



Universidade Federal do ABC

MARCOS AGNOLETTO FORTE

Uma versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet

Santo André, 2022



Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Marcos Agnoletto Forte

**Uma versão estereológica da fórmula de
Gauss-Bonnet**

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Santo André, 2022

RESUMO

Baseados no artigo “A stereological version of the Gauss-Bonnet formula”, de Ximo Gual-Arnau e Juan J. Nuño-Ballesteros [[GANBo1](#)], estudamos uma versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet, com a qual obtivemos uma maneira de calcular a característica de Euler de um domínio com fronteira em uma superfície suave e orientável em \mathbb{R}^3 a partir de seções bidimensionais desta superfície. Para isso, demos um significado geométrico para certos pontos de contato entre a superfície e um plano que a “varre”. Além disso, discutimos algumas aplicações estereológicas desta fórmula.

Palavras-chave: Geometria integral, estereologia, fórmula de Gauss-Bonnet, geometria diferencial.

ABSTRACT

Based on the article “A stereological version of the Gauss-Bonnet formula”, by Ximo Gual-Arnau e Juan J. Nuño-Ballesteros [[GANBo1](#)], we have studied a stereological version of the Gauss-Bonnet formula, with which we have obtained a way to calculate the Euler characteristic of a domain with boundary on a smooth and orientable surface in \mathbb{R}^3 through two-dimensional sections of this surface. To do that, we have given a geometric meaning to certain contact points between the surface and a plane which “sweeps” it. In addition, we have discussed some stereological applications of this formula.

Keywords: Integral geometry, stereology, Gauss-Bonnet formula, differential geometry.

CONTEÚDO

1 Introdução	1
2 Preliminares	3
2.1 Definições básicas	3
2.2 Curvaturas	7
2.3 Geodésicas	17
2.4 O Teorema de Gauss-Bonnet e o Teorema de Poincaré-Hopf	21
3 A fórmula de Gauss-Bonnet estereológica	29
3.1 Aplicações	42
Bibliografia	45

1

INTRODUÇÃO

Grosso modo, um estudo estereológico de uma superfície S em \mathbb{R}^3 consiste em obter informações geométricas, como a curvatura, a característica de Euler-Poincaré ou a área, através de suas seções bidimensionais. Para isso, fixado $u \in S^2$, consideramos uma *função altura* $h_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_u(p) = \langle p, u \rangle$, de modo que quando variamos um parâmetro $l \in \mathbb{R}$ obtemos diferentes planos $\rho_{u,l} = h_u^{-1}(l)$ que “varrem” a superfície S . Assim, a partir das seções $\rho_{u,l} \cap S$, obtemos as informações geométricas desejadas.

Como exemplo, o Princípio de Cavalieri é um estudo estereológico no qual a informação geométrica a ser determinada é o volume de um sólido, isto é, de um subconjunto limitado de \mathbb{R}^3 cuja fronteira é uma superfície. Uma versão clássica deste princípio é a seguinte: “Consideremos dois sólidos e o plano que contém suas bases. Se todo plano paralelo ao plano das bases que intersectar um dos sólidos também intersectar o outro determinando seções de mesma área, como ilustra a Figura 1, então os volumes dos sólidos são iguais.”

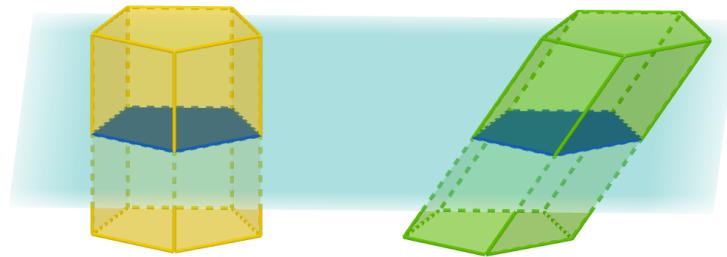


Figura 1: O Princípio de Cavalieri.

Outro estudo estereológico é o famoso problema da agulha de Buffon. Ehrhard Behrends e Jorge Buescu o apresentam da seguinte maneira em [BB14]: “Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707–1788), é famoso pela seguinte ‘experiência’: suponhamos que estamos numa sala cujo chão é constituído por tábuas paralelas. Designemos a distância entre as tábuas por a . Tomemos uma agulha, ou um objeto

semelhante, de comprimento $2r$ menor do que a . Esta condição assegura que, se deixarmos cair a agulha no chão, ela atravessará quando muito uma linha que divide duas tábuas diferentes. A probabilidade de que esse acontecimento ocorra (isto é, que a agulha, ao cair no chão, não fique totalmente contida no interior de uma única tábua) é então $P = \frac{4r}{\rho \cdot a}$. Esta fórmula contém a constante ρ – proporcionando-nos, portanto, a possibilidade de calcular esta constante por via ‘experimental’.”. A Figura 2 ilustra o problema da agulha de Buffon.

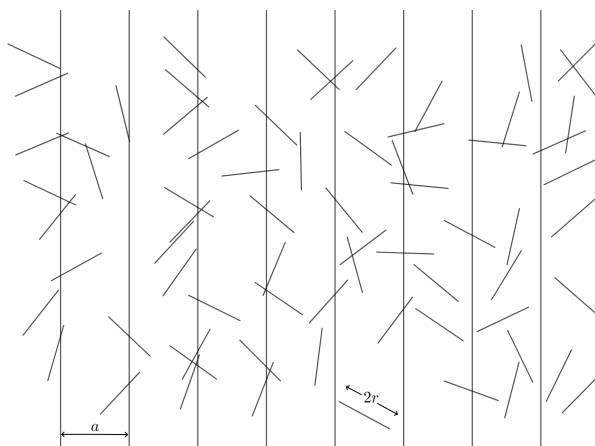


Figura 2: O problema de Buffon.

Como a estereologia é uma ciência aplicada que engloba um estudo interdisciplinar, o desenvolvimento de ferramentas matemáticas, como uma maneira estereológica de obtermos a característica de Euler-Poincaré de uma superfície, é fundamental para o desenvolvimento da área. Podemos ver isso pelas diversas aplicações da característica de Euler-Poincaré na estereologia: [DeH87], [ONo8], [RdSB09], [GBNO93].

Este trabalho de conclusão de curso está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2, recordamos algumas definições importantes da geometria diferencial e fixamos notação. Além disso, revisamos um conjunto de fatos sobre as curvaturas de superfícies. Por fim, apresentamos uma demonstração para o Teorema de Gauss-Bonnet 2.76 e o Teorema de Poincaré-Hopf 2.84.

No Capítulo 3, estudamos as ferramentas necessárias para provarmos a versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet 3.13. Além disso, apresentamos algumas aplicações para esta fórmula desenvolvida.

2 | PRELIMINARES

2.1 definições básicas

Nesta seção apresentaremos algumas definições básicas da geometria diferencial e fixaremos notação. As superfícies em \mathbb{R}^3 são o objeto de estudo dos resultados obtidos por Ximo Gual-Arnau e Juan J. Nuño-Ballesteros no artigo “A stereological version of the Gauss-Bonnet Formula” [GANBo1]. Assim, a seguir definiremos superfícies.

Definição 2.1. Um subconjunto conexo $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** (ou **mergulhada**) se para todo ponto $p \in S$ existe uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ , onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

1. $f(U) \subset S$ é uma vizinhança aberta de p em S (ou, equivalentemente, existe uma vizinhança aberta de $W \subset \mathbb{R}^3$ de p em \mathbb{R}^3 tal que $f(U) = W \cap S$);
2. f é um homeomorfismo sobre sua imagem;
3. A diferencial $df_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $x \in U$.

No contexto da Definição 2.1 chamaremos qualquer aplicação f que satisfaz os itens (1) - (3) de **parametrização local** (ou **regular**) em p ; se $0 \in U$ e $f(0) = p$ diremos que tal parametrização local é **centrada** em p . Chamaremos a aplicação inversa $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ de **carta local** em p ; a vizinhança $f(U)$ de p em S é chamada de **vizinhança coordenada**, as aplicações coordenadas $(x_1(p), x_2(p)) = f^{-1}(p)$ são chamadas de **coordenadas locais** de p ; e, para $j = 1, 2$, a curva $t \mapsto f(x_0 + te_j)$ é chamada de **j -ésima curva coordenada** ao longo de $f(x_0)$.

Definição 2.2. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Chamamos de **atlas** a família $\mathcal{A} = \{f_a\}$ de parametrizações locais $f_a : U_a \rightarrow S$ em p , para todo $p \in S$, tais que $S = \bigcup_a f_a(U_a)$.

A seguir daremos um procedimento para construir superfícies regulares a partir da imagem inversa de valores regulares. Começemos com uma definição:

Definição 2.3. *Sejam $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . Dizemos que $p \in V$ é um **ponto crítico** de f se $df_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetiva. Denotaremos o conjunto dos pontos críticos de f por $\text{Crit}(f)$ e os pontos de V que não são pontos críticos chamaremos de **pontos regulares** de f . Se $p \in V$ é um ponto crítico de f , então chamamos $f(p) \in \mathbb{R}$ de **valor crítico**. Um ponto $y \in f(V) \subset \mathbb{R}$ que não é um valor crítico é um **valor regular**. Além disso, diremos que um ponto crítico $p \in V$ de f é **não-degenerado** se a hessiana de f em p é uma forma bilinear não-degenerada; caso contrário, ele é dito **degenerado**.*

Observação 2.4. *Sejam $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ definida em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ e $p \in V$. Então $df_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetiva se, e somente se, ela é identicamente nula. Em outras palavras, $p \in V$ é um ponto crítico de f se, e somente se, o gradiente de f é zero em p .*

Proposição 2.5. *Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . Se $a \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f então toda componente conexa do conjunto de nível $f^{-1}(a) = \{p \in V : f(p) = a\}$ é uma superfície regular.*

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 3.1.25, p. 128]. \square

Definição 2.6. *Sejam $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de f . Uma componente conexa de $f^{-1}(a)$ é chamada de **superfície de nível** de f .*

A seguir veremos que toda superfície regular é localmente o gráfico de uma função.

Proposição 2.7. *Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto. Então existe uma parametrização local $f : U \rightarrow S$ em p de uma das seguintes formas:*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y, f(x, y)), & \text{ou} \\ (x, f(x, y), y), & \text{ou} \\ (f(x, y), x, y), \end{cases}$$

para uma certa função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ .

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 3.1.29, p. 130]. \square

Definição 2.8. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. Uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ (ou suave) em p se existe uma parametrização local $f : U \rightarrow S$ em p tal que $f \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ em uma vizinhança de $f^{-1}(p)$. Diremos que f é de classe C^∞ (ou suave) se ela for suave em todo ponto de S .*

Um possível problema com a Definição 2.8 é que ela pode depender da parametrização escolhida, isto é, pode existir uma outra parametrização y em p tal que $f \circ y$ não é suave em $y^{-1}(p)$. Entretanto, veremos a seguir que este não é o caso e a Definição 2.8 não depende da escolha de parametrização.

Teorema 2.9. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $f : U \rightarrow S$ e $y : V \rightarrow S$ duas parametrizações com $\Omega = f(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Então a aplicação $h = (f^{-1} \circ y)|_{y^{-1}(\Omega)} : y^{-1}(\Omega) \rightarrow f^{-1}(\Omega)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [dC14, Proposição 1, p. 82]. \square

Corolário 2.10. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em S e $p \in S$ um ponto arbitrário. Se existe uma parametrização $f : U \rightarrow S$ em p tal que $f \circ f$ é de classe C^∞ em uma vizinhança de $f^{-1}(p)$ então $f \circ y$ é de classe C^∞ em uma vizinhança de $y^{-1}(p)$ para todas as parametrizações $y : V \rightarrow S$ de S em p .*

Demonstração. Notemos que podemos escrever $f \circ y = (f \circ f) \circ (f^{-1} \circ y)$. Então pelo Teorema 2.9 temos que $f \circ y$ é de classe C^∞ em uma vizinhança de $y^{-1}(p)$ se, e somente se, $f \circ f$ é de classe C^∞ em uma vizinhança de $f^{-1}(p)$. \square

Usando a mesma ideia da Definição 2.8, definiremos funções suaves entre superfícies.

Definição 2.11. *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares. Diremos que a aplicação $f : S_1 \rightarrow S_2$ é de classe C^∞ (ou suave) em $p \in S_1$ se existe uma parametrização local $f_1 : U_1 \rightarrow S_1$ em p e uma parametrização local $f_2 : U_2 \rightarrow S_2$ em $f(p)$ tal que $f_2^{-1} \circ f \circ f_1$ é de classe C^∞ em uma vizinhança de $f_1^{-1}(p)$. Diremos que f é de classe C^∞ (ou suave) se ela for suave em todo ponto de S_1 . Se f é de classe C^∞ e inversível com inversa de classe C^∞ diremos que f é um **difeomorfismo** e que S_1 e S_2 são **difeomorfas**.*

Definiremos, agora, a noção de um vetor tangente a uma superfície regular em um ponto.

