIN, E. *Theorie der Zöpfe*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, v. 4, n. 1, p. 47–72, 1925.

[ARTIN 1947] ARTIN, E. *Theory of Braids*. Annals of Mathematics, v. 48, n. 1, p. 101–126, 1947.

[DEHORNOY 2002] DEHORNOY, P; DYNNIKOV, I; ROLFSEN, D; et al. *Why are braids orderable?* [s.l.]: Société mathématique de France Paris, 2002.

[DUMMIT 2004] DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M. *Abstract algebra*. [s.l.]: Wiley Hoboken, 2004.

[GARSIDE 1969] GARSIDE, F. A. *The braid group and other groups*. The Quarterly Journal of Mathematics, v. 20, n. 1, p. 235–254, 1969.

[GONZALES-MENESES 2010] GONZALEZ-MENESES, J. *Basic results on braid groups*. arXiv:1010.0321 [math], 2010. Disponível em: ¡http://arxiv.org/abs/1010.0321¿. Acesso em: 26 abr. 2021.

[MURASUGI 2012] MURASUGI, K; KURPITA, B. *A study of braids.* [s.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.