Definição 2.12. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. Um **vetor tangente** a S em p é um vetor da forma $a'(0)$, onde $a :]-\#, \#[\rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva de classe C^∞ cujo traço está contido em S e tal que $a(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes a S em p é um espaço vetorial chamado de **plano tangente** a S em p , que será denotado por $T_p S$.*

Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p \in S$ um ponto arbitrário e $f: U \rightarrow S$ uma parametrização local de p com $f(x_0) = p$. Então df_{x_0} é um isomorfismo entre \mathbb{R}^2 e $T_p S$ que nos permite considerar uma base especial para o plano tangente:

Definição 2.13. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. Consideremos $f: U \rightarrow S$ uma parametrização local centrada em p e $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 . Definimos os vetores tangentes a S em p $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p \in T_p S$ por*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p = df_0(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_j}(0) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

A base $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p \right\}$ de $T_p S$ será chamada de **base induzida pela parametrização local** f .

Vimos na Proposição 2.5 que é possível definirmos superfícies como conjuntos de nível de uma função suave. A próxima proposição nos mostrará como encontrar o plano tangente neste caso particular.

Proposição 2.14. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ , $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de f , S uma componente conexa de $f^{-1}(a)$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Então o plano tangente $T_p S$ é o subespaço de \mathbb{R}^3 ortogonal a $grad(f)(p)$.*

Demonstração. Consideremos $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_p S$ um vetor arbitrário e seja $a:]-\infty, \infty[\rightarrow S$ uma curva tal que $a(0) = p$ e $a'(0) = v$. Primeiramente notemos que $f \circ a = a$, donde obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(p)v_3 = 0.$$

Portanto v é ortogonal a $grad(f)(p)$. Como v foi tomado arbitrário temos que $T_p S$ está contido no subespaço ortogonal a $grad(f)(p)$. Como ambos os espaços têm dimensão 2, então o plano tangente $T_p S$ é o subespaço de \mathbb{R}^3 ortogonal a $grad(f)(p)$. \square

Munidos da noção de plano tangente, introduziremos a noção de diferencial de uma aplicação suave entre superfícies.

Proposição 2.15. *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares e $f : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação suave de um conjunto aberto $V \subset S_1$. Consideremos $p \in V$ um ponto e $v \in T_p S_1$ um vetor arbitrários tais que $a(0) = p$ e $a'(0) = v$ onde $a :]-\#, \#[\rightarrow V$ é uma curva parametrizada diferenciável. Então a curva $b = f \circ a$ é tal que $b(0) = f(p)$ e $b'(0)$ é um vetor de $T_{f(p)} S_2$ que não depende da escolha de a . Além disso, a aplicação $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ definida por $df_p(v) = b'(0)$ é linear.*

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [dC14, Proposição 2, p. 100]. \square

Definição 2.16. *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares, $f : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação suave de um conjunto aberto $V \subset S_1$ e $p \in V$ um ponto arbitrário. Chamamos a aplicação linear df_p , dada pela Proposição 2.15, de **diferencial** de f em p .*

2.2 curvaturas

Até agora, tratamos as superfícies sob o ponto de vista da diferenciabilidade. Nesta seção, começaremos o estudo de outras estruturas geométricas associadas a uma superfície regular.

Definição 2.17. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ o produto escalar positivo definido em $T_p S$ induzido pelo produto escalar canônico de \mathbb{R}^3 . A **primeira forma fundamental** $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ é a forma quadrática (positiva definida) associada ao produto escalar, isto é, para todo $v \in T_p S$ temos que*

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p \geq 0.$$

Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. A seguir, expressaremos a primeira forma fundamental na base $\left\{ \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\}$ associada a uma parametrização local $f : U \rightarrow S$ em p .

Se tomarmos dois vetores tangentes $v, w \in T_p S$ e os escrevermos como combinação linear dos vetores da base, isto é, $v = v_1 \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|} + v_2 \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|}$ e $w = w_1 \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|} + w_2 \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|}$, então

$$\langle v, w \rangle_p = v_1 w_1 \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|} \right\rangle_p + (v_1 w_2 + v_2 w_1) \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\rangle_p + v_2 w_2 \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\rangle_p.$$

Em particular,

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = v_1^2 \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|} \right\rangle_p + 2v_1 v_2 \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\rangle_p + v_2^2 \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\rangle_p. \quad (1)$$

Definição 2.18. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f: U \rightarrow S$ uma parametrização local. Então definimos os **coeficientes da primeira forma fundamental** (ou **métrica**) de S com respeito a f como as funções $E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$E(x) = \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|} \right\rangle_{f(x)}, \quad F(x) = \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\rangle_{f(x)}, \quad G(x) = \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|}, \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\rangle_{f(x)},$$

para todo $x \in U$.

Observação 2.19. Notamos que os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície regular são funções de classe C^∞ e que, embora eles dependam da escolha de parametrização local, a primeira forma fundamental de S , dada por (1), independe de parametrização.

As aplicações entre superfícies regulares que preservam a primeira forma fundamental e, portanto, a métrica, são chamadas de isometrias, enquanto que aquelas que preservam ângulo são chamadas de conformes. É o que definimos a seguir.

Definição 2.20. Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares e $f: S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação de classe C^∞ . Dizemos que f é uma **isometria em** $p \in S_1$ se para todo $v \in T_p S_1$ tivermos que

$$I_{f(p)}(df_p(v)) = I_p(v).$$

Nas condições da Definição 2.20, se $f: S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria então temos também que para todo $v, w \in T_p S_1$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_p &= \frac{I_p(v+w) - I_p(v) - I_p(w)}{2} \\ &= \frac{I_{f(p)}(df_p(v+w)) - I_{f(p)}(df_p(v)) - I_{f(p)}(df_p(w))}{2} \\ &= \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)}. \end{aligned}$$

Além disso, dizemos que f é uma **isometria local em** $p \in S_1$ se p possuir uma vizinhança U tal que f é uma isometria em cada ponto de U ; e que f é uma **isometria local** se ela é uma isometria em cada ponto de S_1 . Por fim, dizemos que f é uma **isometria** se ela for um difeomorfismo global e uma isometria local.

Definição 2.21. Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares. Dizemos que S_1 é **localmente isométrica** a S_2 e para todo $p \in S_1$ existe uma isometria de uma vizinhança de p em S_1 com um conjunto aberto em S_2 .

Definição 2.22. Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares e $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação de classe C^∞ . Dizemos que f é uma **aplicação conforme** se para todo $p \in S_1$ e quaisquer $v \in T_p S_1$ temos

$$I_{f(p)}(df_p(v)) = I^2(p)I_p(v),$$

onde I^2 é uma função diferenciável em S_1 que nunca se anula. As superfícies S_1 e S_2 são chamadas **conformes**.

Nas condições da Definição 2.22, se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma aplicação conforme então temos também que para todo $v, w \in T_p S_1$

$$\langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)} = I^2(p) \langle v, w \rangle.$$

Definição 2.23. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto. A **determinação do ângulo** entre dois vetores tangentes $v, w \in T_p S$ é um número $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cos q = \frac{\langle v, w \rangle_p}{\sqrt{I_p(v)I_p(w)}}.$$

Além disso, se $a, b :]-\#, \#[\rightarrow S$ são curvas diferenciáveis com $a(0) = b(0) = p$, nós dizemos que o **ângulo entre a e b em p** é a determinação do ângulo entre $a'(0)$ e $b'(0)$.

Definição 2.24. Dizemos que uma parametrização local f de uma superfície regular S é **ortogonal** se suas curvas coordenadas formam um ângulo reto.

Sendo U uma vizinhança coordenadas de p , a parametrização f é ortogonal se $F(x) = 0$, para todo $x \in U$.

Uma outra questão métrica que pode ser tratada com a primeira forma fundamental é o cálculo da área de uma região limitada de uma superfície regular S . Para isto, definiremos estas regiões cuja área queremos medir.

Definição 2.25. Sejam $a : [a, b] \rightarrow S$ uma curva regular por partes parametrizada por comprimento de arco em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ e $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que $a|_{[t_{j-1}, t_j]}$ é regular para $j = 1, \dots, k$. Definimos

$$a'(t_j^-) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} a'(t) \quad \text{e} \quad a'(t_j^+) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} a'(t);$$

$a'(t_j^-)$ e $a'(t_j^+)$ são (em geral) vetores distintos em $T_{a(t_j)}S$. Notemos que $a'(t_0^-)$ e $a'(t_k^+)$ só estão definidos para curvas fechadas e, neste caso, definimos $a'(t_0^-) = a'(t_k^-)$ e $a'(t_k^+) = a'(t_0^+)$. Diremos que $a(t_j)$ é um **vértice** de a se $a'(t_j^-) \neq a'(t_j^+)$ e uma **cúspide** se $a'(t_j^-) = -a'(t_j^+)$. Um **polígono curvilíneo** em S é uma curva simples, regular por partes, parametrizada pelo comprimento de arco e sem cúspides.

Definição 2.26. Sejam S uma superfície regular e $R \subset S$ um subconjunto conexo. Dizemos que R é uma **região regular** se R é compacto e sua fronteira ∂R é uma união finita de polígonos curvilíneos que não se intersectam.

No caso em que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular compacta, temos que S é uma região regular com fronteira vazia.

Definição 2.27. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $f: U \rightarrow S$ uma parametrização local e $R \subset S$ uma região regular de S tal que $f^{-1}(R) \subset U$. Chamamos o número positivo

$$A(R) = \iint_{f^{-1}(R)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| dx dy$$

de **área de R** .

Observação 2.28. Notemos que a área de uma região regular não depende da parametrização escolhida.

Definição 2.29. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Dizemos que S é **orientável** se ela admite uma cobertura por vizinhanças coordenadas $f_a(U_a)$, em que $f_a: U_a \rightarrow S$, de tal modo que se $p \in f_{a_1}(U_{a_1}) \cap f_{a_2}(U_{a_2})$, com $(x_1, y_1) \in U_{a_1}$ e $(x_2, y_2) \in U_{a_2}$ então $\frac{\partial f_{a_1}(x_1, y_1)}{\partial(x_2, y_2)}(p) > 0$. A escolha de uma tal família de vizinhanças coordenadas que cobrem S é denominada uma **orientação** de S , e S , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, diz-se que S é **não-orientável**. Se S é orientada, uma parametrização local $f: U \rightarrow S$ é dita **compatível** com a orientação de S se, unindo f à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação.

Definição 2.30. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Um **campo vetorial normal** a S é a aplicação $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ tal que $N(p)$ é ortogonal a $T_p S$ para todo $p \in S$. Se, além disso, $|N| = 1$ dizemos que N é um **campo normal unitário** a S .

A seguir, observamos a relação entre a orientabilidade de uma superfície e um campo normal unitário a ela.

Proposição 2.31. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Então temos que S é orientável se, e somente se, existe um campo normal unitário em S .

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 4.3.7, p. 180]. \square

Definição 2.32. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada por um atlas \mathcal{A} . Um campo normal unitário N **determina uma orientação** se $N = \frac{\frac{\eta}{\|\eta\|} \wedge \frac{\eta}{\|\eta\|}}{\left| \frac{\eta}{\|\eta\|} \wedge \frac{\eta}{\|\eta\|} \right|}$ para qualquer parametrização local de \mathcal{A} .

Definição 2.33. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada e $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ um campo normal unitário que determina uma orientação. Para $p \in S$ dizemos que uma base $\{v_1, v_2\}$ de $T_p S$ é **positiva** (resp., **negativa**) se a base $\{v_1, v_2, N(p)\}$ de \mathbb{R}^3 tem a mesma orientação (resp., a orientação oposta) da base canônica de \mathbb{R}^3 .

Corolário 2.34. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de f . Então toda componente conexa S de $f^{-1}(a)$ é orientável e o campo normal unitário é dado por $N = \frac{\text{grad}(f)}{|\text{grad}(f)|}$.

Demonstração. Seja $p \in S$ um ponto arbitrário. Pela Proposição 2.14 temos que o plano tangente $T_p S$ é ortogonal a $\text{grad}(f)(p)$. Logo, basta tomar $N(p) = \frac{\text{grad}(f)}{|\text{grad}(f)|}(p)$. Pela Proposição 2.31, temos que S é orientável. \square

Uma das preocupações da geometria diferencial é medir a curvatura de uma superfície regular S . Isto está fortemente relacionado à variação do campo normal unitário N sobre S , como veremos a seguir.

Lema 2.35. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p \in S$ um ponto e $N(p)$ um vetor unitário de \mathbb{R}^3 ortogonal a $T_p S$. Dado $v \in T_p S$ um vetor tal que $|v| = 1$, consideremos Π o plano que passa por p e é paralelo a v e $N(p)$. Então a interseção $\Pi \cap S$ é, em uma vizinhança de p , o traço de uma curva regular.

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 4.4.1, p. 184]. \square

Definição 2.36. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada. A **aplicação de Gauss** de S é o campo normal unitário $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ que determina a mesma orientação de S .

A aplicação de Gauss determina unicamente os planos tangentes a uma superfície regular S , pois $T_p S$ é ortogonal a $N(p)$; então a variação de N mede o quanto os planos tangentes variam, isto é, o quanto S deixa de ser um plano.

Este argumento sugere que a curvatura da superfície regular pode estar relacionada com a diferencial da aplicação de Gauss, assim como a curvatura de curvas está relacionada com a derivada do vetor unitário tangente.

Proposição 2.37. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Então dN_p é um endomorfismo de $T_p S$, simétrico com respeito ao produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, para todo $p \in S$.*

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 4.4.15, p. 188]. \square

Definição 2.38. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. A **segunda forma fundamental** de S é a forma quadrática $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$II_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle_p,$$

para todo $v \in T_p S$.

Uma mudança de orientação em S faz a aplicação de Gauss mudar de sinal e, conseqüentemente, a segunda forma fundamental muda de sinal também. A partir da segunda forma fundamental de S e do Lema 2.35, definimos o conceito de curvatura normal:

Definição 2.39. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada e $a : I \rightarrow S$ uma curva em S parametrizada pelo comprimento de arco. A **curvatura normal** de a é a função $k_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$k_n(t) = \langle a''(t), N \circ a(t) \rangle.$$

Em outras palavras, nas condições da Definição 2.39, a curvatura normal é o comprimento da projeção do vetor kn , onde k é a curvatura da curva a e n é o vetor normal de a , sobre a normal à superfície em p , com um sinal dado pela orientação de S em p . A seguir, damos uma interpretação geométrica para a segunda forma fundamental de S .

Observação 2.40. *Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada e $a :] - \#, \#[\rightarrow S$ uma curva em S , parametrizada pelo comprimento de arco. Notemos que $\langle N(a(s)), a'(s) \rangle = 0$, $\forall s \in] - \#, \#[$. Logo, segue-se que*

$$- \langle dN_{a(s)}(a'(s)), a'(s) \rangle = \langle N(a(s)), a''(s) \rangle.$$

Portanto,

$$II_{a(s)}(a'(s)) = - \langle dN_{a(s)}(a'(s)), a'(s) \rangle = \langle N(a(s)), a''(s) \rangle = k_n(s).$$

Teorema 2.41 (Meusnier). *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Então:*

1. Duas curvas em S passando por p e tangentes à mesma direção têm a mesma curvatura normal em p .
2. A curvatura normal de S em p num vetor $v \in T_p S$ tal que $|v| = 1$ é dada por $II_p(v)$.

Demonstração. A demonstração segue da Observação 2.40. □

Como vimos na Proposição 2.37, dada uma superfície regular orientada $S \subset \mathbb{R}^3$ com aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, sabemos que dN_p é um endomorfismo simétrico e, portanto, pelo Teorema Espectral [Lim16, Teorema 13.6, p. 160], temos que dN_p é diagonalizável, o que nos permite definir:

Definição 2.42. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Se $v \in T_p S$, com $|v| = 1$, e $l \in \mathbb{R}$ são tais que $dN_p(v) = -l v$ dizemos que v é uma **direção principal de S em p** e l é a **curvatura principal de S em p** .*

Assim, sendo $v \in T_p S$ uma direção principal com curvatura principal k , temos que

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle_p = -\langle -kv, v \rangle_p = k,$$

de modo que as curvaturas principais são curvaturas normais. Como veremos a seguir, elas são precisamente a maior e menor curvaturas normais num ponto:

Proposição 2.43. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Então existem direções principais $v_1, v_2 \in T_p S$ com correspondentes curvaturas principais $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, com $k_1 \leq k_2$, tais que:*

1. $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $T_p S$;
2. dado um vetor unitário $v \in T_p S$, consideremos $q \in]-\pi, \pi]$ a determinação do ângulo entre v_1 e v , logo $\cos q = \langle v_1, v \rangle_p$ e $\sin q = \langle v_2, v \rangle_p$. Então

$$II_p(v) = k_1 \cos^2 q + k_2 \sin^2 q \quad (\text{Fórmula de Euler});$$

3. k_1 é a menor curvatura normal em p e k_2 é a maior curvatura normal em p . Mais precisamente, o conjunto de todas as possíveis curvaturas normais de S em p é o intervalo $[k_1, k_2]$, isto é,

$$\{II_p(v) : v \in T_p S, |v| = 1\} = [k_1, k_2].$$

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 4.5.2, p. 191]. \square

Definição 2.44. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. A **curvatura Gaussiana** de S é a função $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$K(p) = \det dN_p, \quad \forall p \in S,$$

e a **curvatura média** de S é a função $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(p) = -\frac{1}{2} \text{trace } dN_p, \quad \forall p \in S.$$

Observação 2.45. Se k_1 e k_2 são as curvaturas principais de S em p então $K(p) = k_1 k_2$ e $H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Fixemos $f : U \rightarrow S$ uma parametrização local em p . Se $v = v_1 \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|} + v_2 \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \in T_p S$, então

$$\|I_p(v)\| = -\langle dN_p(v), v \rangle_p = \|I_p\left(\frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}\right)\| v_1^2 - 2 \left\langle dN_p\left(\frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}\right), \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\rangle_p v_1 v_2 + \|I_p\left(\frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|}\right)\| v_2^2,$$

donde temos a seguinte definição.

Definição 2.46. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : U \rightarrow S$ uma parametrização local. Definimos os **coeficientes da segunda forma fundamental** de S com respeito a f como sendo as funções $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} e(x) &= - \left\langle dN_{f(x)}\left(\frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}\right), \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|} \right\rangle_{f(x)} = \|I_{f(x)}\left(\frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}\right)\|, \\ f(x) &= - \left\langle dN_{f(x)}\left(\frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|}\right), \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\rangle_{f(x)}, \\ g(x) &= - \left\langle dN_{f(x)}\left(\frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|}\right), \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right\rangle_{f(x)} = \|I_{f(x)}\left(\frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|}\right)\|, \end{aligned}$$

para todo $x \in U$, onde $N = \frac{\frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|} \wedge \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|}}{\left| \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_1\|} \wedge \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{x}_2\|} \right|}$.

Observação 2.47. Notemos que os coeficientes da segunda forma fundamental de uma superfície regular são funções de classe C^∞ .

Para finalizarmos esta seção, provaremos que a curvatura Gaussiana é uma propriedade intrínseca da superfície, isto é, depende somente da primeira forma fundamental e não da maneira que a superfície está imersa no \mathbb{R}^3 .

Sejam $f : U \rightarrow S$ uma parametrização local da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ e $N : f(U) \rightarrow S^2$ a aplicação de Gauss de $f(U)$ dada por $N = \frac{\frac{\eta}{\eta_{x_1}} \wedge \frac{\eta}{\eta_{x_2}}}{\left| \frac{\eta}{\eta_{x_1}} \wedge \frac{\eta}{\eta_{x_2}} \right|}$. Notemos que

$\left\{ \frac{\eta}{\eta_{x_1}}, \frac{\eta}{\eta_{x_2}}, N \right\}$ formam uma base para \mathbb{R}^3 em todo ponto. Em particular, existem funções $\Gamma_{ij}^k, h_{ij}, a_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tais que

$$\begin{aligned} \frac{\eta^2 f}{\eta_{x_i} \eta_{x_j}} &= \Gamma_{ij}^1 \frac{\eta}{\eta_{x_1}} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\eta}{\eta_{x_2}} + h_{ij} N, \\ \frac{\eta(N \circ f)}{\eta_{x_j}} &= a_{1j} \frac{\eta}{\eta_{x_1}} + a_{2j} \frac{\eta}{\eta_{x_2}}, \end{aligned} \tag{2}$$

para $i, j = 1, 2$. Em (2), observamos que a componente de $\frac{\eta(N \circ f)}{\eta_{x_j}}$ na direção N é nula, pois $|N| = 1$. Além disso, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ e $h_{ij} = h_{ji}$, para todos $i, j, k = 1, 2$.

Como $\frac{\eta(N \circ f)}{\eta_{x_i}} = dN_p \left(\frac{\eta}{\eta_{x_i}} \right)$, os termos a_{ij} são justamente as componentes da matriz que representa a transformação linear dN_p na base $\left\{ \frac{\eta}{\eta_{x_1}}, \frac{\eta}{\eta_{x_2}} \right\}$. Segue de $\left\langle N \circ f, \frac{\eta}{\eta_{x_i}} \right\rangle = 0$, para $i = 1, 2$, que h_{ij} são os coeficientes da segunda forma fundamental de S . Falta determinarmos os coeficientes Γ_{ij}^k , que são chamados de *símbolos de Christoffel* da parametrização local f .

Tomando o produto escalar de $\frac{\eta^2 f}{\eta_{x_i} \eta_{x_j}}$ com $\frac{\eta}{\eta_{x_1}}$ e $\frac{\eta}{\eta_{x_2}}$ e usando a equação (2), obtemos:

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \frac{\eta E}{\eta_{x_1}} \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \frac{\eta F}{\eta_{x_1}} - \frac{1}{2} \frac{\eta E}{\eta_{x_2}}. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\eta E}{\eta_{x_2}} \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\eta G}{\eta_{x_1}}. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = \frac{\mathfrak{F}F}{\mathfrak{F}X_2} - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{F}G}{\mathfrak{F}X_1} \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{F}G}{\mathfrak{F}X_2}. \end{cases} \quad (5)$$

Como $EG - F^2 \neq 0$, os sistemas lineares (3), (4) e (5) têm soluções únicas, que podem ser expressas em termos dos coeficientes da métrica e de suas derivadas. Em particular, os símbolos de Christoffel dependem somente da primeira forma fundamental de S e, portanto, são intrínsecos. Como consequência, qualquer quantidade que possa ser escrita em termos dos símbolos de Christoffel é intrínseca, isto é, depende somente da estrutura métrica da superfície e não da maneira que a superfície está imersa em \mathbb{R}^3 .

De modo análogo, existem funções $A_{ijk}^l, B_{ijk} : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tais que

$$\frac{\mathfrak{F}^\beta \mathfrak{F}}{\mathfrak{F}X_i \mathfrak{F}X_j \mathfrak{F}X_k} = A_{ijk}^1 \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}X_1} + A_{ijk}^2 \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}X_2} + B_{ijk} N.$$

Novamente, os termos A_{ijk}^l e B_{ijk} são simétricos com relação aos índices inferiores.

Além disso, diferenciando-se a equação (2) obtemos

$$\begin{aligned} A_{ijk}^l &= \frac{\mathfrak{F}\Gamma_{jk}^l}{\mathfrak{F}X_i} + \Gamma_{jk}^1 \Gamma_{i1}^l + \Gamma_{jk}^2 \Gamma_{i2}^l + h_{jk} a_{li}, \\ B_{ijk} &= \Gamma_{jk}^1 h_{i1} + \Gamma_{jk}^2 h_{i2} + \frac{\mathfrak{F}h_{jk}}{\mathfrak{F}X_i}. \end{aligned}$$

Visto que A_{ijk}^l são simétricos com relação aos índices inferiores, então $A_{ijk}^l - A_{jik}^l = 0$, donde obtemos, para $i, j, k, l = 1, 2$, as *equações fundamentais de Gauss*:

$$\frac{\mathfrak{F}\Gamma_{jk}^l}{\mathfrak{F}X_i} - \frac{\mathfrak{F}\Gamma_{ik}^l}{\mathfrak{F}X_j} + \sum_{m=1}^2 \left(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \right) = - (h_{jk} a_{li} - h_{ik} a_{lj}). \quad (6)$$

Assim, se escrevermos a equação (6) para $i = l = 1$ e $j = k = 2$ obtemos

$$K = \frac{1}{G} \left(\frac{\mathfrak{F}\Gamma_{22}^1}{\mathfrak{F}X_1} - \frac{\mathfrak{F}\Gamma_{12}^1}{\mathfrak{F}X_2} + \sum_{m=1}^2 \left(\Gamma_{22}^m \Gamma_{1m}^1 - \Gamma_{12}^m \Gamma_{2m}^1 \right) \right). \quad (7)$$

Por (7), temos que a curvatura Gaussiana é intrínseca como está enunciado a seguir.

Teorema 2.48 (Teorema Egregium de Gauss). *A curvatura Gaussiana de uma superfície regular é uma propriedade intrínseca, isto é, depende somente da primeira forma fundamental.*

Da simetria dos coeficientes B_{ijk} seguem as *equações de Mainardi-Codazzi*.

Definição 2.49. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$. Uma **linha de curvatura** da superfície regular S é uma curva a em S tal que a' é sempre uma direção principal. Uma **direção assintótica** em $p \in S$ é um vetor unitário $v \in T_p S$ tal que $II_p(v) = 0$. Uma **curva assintótica** de uma superfície regular S é uma curva a em S tal que a' é sempre uma direção assintótica.*

2.3 geodésicas

Nesta seção, estudamos uma propriedade que caracteriza as “retas” de uma superfície S . Começamos generalizando para superfícies regulares a caracterização analítica local de segmentos de retas, isto é, curvas com vetor tangente constante.

Definição 2.50. *Seja S uma superfície regular. Um **campo de vetores ao longo de uma curva** $a : I \rightarrow S$ de classe C^∞ é uma aplicação $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ tal que $x(t) \in T_{a(t)} S$ para todo $t \in I$. Mais geralmente, se $a : I \rightarrow S$ é uma curva C^∞ por partes, um **campo de vetores ao longo de a** é uma aplicação contínua $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $x(t) \in T_{a(t)} S$ para todo $t \in I$, suave em cada subintervalo de I onde a é suave. O espaço vetorial de vetores ao longo de a será denotado por $\mathcal{T}(a)$.*

Um exemplo típico de campo de vetor ao longo de uma curva é o campo de vetores tangentes $a' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma curva $a : I \rightarrow S$ de classe C^∞ .

A noção que apresentamos a seguir mede quanto um campo de vetores $x \in \mathcal{T}(a)$ varia ao longo de uma curva $a : I \rightarrow S$ de classe C^∞ , do ponto de vista da superfície regular S .

Definição 2.51. *A **derivada covariante** de um campo de vetores $x \in \mathcal{T}(a)$ ao longo de uma curva $a : I \rightarrow S$ de classe C^∞ em uma superfície regular S é o campo de vetores $Dx \in \mathcal{T}(a)$ dado por*

$$Dx(t) = p_{a(t)} \left(\frac{dx}{dt}(t) \right),$$

onde $p_{a(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{a(t)} S$ é a projeção ortogonal sobre o plano tangente a S em $a(t)$.

Observação 2.52. *A derivada covariante é uma noção intrínseca, isto é, depende somente da primeira forma fundamental de S .*

Definição 2.53. Seja $a : I \rightarrow S$ uma curva de classe C^∞ em uma superfície regular S . Um campo de vetores $x \in \mathcal{T}(a)$ ao longo de a é dito **paralelo** se $Dx = 0$. Mais geralmente, se $a : I \rightarrow S$ é uma curva de classe C^∞ por partes, um campo de vetores $x \in \mathcal{T}(a)$ é **paralelo** se ele for paralelo em cada subintervalo de I no qual a é suave.

Proposição 2.54. Seja $a : I \rightarrow S$ uma curva de classe C^∞ por partes em uma superfície regular S . Então

1. dado $t_0 \in I$ e $v \in T_{a(t_0)}S$, existe um único campo de vetores paralelo $x \in \mathcal{T}(a)$ tal que $x(t_0) = v$;
2. se $x, \tilde{x} \in \mathcal{T}(a)$ são campos de vetores paralelos ao longo de a , o produto interno $\langle x, \tilde{x} \rangle_a$ é constante. Em particular, a norma de um campo paralelo é constante.

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 5.1.6, p. 250]. \square

Agora definiremos as curvas que têm o papel análogo ao das retas no plano, isto é, curvas com campo tangente paralelo.

Definição 2.55. Uma **geodésica** em uma superfície regular S é uma curva $a : I \rightarrow S$ de classe C^∞ tal que $a' \in \mathcal{T}(a)$ é paralelo, isto é, tal que $Da' = 0$.

Observação 2.56. Dados um ponto $p \in S$ em uma superfície regular S e um vetor $v \in T_pS$ temos que existe uma única geodésica $a :]-\#, \#[\rightarrow S$ em uma vizinhança de p tal que $a(0) = p$ e $a'(0) = v$.

Proposição 2.57. Seja $a : I \rightarrow S$ uma curva regular em uma superfície regular S . Então a é uma geodésica se, e somente se, a estiver parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco e sua curvatura k coincide com o valor absoluto de sua curvatura normal $|k_n|$.

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 5.1.18, p. 257]. \square

Definição 2.58. Seja $a : I \rightarrow S$ uma curva regular em uma superfície regular S . Um **campo normal unitário ao longo de a** é uma aplicação de classe C^∞ $N : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $|N(t)| = 1$ e $N(t) \perp T_{a(t)}S$ para todo $t \in I$.

Sejam $a : I \rightarrow S$ uma curva regular em uma superfície regular S e $N : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo normal unitário ao longo de a . Se $x \in \mathcal{T}(a)$ é um campo de vetores unitários ao longo de a , diferenciando-se $\langle x, x \rangle_a = 1$ obtemos que

$$0 = \frac{d}{dt} \langle x, x \rangle_a = 2 \langle Dx, x \rangle_a.$$

Consequentemente Dx é ortogonal a N e a x ; então existe uma função $l : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Dx = l N \wedge x$. Mais precisamente, como $N \wedge x$ é um vetor unitário, temos que $l = \langle Dx, N \wedge x \rangle_a$ e, em particular, l é de classe C^∞ .

Definição 2.59. *Sejam $a : I \rightarrow S$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco em uma superfície regular S e $N : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo normal unitário ao longo de a . A curvatura geodésica de a é a função $k_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$k_g = \langle Da', N \wedge a' \rangle,$$

de modo que

$$Da' = k_g(N \wedge a').$$

Nas condições da Definição 2.59 $a'' = kn$ e $a'' = (a'')^\top + (a'')^\perp$. Assim,

$$|a''|^2 = \left| (a'')^\top \right|^2 + \left| (a'')^\perp \right|^2.$$

donde temos o seguinte resultado.

Corolário 2.60. *Seja $a : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada por comprimento de arco em uma superfície regular S . Então*

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Em particular, uma curva a parametrizada pelo comprimento de arco é uma geodésica se, e somente se, sua curvatura geodésica é zero em todo ponto.

Em outras palavras, a curvatura geodésica de uma curva mede o quanto uma curva “deixa” de ser uma geodésica.

Sejam $a : [a, b] \rightarrow S$ uma curva regular em uma superfície regular S , $N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo normal unitário ao longo de a e $x_1, x_2 \in \mathcal{T}(a)$ dois campos de vetores unitários ao longo de a . Como $\{x_1(t), N(t) \wedge x_1(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{a(t)}S$ para todo $t \in [a, b]$, podemos decompor $x_2(t)$ na base $\{x_1(t), N(t) \wedge x_1(t)\}$ como

$$x_2(t) = \langle x_2(t), x_1(t) \rangle x_1(t) + \langle x_2(t), N(t) \wedge x_1(t) \rangle (N(t) \wedge x_1(t)),$$

de modo que $(\langle x_2(t), x_1(t) \rangle)^2 + (\langle x_2(t), N(t) \wedge x_1(t) \rangle)^2 = |x_2(t)|^2 = 1$. Consequentemente, podemos definir uma aplicação contínua $j : [a, b] \rightarrow S^1$ dada por

$$j(t) = (\langle x_2(t), x_1(t) \rangle, \langle x_2(t), N(t) \wedge x_1(t) \rangle). \tag{8}$$

O levantamento de j é uma aplicação $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o diagrama da Figura 3 é comutativo, isto é, $\tilde{\rho} \circ q = j$, onde $\tilde{\rho} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é dada por $\tilde{\rho}(x) = (\cos x, \sin x)$.

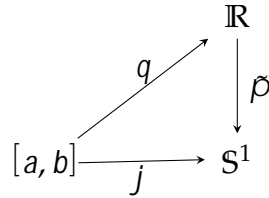


Figura 3: Levantamento de j .

Tomando-se $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\rho}(x_0) = j(a)$, podemos mostrar que existe um único levantamento q de j tal que $q(a) = x_0$. Esta prova é dada em [AT12, Proposição 2.1.4, p. 69].

Definição 2.61. *Sejam $a : [a, b] \rightarrow S$ uma curva parametrizada por comprimento de arco em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, $N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo normal unitário ao longo de a e $x_1, x_2 \in \mathcal{T}(a)$ dois campos de vetores unitários ao longo de a . Uma **determinação contínua do ângulo entre x_1 e x_2** é o levantamento $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ da função $j : [a, b] \rightarrow S^1$ dada por (8).*

Nas condições da Definição 2.61, temos que

$$x_2(t) = \cos(q(t))x_1(t) + \sin(q(t)) (N(t) \wedge x_1(t)).$$

Proposição 2.62. *Sejam $f : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ e $a : I \rightarrow f(U) \subset S$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Escreva $a(t) = f(a_1(t), a_2(t))$; então a curvatura geodésica de a é dada por*

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(a_2' \frac{\eta G}{\eta x_1} - a_1' \frac{\eta E}{\eta x_2} \right) + \frac{dq}{dt},$$

onde $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma determinação contínua do ângulo entre $\frac{\eta}{\eta x_1} \Big|_a$ e a' .

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 5.1.28, p. 260]. \square

2.4 o teorema de gauss-bonnet e o teorema de poincaré-hopf

Nesta seção apresentaremos uma prova para o Teorema de Gauss-Bonnet, um resultado de bastante importância no estudo da geometria diferencial de superfícies. O Teorema de Gauss-Bonnet nos permite relacionar quantidades geométricas de uma superfície com a sua topologia global.

A versão local do Teorema de Gauss-Bonnet se aplica a regiões regulares simples que estão contidas na imagem de uma parametrização ortogonal da superfície, enquanto que para a versão global, subdividimos a superfície em diversas regiões regulares por meio de triangulações.

Nas condições da Definição 2.25, introduzimos a noção de polígonos curvilíneos pequenos.

Definição 2.63. Um polígono curvilíneo **pequeno** em uma superfície regular S é um polígono curvilíneo cujo traço está contido na imagem de uma parametrização local.

Sejam S uma superfície regular e $a : [a, b] \rightarrow f(U) \subset S$ um polígono curvilíneo pequeno com traço contido na imagem de uma parametrização local $f : U \rightarrow S$. Consideremos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que $a|_{[t_{j-1}, t_j]}$ é regular para $j = 1, \dots, k$. O **ângulo externo** de a em t_j é o ângulo $\#_j \in [-\rho, \rho]$ de $a'(t_j^-)$ para $a'(t_j^+)$, tomado com sinal positivo se $\{a'(t_j^-), a'(t_j^+)\}$ for uma base positiva de $T_{a(t_j)}S$, e com sinal negativo, caso contrário.

Nestas condições, estendemos a seguir o conceito de determinação contínua do ângulo para polígonos curvilíneos:

Definição 2.64. Definimos a **determinação do ângulo do polígono curvilíneo** a como sendo a função $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $j = 1, \dots, k$, $q : [t_{j-1}, t_j[\rightarrow \mathbb{R}$ é a determinação contínua do ângulo entre $\frac{\eta}{\eta_{X_1}} \Big|_a$ e a' , com $q(t_j) \in]-\rho, \rho]$, e

$$q(t_j) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} q(t) + \#_j,$$

onde $\#_j$ é o ângulo externo de $a(t_j)$.

Definição 2.65. Sejam $a : [a, b] \rightarrow S$ um polígono curvilíneo pequeno em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ e $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ determinação do ângulo de a . O **índice de rotação** $r(a)$ do polígono curvilíneo a é dado por

$$r(a) = \frac{1}{2\rho} (q(b) - q(a)).$$

Proposição 2.66. Sejam $a : [a, b] \rightarrow S$ um polígono curvilíneo pequeno com traço contido na imagem de uma parametrização local $f : U \rightarrow S$ de uma superfície regular S e $a_0 = f^{-1} \circ a : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Então $r(a) = r(a_0) = \pm 1$.

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 6.1.3, p. 305, Proposição 2.4.7, p. 87]. \square

Definição 2.67. Um polígono curvilíneo pequeno $a : [a, b] \rightarrow S$ em uma superfície regular S é **orientado positivamente** (com respeito à parametrização local na qual o traço de a está contido na imagem) se o seu índice de rotação é $+1$. Caso contrário dizemos que a é **orientado negativamente**.

Definição 2.68. Uma região regular $R \subset S$ de uma superfície regular S é **simples** se ela é homeomorfa a um disco fechado.

Teorema 2.69 (Teorema de Gauss-Bonnet, versão local). Sejam S uma superfície regular, $R \subset S$ uma região simples contida na imagem de uma parametrização ortogonal local $f : U \rightarrow S$, $a : [a, b] \rightarrow S$ uma parametrização por comprimento de arco da fronteira de R , positivamente orientada com respeito a f , com ângulos externos $\#_1, \dots, \#_k \in]-\rho, \rho[$. Além

disso, consideremos $N = \frac{\frac{\eta}{\eta_{x_1}} \wedge \frac{\eta}{\eta_{x_2}}}{\left| \frac{\eta}{\eta_{x_1}} \wedge \frac{\eta}{\eta_{x_2}} \right|}$ o campo normal unitário que determina uma orientação para $f(U)$ e k_g a curvatura geodésica de a nos subintervalos de $[a, b]$ onde a é regular. Então

$$\int_R K ds + \int_a^b k_g ds + \sum_{i=1}^k \#_i = 2\rho, \quad (9)$$

onde K é a curvatura Gaussiana de S , ds é o elemento de área de R e ds é o elemento de comprimento de a .

Demonstração. Consideremos $a = f(a_1, a_2)$. Pela Proposição 2.62 temos que para pontos onde a é regular

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(a_2' \frac{\eta G}{\eta_{x_1}} - a_1' \frac{\eta E}{\eta_{x_2}} \right) + \frac{dq}{dt},$$

onde $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é a determinação do ângulo de a tal que $q(a) \in]-\rho, \rho]$. Consequentemente, tomando $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que $a|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é regular para $i = 1, \dots, k$, temos, pelo Teorema de Gauss-Green [Lim15, Teorema de Green, p. 424], que

$$\begin{aligned}
\int_a^b k_g ds &= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} k_g(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(a_2' \frac{\eta G}{\eta x_1} - a_1' \frac{\eta E}{\eta x_2} \right) + \frac{dq}{dt} \right) ds \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(a_2' \frac{\eta G}{\eta x_1} - a_1' \frac{\eta E}{\eta x_2} \right) \right) ds + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{dq}{dt} ds \\
&= \iint_{f^{-1}(R)} \left(\frac{\eta}{\eta x_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\eta G}{\eta x_1} \right) \right) + \frac{\eta}{\eta x_2} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\eta E}{\eta x_2} \right) \right) \right) dx_1 dx_2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^k (q(t_i) - q(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^k \#_i. \tag{10}
\end{aligned}$$

Como a parametrização é ortogonal temos, pelo Teorema Egregium de Gauss 2.48, que

$$\begin{aligned}
\iint_{f^{-1}(R)} \left(\frac{\eta}{\eta x_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\eta G}{\eta x_1} \right) \right) + \frac{\eta}{\eta x_2} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\eta E}{\eta x_2} \right) \right) \right) dx_1 dx_2 &= \\
&= - \iint_{f^{-1}(R)} K \sqrt{EG} dx_1 dx_2 \\
&= - \iint_R K ds. \tag{11}
\end{aligned}$$

Além disso, como a está orientada positivamente temos, pela Definição 2.65 e Proposição 2.66, que

$$\sum_{i=1}^k (q(t_i) - q(t_{i-1})) = 2pr(a) = 2p, \tag{12}$$

onde $r(a)$ é o índice de rotação de a . Portanto, substituindo em (10) as equações (11) e (12), temos

$$\int_a^b k_g ds = - \iint_R K ds + 2p - \sum_{i=1}^k \#_i.$$

Ou seja,

$$\int_R K ds + \int_a^b k_g ds + \sum_{i=1}^k \#_i = 2p.$$

□

Nosso próximo objetivo é apresentar a versão global do teorema de Gauss-Bonnet, a qual será dada por meio de triangulação de uma região regular.

Definição 2.70. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Dizemos que $T \subset S$ é um **triângulo** em S se $\mathcal{F}T$ é uma curva simples, fechada e formada por três arcos regulares. Assim, se $a : [a, b] \rightarrow S$ é uma parametrização para $\mathcal{F}T$, existe uma partição $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = b$ de $[a, b]$ tal que $a|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é regular para $i = 1, 2, 3$.

Definição 2.71. Uma **triangulação** de uma superfície regular S é uma família de triângulos $\{T_i\}_{i \in I}$ em S tal que se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, com $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ ou é uma aresta ou é um vértice para T_i e T_j .

Definição 2.72. Se $\{T_i\}_{i=1}^n$ é uma triangulação finita de uma superfície (compacta) S , definimos a **característica de Euler-Poincaré** de S , denotada por $\mathcal{X}(S)$, como sendo o número

$$\mathcal{X}(S) = V - A + F,$$

onde V , A e F denotam o número de vértices, arestas e faces da triangulação.

Observação 2.73. $\mathcal{X}(S)$ não depende da triangulação escolhida e toda região regular e compacta de uma superfície admite uma triangulação [AT12, Capítulo 6.5, p. 338].

Proposição 2.74. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e conexa. Então

$$\mathcal{X}(S) = 2 - 2g, \tag{13}$$

com $g \in \mathbb{N}$. Além disso, se $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular compacta e conexa com $\mathcal{X}(\tilde{S}) = \mathcal{X}(S)$ então \tilde{S} é homeomorfa a S .

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 6.2.12, p. 313, Proposição 6.2.14, p. 314]. \square

Observação 2.75. g denota o gênero da superfície S . Por (13), $\mathcal{X}(S) \leq 2$.

Teorema 2.76 (Teorema de Gauss-Bonnet, versão global). Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície regular orientada S com fronteira $\mathcal{F}R$ orientada positivamente. Consideremos C_1, \dots, C_k as componentes conexas da fronteira de R parametrizadas, para $j = 1, \dots, k$, por curvas $a_j : [a_j, b_j] \rightarrow S$ com curvaturas geodésicas k_g^j . Denotemos por $\{\#_1, \dots, \#_p\}$ o conjunto dos ângulos externos das curvas a_1, \dots, a_k . Então

$$\iint_R K ds + \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j ds + \sum_{h=1}^p \#_h = 2p\mathcal{X}(R), \tag{14}$$

onde K é a curvatura Gaussiana de S , ds é o elemento de área de R e ds é o elemento de comprimento de a_j .

Demonstração. Consideremos uma triangulação \mathbb{T} da região R de modo que cada triângulo $T_j \in \mathbb{T}$ está contido em uma vizinhança coordenada de uma família de parametrizações ortogonais, compatíveis com a orientação de S . Além disso, como a fronteira de todo triângulo de \mathbb{T} está orientada positivamente, obtemos orientações opostas nas arestas que são comuns a triângulos adjacentes. Aplicando-se a versão local do Teorema de Gauss-Bonnet 2.69 a cada triângulo de \mathbb{T} e somando-se os resultados, obtemos:

$$\iint_R K ds + \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j ds + \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \#_{ij} = 2\rho F, \quad (15)$$

onde $\#_{i1}$, $\#_{i2}$ e $\#_{i3}$ são os ângulos externos do triângulo T_i e F é o número de triângulos de \mathbb{T} .

Se denotarmos por $\hat{f}_{ij} = \rho - \#_{ij}$, para $j = 1, 2, 3$, os ângulos internos de um triângulo T_i , temos que

$$\sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \#_{ij} = \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \rho - \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \hat{f}_{ij} = 3\rho F - \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \hat{f}_{ij}.$$

Denotemos por A_e o número de arestas externas de \mathbb{T} , A_i o número de arestas internas de \mathbb{T} , V_e o número de vértices externos de \mathbb{T} e V_i o número de vértices internos de \mathbb{T} . Como C_i são fechadas, temos que $A_e = V_e$. Além disso, $3F = 2A_i + A_e$. Para provar este fato basta tomar uma indução no número de faces.

Desta forma, temos que

$$\sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \#_{ij} = 2\rho A_i + \rho A_e - \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \hat{f}_{ij}.$$

Os vértices externos são vértices das curvas C_i ou vértices introduzidos pela triangulação. Temos que $V_e = V_{ec} + V_{et}$, onde V_{ec} denota o número de vértices externos de alguma curva C_i e V_{et} o número de vértices externos que vêm da triangulação que não são vértices de alguma curva C_i .

Como a soma dos ângulos ao redor de cada vértice interno é 2ρ , temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \#_{ij} &= 2\rho A_i + \rho A_e - \left(2\rho V_i + \rho V_{et} + \sum_{h=1}^p (\rho - \#_h) \right) \\ &= 2\rho A_i + \rho A_e - 2\rho V_i - \rho V_{et} - \rho V_{ec} + \sum_{h=1}^p \#_h \\ &= 2\rho(A_i + A_e) - \rho A_e - 2\rho V_i - \rho(V_{et} + V_{ec}) + \sum_{h=1}^p \#_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\rho(A_i + A_e) - 2\rho(V_i + V_e) - \rho A_e + \rho V_e + \sum_{h=1}^p \#_h \\
&= 2\rho A - 2\rho V + \sum_{h=1}^p \#_h.
\end{aligned} \tag{16}$$

Assim, substituindo-se (16) em (14) obtemos que

$$\iint_R K ds + \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j ds + 2\rho A - 2\rho V + \sum_{h=1}^p \#_h = 2\rho F.$$

Ou seja,

$$\iint_R K ds + \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j ds + \sum_{h=1}^p \#_h = 2\rho \mathcal{X}(R).$$

□

Para finalizarmos esta seção, estudaremos o Teorema de Poincaré-Hopf como uma aplicação do Teorema de Gauss-Bonnet.

Definição 2.77. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Um campo de vetores (tangentes) em S é uma aplicação $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ tal que $X(p) \in T_p S$ para todo $p \in S$. Denotaremos por $\mathcal{T}(S)$ o espaço vetorial dos campos tangentes em S .*

Definição 2.78. *Uma curva integral (ou trajetória) de um campo de vetores $X \in \mathcal{T}(S)$ em uma superfície regular S é uma curva $a : I \rightarrow S$ tal que $a'(t) = X(a(t))$ para todo $t \in I$.*

Definição 2.79. *Seja $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em uma superfície regular S . Um ponto $p \in S$ é **singular** (ou um **zero**) de X se $X(p) = 0$. O conjunto dos pontos singulares de X será denotado por $\text{Sing}(X)$. Um ponto não singular será chamado de **regular**.*

A seguir, apresentamos uma maneira de associar um ponto singular isolado de um campo de vetores a um número inteiro que, em um certo sentido, resume o comportamento qualitativo do campo próximo ao ponto.

Sejam $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em uma superfície regular S e $p \in S$ um ponto singular isolado de X , ou seja, sendo $f : U \rightarrow S$ é uma parametrização local centrada em p , então U é homeomorfo a um disco aberto e $f(U) \cap \text{Sing}(X) \subset \{p\}$, isto é, $f(U)$ não contém pontos singulares de X exceto p . Fixemos um campo de vetores $Y_0 \in \mathcal{T}(f(U))$ que não se anula em nenhum ponto, por exemplo $Y_0 = \frac{\nabla}{\|\nabla\|_{X_1}}$. Tomemos $R \subset f(U)$ uma região regular simples com p no seu interior e $a : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \subset f(U)$ uma parametrização da fronteira de R , orientada positivamente (com respeito a \bar{f}).

Denotemos por $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma determinação contínua do ângulo entre $Y_0 \circ a$ e $X \circ a$.

Nestas condições, introduzimos a noção de índice de um campo.

Definição 2.80. O índice de X em p , denotado por $ind_p(X)$, é dado por

$$ind_p(X) = \frac{1}{2\pi} (q(b) - q(a)) \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

Observação 2.81. Grosso modo, $ind_p(X)$ mede o número de voltas completas que X dá ao longo de uma curva cujo traço contenha p em seu interior.

Proposição 2.82. Sejam $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em uma superfície regular S e $p \in S$ um ponto de S que é um ponto singular isolado de X . Então

$$ind_p(X) = \begin{cases} +1, & \text{se } \det(dX_p) > 0, \\ -1, & \text{se } \det(dX_p) < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [MR98, Proposição 8.25, p. 291]. \square

A proposição a seguir nos dá uma maneira alternativa de calcular o índice de um campo.

Proposição 2.83. Sejam $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em uma superfície regular S , $p \in S$ uma singularidade isolada de X e $R \subset f(U)$ uma região regular simples que contém p em seu interior, contida na imagem de uma parametrização local ortogonal $f : U \rightarrow S$ e tal que $R \cap \text{Sing}(X) \subset \{p\}$. Sejam também $a : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \subset f(U)$ uma parametrização pelo comprimento de arco da fronteira de R , positivamente orientada com respeito a f e $h \in \mathcal{T}(a)$ um campo de vetores paralelos não-nulo ao longo de a . Então

$$ind_p(X) = \frac{1}{2\pi} \iint_R K ds - \frac{1}{2\pi} (y(a) - y(b)),$$

onde $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma determinação contínua do ângulo entre $X \circ a$ e h .

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [AT12, Teorema 6.4.9, p. 328]. \square

Teorema 2.84 (Teorema de Poincaré-Hopf). Seja $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores cujos pontos singulares são todos isolados em uma superfície regular compacta orientável S . Então

$$\sum_{p \in \text{Sing}(X)} ind_p(X) = \chi(S). \quad (19)$$

Demonstração. Consideremos uma triangulação \mathbb{T} da região S de modo que cada triângulo $T_j \in \mathbb{T}$ esteja contido em uma vizinhança coordenada de uma família de parametrizações ortogonais, compatíveis com a orientação de S . Além disso, como a fronteira de todo triângulo de \mathbb{T} está orientada positivamente, obtemos orientações opostas nas arestas que são comuns a triângulos adjacentes. Aplicando-se a Proposição 2.83 a cada triângulo de \mathbb{T} e somando-se os resultados, obtemos:

$$\iint_S K ds - 2\rho \sum_{p \in \text{Sing}(X)} \text{ind}_p(X) = \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \#_{ij}$$

onde $\#_{i1}$, $\#_{i2}$ e $\#_{i3}$ são os ângulos externos do triângulo T_i e F é o número de triângulos de \mathbb{T} .

Mas, levando em conta que a aresta de cada $T_i \in \mathbb{T}$ aparece duas vezes com orientações opostas temos que $\sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \#_{ij} = 0$. Portanto,

$$\sum_{p \in \text{Sing}(X)} \text{ind}_p(X) = \frac{1}{2\rho} \iint_S K ds. \quad (20)$$

Como, por hipótese, S é uma superfície regular compacta e orientável, isto é, uma região regular sem fronteira, temos, pelo Teorema de Gauss-Bonnet 2.76, que

$$\mathcal{X}(S) = \frac{1}{2\rho} \iint_S K ds. \quad (21)$$

De (20) e (21) obtemos

$$\sum_{p \in \text{Sing}(X)} \text{ind}_p(X) = \mathcal{X}(S).$$

□

3

A FÓRMULA DE GAUSS-BONNET ESTEREOLÓGICA

Nesta seção, apresentamos a versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet (14) para domínios com fronteira não vazia em uma superfície regular.

Para isso, introduzimos o conceito de degenerescência para os pontos singulares de um campo de vetores.

Definição 3.1. *Sejam S uma superfície regular, $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em S e $p \in S$ um ponto singular. Dizemos que p é um ponto **não-degenerado** de X se $\det(dX_p) \neq 0$; caso contrário, ele é dito **degenerado**.*

O próximo resultado nos permite relacionar os pontos críticos de uma função com os pontos singulares do campo gradiente desta função.

Lema 3.2. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ em S . Então $p \in S$ é um ponto singular não-degenerado de $\text{grad}(f)$ se, e somente se, p é um ponto crítico não-degenerado de f .*

Demonstração. Como $\langle \text{grad}(f)(p), v \rangle = df_p(v)$, para todo $v \in T_p S$, temos que $p \in S$ é um ponto singular de $\text{grad}(f)$ se, e somente se, p é um ponto crítico de f . Suponhamos que p seja um ponto singular de $\text{grad}(f)$. Sejam $v \in T_p S$ um vetor arbitrário e $a :]-\#, \#[\rightarrow S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $a(0) = p$ e $a'(0) = v$. Temos que

$$\langle \text{grad}(f)(a(t)), a'(t) \rangle = df_{a(t)}(a'(t)) = \frac{d}{dt}(f \circ a)(t), \quad (22)$$

para $t \in]-\#, \#[$. Tomando a derivada em $t = 0$ em (22) e tendo que $\text{grad}(f)(p) = 0$, então

$$\begin{aligned} \text{Hess}_p(f)(v) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} (f \circ a)(t) \\ &= \left\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{grad}(f)(a(t)), v \right\rangle + \langle \text{grad}(f)(p), a''(0) \rangle \\ &= \langle d(\text{grad}(f))_p, v \rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

em cada ponto singular p de $\text{grad}(f)$ e para cada $v \in T_p S$. Portanto, a diferencial $d(\text{grad}(f))_p$ é regular, isto é, $\det(d(\text{grad}(f))_p) \neq 0$, se, e somente se, $\text{Hess}_p f$ é não-degenerada.

Consequentemente, $p \in S$ é um ponto singular não-degenerado de $\text{grad}(f)$ se, e somente se, p é um ponto crítico não-degenerado de f . \square

Lema 3.3. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ em S . Se $p \in S$ é um ponto singular não-degenerado de $\text{grad}(f)$ então p é um ponto singular isolado.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2 temos que $p \in S$ é um ponto singular não-degenerado de $\text{grad}(f)$ se, e somente se, p é um ponto crítico não-degenerado de f . Seja $f : U \rightarrow S$ uma parametrização local em p tal que $p = f(q)$ e $q = (a, b) \in U$. Tomando-se $\# > 0$ suficientemente pequeno, podemos assumir que $a] - \#, \#[\subset f(U)$. Se representarmos a composta $f^{-1} \circ a$ por b e escrevermos b explicitamente em componentes $b(t) = (x_1(t), x_2(t))$, então temos que

$$(f \circ a)(t) = (f \circ f) \circ (f^{-1} \circ a)(t) = (f \circ f)(x_1(t), x_2(t)).$$

Logo,

$$(f \circ a)'(t) = \frac{\partial}{\partial x_1} (f \circ f)(x_1(t), x_2(t)) x_1'(t) + \frac{\partial}{\partial x_2} (f \circ f)(x_1(t), x_2(t)) x_2'(t)$$

e

$$\begin{aligned} (f \circ a)''(0) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} (f \circ f)(a, b) x_1'(0)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (f \circ f)(a, b) x_1'(0) x_2'(0) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} (f \circ f)(a, b) x_2'(0)^2 + \frac{\partial}{\partial x_1} (f \circ f)(a, b) x_1''(0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (f \circ f)(a, b) x_2''(0). \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (f \circ f)(a, b) = d(f \circ f)_{(a,b)}(1, 0) = df_p(dF_{(a,b)}(1, 0)) = 0,$$

pois p é um ponto crítico de f . Analogamente, $\frac{\partial}{\partial x_2} (f \circ f)(a, b) = 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \text{Hess}_p f(v) = (f \circ a)''(0) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} (f \circ f)(a, b) x_1'(0)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (f \circ f)(a, b) x_1'(0) x_2'(0) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} (f \circ f)(a, b) x_2'(0)^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Logo, da equação (24), temos que se p é um ponto crítico não-degenerado de f então p é um ponto crítico não-degenerado de $(f \circ f) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Por [Lim15, Teorema 4, p. 156] temos que p é isolado. \square

Lema 3.4. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ em S e $p \in S$ um ponto singular não-degenerado de $\text{grad}(f)$. São equivalentes:*

1. *A hessiana $\text{Hess}_p f$ de f em p é positiva ou negativa definida;*
2. *$\text{ind}_p(\text{grad}(f)) = +1$;*
3. *p é um ponto de máximo ou mínimo local de f .*

Demonstração. (1) \iff (3): (\Leftarrow): Suponhamos que p seja um ponto de máximo (resp., mínimo) local de f e consideremos $v \in T_p S$ um vetor arbitrário e $a :]-\#, \#[\rightarrow S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $a(0) = p$ e $a'(0) = v$. Então a função $f \circ a$ tem um máximo (resp., mínimo) local em 0 e, conseqüentemente, $\text{Hess}_p f(v) = (f \circ a)''(0) \leq 0$ (resp., $\text{Hess}_p f(v) = (f \circ a)''(0) \geq 0$), isto é, $\text{Hess}_p f$ é negativa (resp., positiva) definida.

(\Rightarrow): Seja $f : U \rightarrow S$ uma parametrização local em p tal que $p = f(q)$ e $q = (a, b) \in U$. Tomando-se $\# > 0$ suficientemente pequeno, podemos assumir que $a(] - \#, \#[) \subset f(U)$. Seja $b(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (f^{-1} \circ a)(t)$.

Logo, da equação (24), temos que se $\text{Hess}_p f$ é negativa (resp., positiva) definida no ponto crítico p , então $q = (a, b)$ é um ponto crítico de $f \circ f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e a hessiana de $f \circ f$ no ponto q é negativa (resp., positiva) definida. Por [Lim15, Teorema 5, p. 157] temos que se a hessiana de $f \circ f$ no ponto q é negativa (resp., positiva) definida em p então p é um ponto de máximo (resp., mínimo) local.

(1) \iff (2): Pela equação (23) e pela Proposição 2.82 temos que

$$\text{ind}_p(\text{grad}(f)) = \begin{cases} +1, & \text{se } \det \text{Hess}_p f > 0, \\ -1, & \text{se } \det \text{Hess}_p f < 0. \end{cases} \tag{25}$$

(\Rightarrow): Suponha que a hessiana $\text{Hess}_p f$ em p é positiva ou negativa definida. Então $\det \text{Hess}_p f > 0$ e, pela equação (25), temos que $\text{ind}_p(\text{grad}(f)) = +1$.

(\Leftarrow): Suponha que $\text{ind}_p(\text{grad}(f)) = +1$ então, pela equação (25), temos que $\det \text{Hess}_p f > 0$, isto é, a hessiana $\text{Hess}_p f$ em p é positiva ou negativa definida. \square

Lema 3.5. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^∞ em S e $p \in S$ um ponto singular não-degenerado de $\text{grad}(f)$. São equivalentes:*

1. *A hessiana $\text{Hess}_p f$ de f em p é indefinida;*
2. *$\text{ind}_p(\text{grad}(f)) = -1$;*

3. p é um ponto de sela de f .

Demonstração. (1) \iff (3): (\Leftarrow): Suponhamos que p seja um ponto de sela de f e consideremos $v \in T_p S$ um vetor arbitrário e $a :]-\#, \#[\rightarrow S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $a(0) = p$ e $a'(0) = v$. Então a função $f \circ a$ tem uma inflexão em 0 e, conseqüentemente, s.p.g., $Hess_p f(a'(-d)) = (f \circ a)''(-d) < 0$ e $Hess_p f(a'(d)) = (f \circ a)''(d) > 0$, para $0 < d < \#$, isto é, $Hess_p f$ é indefinida.

(\Rightarrow): Seja $f : U \rightarrow S$ uma parametrização local em p tal que $p = f(q)$ e $q = (a, b) \in U$. Tomando-se $\# > 0$ suficientemente pequeno, podemos assumir que $a(] - \#, \#[) \subset f(U)$. Seja $b(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (f^{-1} \circ a)(t)$.

Logo, da equação (24), temos que se $Hess_p f$ é indefinida no ponto crítico p , então $q = (a, b)$ é um ponto crítico de $f \circ f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e a hessiana de $f \circ f$ no ponto q é indefinida. Por [Lim15, Teorema 5, p. 157] temos que se a hessiana de $f \circ f$ no ponto q é indefinida em p então p é um ponto de sela.

(1) \iff (2): (\Rightarrow): Suponha que a hessiana $Hess_p f$ em p é indefinida. Então $\det Hess_p f < 0$ e, pela equação (25), temos que $ind_p(grad(f)) = -1$.

(\Leftarrow): Suponha que $ind_p(grad(f)) = -1$ então, pela equação (25), temos que $\det Hess_p f < 0$, isto é, a hessiana $Hess_p f$ em p é indefinida. \square

A seguir, apresentamos uma versão do Teorema de Poincaré-Hopf 2.84 para funções de Morse, que agora definimos.

Definição 3.6. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ em S . Chamaremos a função f de **função de Morse** se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.*

O índice de uma função no ponto crítico será definido a seguir.

Definição 3.7. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e $p \in S$ um ponto crítico de f . Definimos o **índice de f em p** por:*

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é ponto de extremo local,} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ponto de sela.} \end{cases}$$

Teorema 3.8 (Teorema de Poincaré-Hopf para funções de Morse). *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta orientável e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então*

$$\sum_{p \in Crit(f)} ind_p(f) = \chi(S), \tag{26}$$

onde $Crit(f)$ é o conjunto dos pontos críticos de f .

Demonstração. Como f é uma função de Morse, temos, pelo Lema 3.2, que todo ponto singular de $\text{grad}(f)$ é não-degenerado. Mas, pelo Lema 3.3, temos que todo ponto singular de $\text{grad}(f)$ é isolado. Desta maneira, pelo Teorema de Poincaré-Hopf 2.84, segue-se que

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\text{grad}(f))} \text{ind}_p(\text{grad}(f)) = \mathcal{X}(S).$$

Mas, $\text{Crit}(f) = \text{Sing}(\text{grad}(f))$ e se $p \in \text{Crit}(f)$ for um ponto de extremo local então, pelo Lema 3.4, $\text{ind}_p(f) = +1 = \text{ind}_p(\text{grad}(f))$, enquanto que se $p \in \text{Crit}(f)$ for um ponto de sela então, pelo Lema 3.5, $\text{ind}_p(f) = -1 = \text{ind}_p(\text{grad}(f))$, isto é, para todo $p \in \text{Crit}(f)$ temos que $\text{ind}_p(f) = \text{ind}_p(\text{grad}(f))$.

Portanto,

$$\sum_{p \in \text{Crit}(f)} \text{ind}_p(f) = \sum_{p \in \text{Sing}(\text{grad}(f))} \text{ind}_p(\text{grad}(f)) = \mathcal{X}(S).$$

□

O Teorema de Poincaré-Hopf 2.84 foi generalizado para superfícies regulares com fronteira não vazia por Morse [Mor29, Teorema A_0 , p. 170]. Antes de apresentarmos uma versão deste resultado, estendemos a Definição 2.80 de índice de um campo de vetores para domínios com fronteira não vazia.

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientável e $D \subset S$ um domínio em S com fronteira não vazia, isto é, um subconjunto aberto de S , conexo e com fecho compacto. Consideremos $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em D tal que:

1. X tem singularidades isoladas em D ;
2. X não tem singularidades em ∂D ;
3. X é ortogonal a ∂D somente em um número finito de pontos.

Se $p \in D$ é uma singularidade isolada de X , o índice de X em p é dado pela equação (17).

Se $p \in \partial D$ é um ponto de ∂D onde X é ortogonal a ∂D , consideramos $Y \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores tangentes a S tal que, para todo $q \in S$, $\langle X(q), Y(q) \rangle = 0$ e a base $\{Y(q), X(q)\}$ de $T_q S$ é positiva. Notamos que a curva integral de Y em p está localmente contida em $S \setminus D$ ou em D . Desta maneira, definimos o índice de X em p por

$$\text{ind}_p(X) = \begin{cases} +1, & \text{se a curva integral de } Y \text{ está contida em } S \setminus D, \\ -1, & \text{se a curva integral de } Y \text{ está contida em } D. \end{cases}$$

Nas Figuras 4 e 5 a região hachurada representa o domínio D , a região não hachurada representa $S \setminus D$, as setas verticais para cima (em vermelho) representam o campo X , enquanto que as setas horizontais para direita (em verde) representam o campo Y . A curva a destacada nessas figuras é a curva integral de Y em p .

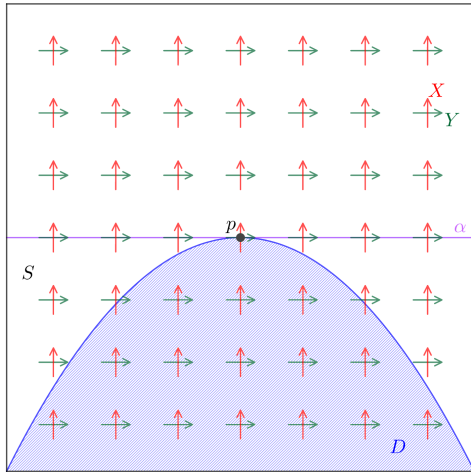


Figura 4: $ind_p(X) = +1$.

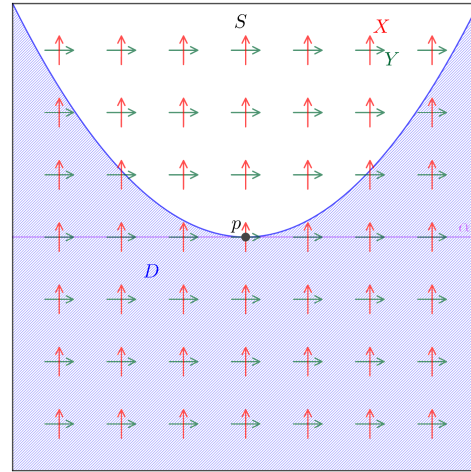


Figura 5: $ind_p(X) = -1$.

Teorema 3.9 (Teorema de Poincaré-Hopf generalizado). *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S e $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em D tal que X tem singularidades isoladas em D , não tem singularidades em ∂D e é ortogonal a ∂D somente em um número finito de pontos. Então*

$$\sum_{p \in \text{Sing}(X)} ind_p(X) + (1/2) \sum_{X(p) \perp T_p \partial D} ind_p(X) = \chi(D). \tag{27}$$

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [Mor29, Teorema A_0 , p. 170] ou em [Jub09, Teorema 12, p. 5]. □

Nosso próximo objetivo é adaptar o Teorema de Poincaré-Hopf generalizado 3.9 para funções de Morse.

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

1. f é uma função de Morse em D ;
2. f não tem pontos críticos em ∂D ;
3. A restrição $f|_{\partial D} : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse.

Se $p \in D$ é um ponto crítico de f , o índice de X em p é dado pela Definição 3.7.

Se $p \in \mathring{D}$ é um ponto crítico de $f|_{\mathring{D}}$ então o conjunto de nível $f^{-1}(f(p))$ está localmente contido ou em $S \setminus D$ ou em D , pois f não tem pontos críticos na fronteira. Desta maneira, definimos o índice de f em p por

$$\text{ind}_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } f^{-1}(f(p)) \text{ está localmente contido ou em } S \setminus D, \\ -1, & \text{se } f^{-1}(f(p)) \text{ está localmente contido ou em } D. \end{cases}$$

Os pontos $p \in \mathring{D}$ para os quais $f^{-1}(f(p))$ está localmente contido em $S \setminus D$ são chamados de pontos do tipo “ilha”, enquanto que $p \in \mathring{D}$ para os quais $f^{-1}(f(p))$ está localmente contido ou em D são do tipo “ponte”. As Figuras 6 e 7 ilustram os pontos do tipo “ilha” e do tipo “ponte”, respectivamente.

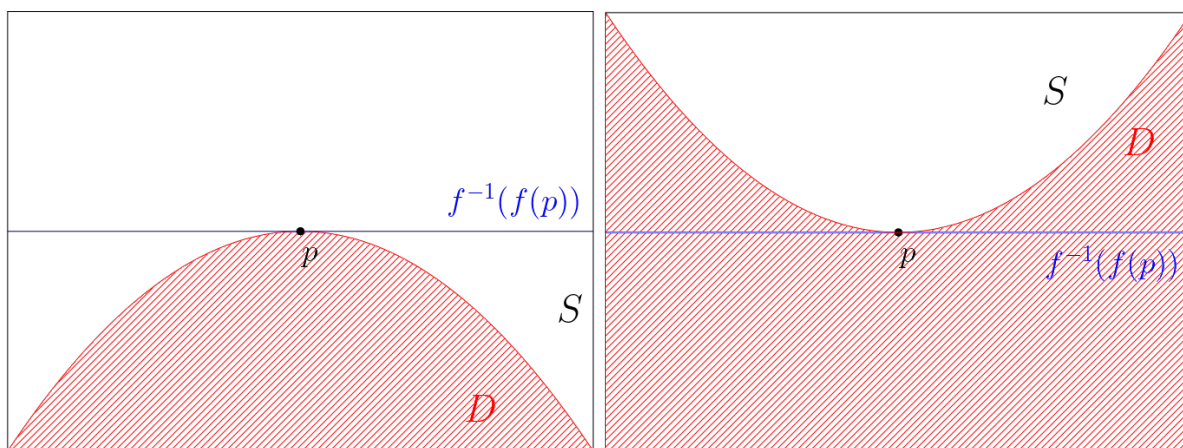


Figura 6: “Ilha”

Figura 7: “Ponte”

Lema 3.10. *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S , $p \in \mathring{D}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que a restrição $f|_{\mathring{D}} : \mathring{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse. Então valem as seguintes afirmações:*

1. $\text{Crit}(f|_{\mathring{D}}) = \{p \in \mathring{D} : \text{grad}(f)(p) \perp T_p \mathring{D}\};$
2. $\text{grad}(f)$ é ortogonal a \mathring{D} somente em um número finito de pontos;
3. $\text{ind}_p(f) = \text{ind}_p(\text{grad}(f)).$

Demonstração. (1): Note que $p \in \mathring{D}$ é um ponto crítico de $f|_{\mathring{D}}$ se, e somente se, $\langle \text{grad}(f)(p), v \rangle = 0$, para todo $v \in T_p \mathring{D}$, isto é, $p \in \mathring{D}$ é um ponto crítico de $f|_{\mathring{D}}$ se, e somente se, $\text{grad}(f)(p) \perp T_p \mathring{D}$.

(2): Como $f|_{\mathcal{H}D}$ é uma função de Morse e D é um domínio temos que $f|_{\mathcal{H}D}$ tem uma quantidade finita de pontos críticos. Logo, pelo item 1, temos o desejado.

(3): Consideremos $Y \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores tangentes a S tal que, para todo $q \in S$, $\langle \text{grad}(f)(q), Y(q) \rangle = 0$ e a base $\{Y(q), \text{grad}(f)(q)\}$ de T_qS é positiva. Pela Proposição 2.14 temos que $\text{grad}(f)$ é ortogonal a $f^{-1}(f(p))$. Logo, o traço da curva integral de Y é localmente dado por $f^{-1}(f(p))$. Portanto, se a curva integral de Y , numa vizinhança de p , está contida em $S \setminus D$ (resp., D) então $f^{-1}(f(p))$ está localmente contido em $S \setminus D$ (resp., D), donde temos que $\text{ind}_p(f) = \text{ind}_p(\text{grad}(f))$. \square

Teorema 3.11 (Teorema de Poincaré-Hopf generalizado para funções de Morse). *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que f é uma função de Morse em D , f não tem pontos críticos em $\mathcal{H}D$ e a restrição $f|_{\mathcal{H}D} : \mathcal{H}D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse. Então*

$$\sum_{p \in \text{Crit}(f)} \text{ind}_p(f) + (1/2) \sum_{p \in \text{Crit}(f|_{\mathcal{H}D})} \text{ind}_p(f) = \mathcal{X}(D). \tag{28}$$

Demonstração. Como f é uma função de Morse, temos, pelo Lema 3.2, que todo ponto singular de $\text{grad}(f)$ em D é não-degenerado. Mas, pelo Lema 3.3, temos que todo ponto singular de $\text{grad}(f)$ é isolado em D . Pelo item 2 do Lema 3.10, temos que $\text{grad}(f)$ é ortogonal a $\mathcal{H}D$ somente em um número finito de pontos. Além disso, por hipótese, f não tem pontos críticos em $\mathcal{H}D$ e, portanto, $\text{grad}(f)$ não tem pontos singulares em $\mathcal{H}D$.

Desta maneira, temos que $\text{grad}(f)$ tem singularidades isoladas em D , não tem singularidades em $\mathcal{H}D$ e é ortogonal a $\mathcal{H}D$ somente em um número finito de pontos e, portanto, pelo Teorema de Poincaré-Hopf generalizado 3.9, segue-se que

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\text{grad}(f))} \text{ind}_p(\text{grad}(f)) + (1/2) \sum_{\text{grad}(f)(p) \perp T_p \mathcal{H}D} \text{ind}_p(\text{grad}(f)) = \mathcal{X}(D). \tag{29}$$

Para $p \in D$, $\text{Crit}(f) = \text{Sing}(\text{grad}(f))$ e se $p \in \text{Crit}(f)$ for um ponto de extremo local então, pelo Lema 3.4, $\text{ind}_p(f) = +1 = \text{ind}_p(\text{grad}(f))$, enquanto que se $p \in \text{Crit}(f)$ for um ponto de sela então, pelo Lema 3.5, $\text{ind}_p(f) = -1 = \text{ind}_p(\text{grad}(f))$, isto é, para todo $p \in \text{Crit}(f)$ temos que $\text{ind}_p(f) = \text{ind}_p(\text{grad}(f))$.

Para $p \in \mathcal{H}D$, pelo item 1 do Lema 3.10, temos que $\text{Crit}(f|_{\mathcal{H}D}) = \{p \in \mathcal{H}D : \text{grad}(f)(p) \perp T_p \mathcal{H}D\}$. Além disso, pelo item 3 do Lema 3.10, temos que $\text{ind}_p(f) = \text{ind}_p(\text{grad}(f))$.

$$\sum_{p \in \text{Crit}(f)} \text{ind}_p(f) = \sum_{p \in \text{Sing}(\text{grad}(f))} \text{ind}_p(\text{grad}(f)). \tag{30}$$

$$\sum_{p \in \text{Crit}(f|_{\mathfrak{H}D})} \text{ind}_p(f) = \sum_{\text{grad}(f)(p) \perp T_p \mathfrak{H}D} \text{ind}_p(\text{grad}(f)). \tag{31}$$

Por (29), (30) e (31) temos que

$$\sum_{p \in \text{Crit}(f)} \text{ind}_p(f) + (1/2) \sum_{p \in \text{Crit}(f|_{\mathfrak{H}D})} \text{ind}_p(f) = \mathcal{X}(D).$$

□

De agora em diante, nossa atenção estará voltada para a função altura, que é uma função de Morse.

Seja $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em \mathbb{R}^3 . Fixado $u \in S^2$ arbitrário, consideremos a **função altura** $h_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_u(p) = \langle p, u \rangle$. Pelo Teorema da transversalidade [AT12, Teorema 4.7.6, p. 232], quando restringimos a função altura h_u a D (ou S), a intersecção $\rho_{u,l} \cap D$ (resp., $\rho_{u,l} \cap S$) é uma curva plana, onde $\rho_{u,l}$ é o plano $h_u^{-1}(l)$, para todo $l \geq 0$. Em particular, pelo Teorema da função implícita [Lim15, Teorema global da função implícita, p. 169], se l é um valor regular de $h_u|_D$ (e, conseqüentemente, de $h_u|_S$), temos que $\rho_{u,l} \cap S$ é uma curva suave em S .

Daremos uma interpretação geométrica para os pontos críticos de $h_u|_D$ e $h_u|_{\mathfrak{H}D}$ e os índices correspondentes. Seja $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em \mathbb{R}^3 . Dado $p \in D$, denotaremos por $N(p)$ o vetor normal unitário de D em p e $K(p)$ a curvatura Gaussiana de D em p . Dado $q \in \mathfrak{H}D$, denotaremos por $n(q)$ o vetor conormal unitário de $\mathfrak{H}D$ em q e $k_g(q)$ a curvatura geodésica de $\mathfrak{H}D$ em D no ponto q . Por fim, denotaremos por $k_g^u(p)$ a curvatura geodésica da curva $\rho_{u,l} \cap S$ no ponto p . Nestas condições, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.12. *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em \mathbb{R}^3 , $u \in S^2$ e \tilde{u} a projeção ortogonal normalizada de u em $T_p D$, para $p \in D$.*

1. $p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $\rho_{u,l}$ é tangente a D em p se, e somente se, $u = \pm N(p)$.
2. $p \in D$ é um ponto crítico não-degenerado de $h_u|_D$ se, e somente se, $K(p) \neq 0$. Além disso, p é um extremo local de $h_u|_D$ quando $K(p) > 0$ e um ponto de sela quando $K(p) < 0$.
3. Se $p \in \mathfrak{H}D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ então p é um ponto crítico de $h_u|_{\mathfrak{H}D}$ se, e somente se, $\rho_{u,l} \cap S$ é tangente a $\mathfrak{H}D$ em p se, e somente se, $\tilde{u} = \pm n(p)$.

4. Se $p \in \mathring{D}$ é um ponto regular de $h_u|_D$ e um ponto crítico de $h_u|_{\mathring{D}}$ então $p \in \mathring{D}$ é não degenerado se, e somente se, $k_g(p) \neq k_g^u(p)$. Além disso, p é uma ilha quando $k_g(p) > k_g^u(p)$ e uma ponte quando $k_g(p) < k_g^u(p)$.

Demonstração. (1): Seja $v \in T_p D$ um vetor unitário arbitrário e consideremos $a :] - \#, \#[\rightarrow D \subset S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em D tal que $a(0) = p$ e $a'(0) = v$. Assim,

$$d(h_u|_D)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h_u|_D(a(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle a(t), u \rangle = \langle a'(0), u \rangle = \langle v, u \rangle. \quad (32)$$

Por (32), temos que $p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $\langle v, u \rangle = 0$, para todo $v \in T_p D$, isto é, u é perpendicular a $T_p D$. Portanto, temos que p é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $u = \pm N(p)$.

Seja $w \in T_p \rho_{u,l}$ um vetor unitário arbitrário e consideremos $b :] - \#, \#[\rightarrow \rho_{u,l}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $\rho_{u,l}$ tal que $b(0) = p$ e $b'(0) = w$. Note que $h_u|_D(b(t)) = \langle b(t), u \rangle = l$, para todo $t \in] - \#, \#[$, então $\langle b'(t), u \rangle = 0$, isto é, $u = \pm N_{\rho_{u,l}}(p)$, onde $N_{\rho_{u,l}}(p)$ é o vetor normal unitário a $\rho_{u,l}$ em p .

Portanto, temos que $u = \pm N(p)$ se, e somente se, $N(p) = \pm N_{\rho_{u,l}}(p)$, isto é, $\rho_{u,l}$ é tangente a D em p .

(2): Afirmamos que $Hess_p(h_u|_D)(v) = II_p(v)$.

De fato, seja $v \in T_p D$ um vetor unitário arbitrário e consideremos $a :] - \#, \#[\rightarrow D \subset S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em D tal que $a(0) = p$ e $a'(0) = v$. Assim,

$$Hess_p(h_u|_D)(v) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} h_u|_D(a(t)) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \langle a(t), u \rangle = \langle a''(0), u \rangle. \quad (33)$$

Mas, $\langle a'(t), N(a(t)) \rangle = 0$, para todo $t \in] - \#, \#[$. Logo,

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle a'(t), N(a(t)) \rangle = \langle a''(0), N(p) \rangle + \left\langle a'(0), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(a(t)) \right\rangle \quad (34)$$

Como $p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ temos, pelo item (1), que $u = \pm N(p)$. Sem perda de generalidade, tomemos $u = N(p)$. Por (34), temos que

$$\langle a''(0), u \rangle = -\langle dN_p(v), v \rangle. \quad (35)$$

Substituindo (35) em (33), obtemos

$$Hess_p(h_u|_D)(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle = II_p(v).$$

Consideremos agora $\{v_1, v_2\}$ um referencial ortonormal principal em p com curvaturas principais k_1, k_2 . Matricialmente obtemos:

$$\text{Hess}_p(h_u|_D)(v) = v \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix} v^T. \quad (36)$$

Por (36), $p \in D$ é um ponto crítico não-degenerado de $h|_D$ se, e somente se, $k_1 k_2 \neq 0$, isto é, $K(p) \neq 0$.

Além disso, se $K(p) > 0$ então $k_1 k_2 > 0$. Logo, por (36), a hessiana $\text{Hess}_p(h_u|_D)$ é positiva ou negativa definida e, portanto, pelo Lema 3.4, temos que p é um ponto de extremo local de f .

Analogamente, se $K(p) < 0$ então $k_1 k_2 < 0$. Logo, por (36), a hessiana $\text{Hess}_p(h_u|_D)$ é indefinida e, portanto, pelo Lema 3.5, temos que p é um ponto de sela de f .

(3): Consideremos $a : I \rightarrow \mathfrak{H}D \subset S$ uma parametrização pelo comprimento de arco de $\mathfrak{H}D$ tal que $a(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge a'(t_0)$. Como $\{N(p), a'(t_0), n(p)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , temos que

$$u = \langle u, N(p) \rangle N(p) + \langle u, a'(t_0) \rangle a'(t_0) + \langle u, n(p) \rangle n(p).$$

Em particular, como p é um ponto regular de $h_u|_D$ temos, pelo item 1, que $u \neq \pm N(p)$, donde segue-se que $\tilde{u} = \frac{v}{|v|}$, onde

$$v = \langle u, a'(t_0) \rangle a'(t_0) + \langle u, n(p) \rangle n(p).$$

Então, $\tilde{u} = \pm n(p)$ se, e somente se, $\langle u, a'(t_0) \rangle = 0$ (isto é, $p_{u,I} \cap S$ é tangente a $\mathfrak{H}D$ em p) se, e somente se, $p \in \mathfrak{H}D$ é um ponto crítico de $h_u|_{\mathfrak{H}D}$.

(4): Consideremos $a : I \rightarrow \mathfrak{H}D \subset S$ uma parametrização pelo comprimento de arco de $\mathfrak{H}D$ tal que $a(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge a'(t_0)$. Seja $b : I \rightarrow p_{u,I} \cap S \subset S$ uma parametrização pelo comprimento de arco de $p_{u,I} \cap S$ tal que $b(s_0) = p$. Neste caso, $\langle u, b(s) \rangle = l$, para todo $s \in I$, então $\langle u, b'(s) \rangle = 0$. Disto temos que \tilde{u} é também igual ao vetor normal a $b'(s_0)$ em $T_p \mathfrak{H}D$. Em particular, como p é um ponto regular de $h_u|_D$ e um ponto crítico de $h_u|_{\mathfrak{H}D}$, pelo item 3, $\tilde{u} = \pm n(p)$ e, conseqüentemente, as curvas a e b são tangentes em p .

Como a é parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$a''(t_0) = k_n(p)N(p) + k_g(p)n(p),$$

donde segue-se que

$$\langle u, a''(t_0) \rangle = k_n(p)\langle u, N(p) \rangle + k_g(p)\langle u, n(p) \rangle. \quad (37)$$

Como b é parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$b''(s_0) = k_n^u(p)N(p) + k_g^u(p)n(p),$$

onde $k_n^u(p)$ é a curvatura normal da curva $\rho_{u,l} \cap S$ no ponto p , donde concluímos que

$$0 = \langle u, b''(s_0) \rangle = k_n^u(p)\langle u, N(p) \rangle + k_g^u(p)\langle u, n(p) \rangle. \quad (38)$$

Como as curvas a e b são tangentes em p , pelo Teorema de Meusnier 2.41, temos que $k_n^u(p) = k_n(p)$. Logo, subtraindo (37) de (38), obtemos

$$\langle u, a''(t_0) \rangle = \left(k_g(p) - k_g^u(p) \right) \langle u, n(p) \rangle.$$

Como p é um ponto regular de $h_u|_D$ temos que $\langle u, n(p) \rangle \neq 0$, donde segue que p é um ponto crítico não degenerado de $h_u|_{\mathfrak{f}D}$ se, e somente se, $k_g(p) \neq k_g^u(p)$. Pela orientação dada a $\mathfrak{f}D$ temos que p é um ponto crítico do tipo ilha quando $k_g(p) > k_g^u(p)$ e do tipo ponte quando $k_g(p) < k_g^u(p)$. \square

O Corolário 3.13 pode ser visto como uma versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet (14).

Corolário 3.13 (Uma versão estereológica para a fórmula de Gauss-Bonnet). *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S e $u \in \mathbb{S}^2$ um vetor arbitrário. Então a função altura $h_u|_D$ é uma função de Morse, não tem pontos críticos em $\mathfrak{f}D$ e a restrição $h_u|_{\mathfrak{f}D}$ é também uma função de Morse. Em particular temos que*

$$\mathcal{X}(D) = \sum_{p \in D: N(p) = \pm u} \text{sign}(K(p)) + (1/2) \sum_{q \in \mathfrak{f}D: n(q) = \pm \tilde{u}} \text{sign}\left(k_g(q) - k_g^u(q)\right), \quad (39)$$

onde $\text{sign}(\cdot)$ é a função sinal e \tilde{u} denota a projeção ortogonal normalizada de u em $T_p D$, para $p \in D$.

Demonstração. Seja $p \in D$ um ponto arbitrário. Notemos que a função altura $h_u|_D(p) = \langle p, u \rangle$ pode ser expressa da seguinte maneira:

$$h_u|_D(p) = \frac{|p|^2 - |p - u|^2 + |u|^2}{2}. \quad (40)$$

De fato,

$$|p - u|^2 = \langle p - u, p - u \rangle = \langle p, p \rangle - 2\langle p, u \rangle + \langle u, u \rangle.$$

Para $p \in \mathfrak{f}D$ um ponto arbitrário, a função $h_u|_{\mathfrak{f}D}$ também é expressa por (40).

Por [Mil63, Teorema 6.6, p.36], temos que para quase todo $p \in \mathbb{R}^3$ a função $L_p : S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $L_p(q) = |p - q|^2$, não tem pontos críticos degenerados. Como

$$h_u|_D = \frac{L_0(p) - L_u(p) + L_0(u)}{2},$$

então $h_u|_D$ é função de Morse para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$. Analogamente, $h_u|_{\mathcal{H}D}$ é função de Morse para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$.

Sejam $p \in \mathcal{H}D$, $v \in T_p S$ arbitrários, $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss de S e $a : I \rightarrow D \subset S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em D tal que $a(s_0) = p$ e $a'(s_0) = v$. Como

$$d(h_u|_D)_p(v) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} h_u|_D(a(s)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} \langle a(s), u \rangle = \langle a'(s_0), u \rangle = \langle v, u \rangle, \quad (41)$$

segue-se que $p \in \mathcal{H}D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $u = \pm N(p)$, pois (41) vale para todo $v \in T_p S$.

Para $p \in \mathcal{H}D$, temos que $u = \pm N(p)$ se, e somente se, $\langle u, N(b(t)) \rangle = \pm 1$, onde $b : I' \rightarrow \mathcal{H}D \subset S$ é uma parametrização pelo comprimento de arco de $\mathcal{H}D$ tal que $b(t_0) = p$. Mas, $\langle u, N(b(t)) \rangle = \pm 1$ se, e somente se,

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \langle u, N(b(t)) \rangle = \langle u, dN_p(w) \rangle,$$

onde $w = b'(t_0)$. Como u é arbitrário, segue-se que $dN_p(w) = 0$ para todo $w \in T_p \mathcal{H}D$, ou seja, $\langle u, N(b(t)) \rangle = \pm 1$ se, e somente se, u é valor crítico de N .

Portanto, p é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, u é valor crítico de N . Ou seja, $h_u|_D$ não tem pontos críticos em $\mathcal{H}D$ se, e somente se, u é valor regular de N . Assim, pelo Teorema de Sard [Lim15, Teorema de Sard, p. 359], $h_u|_D$ não tem pontos críticos em $\mathcal{H}D$ para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$.

A fórmula (39) para $\mathcal{X}(D)$ é uma consequência direta do Teorema de Poincaré-Hopf generalizado para funções de Morse 3.11 e do Teorema 3.12. \square

Observação 3.14. *Uma outra maneira de demonstrar que $h_u|_D$ e $h_u|_{\mathcal{H}D}$ são funções de Morse para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$ é a seguinte. Notemos que $h_u|_D$ é uma função de Morse se, e somente se, u é um valor regular da aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ de S . Assim, pelo Teorema de Sard [Lim15, Teorema de Sard, p. 359], $h_u|_D$ é uma função de Morse para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$. Para a função $h_u|_{\mathcal{H}D}$ é análoga a abordagem.*

3.1 aplicações

A seguir, olharemos para alguns casos particulares do Corolário 3.13. Primeiramente, tomamos $S = \mathbb{R}^2$ e $h_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, para $u \in S^1$, a função altura. As curvas de nível neste caso são retas ortogonais a u , as quais tem curvatura nula. Além disso, h_u não tem pontos críticos em \mathbb{R}^2 e a curvatura geodésica é igual à curvatura de uma curva plana. Neste caso, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.15. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira e $u \in S^1$ um vetor arbitrário. Então a restrição da função altura $h_u|_{\partial D}$ é uma função de Morse e*

$$\mathcal{X}(D) = (1/2) \sum_{p \in \partial D: n(p) = \pm \tilde{u}} \text{sign}(k(p)),$$

onde $\text{sign}(\cdot)$ é a função sinal e \tilde{u} denota a projeção ortogonal normalizada de u em $T_p D$, para $p \in D$.

No caso em que $S = S^2$, temos que as curvas de nível associadas à função altura $h_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são os paralelos; assim, denotando por q_u, g_u as coordenadas esféricas relativas a u , como ilustra a Figura 8, temos que a curvatura geodésica de um paralelo é $-\tan g_u$.

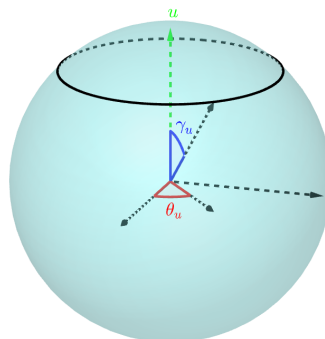


Figura 8: Coordenadas esféricas relativas a u .

Notemos que $h_u|_{S^2}$ é uma função de Morse com dois pontos críticos, u e $-u$. Neste caso, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.16. *Sejam $D \subset S^2 \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira e $u \in S^2$ um vetor arbitrário. Então*

$$\mathcal{X}(D) = (1/2) \sum_{p \in \partial D: n(p) = \pm \tilde{u}} \text{sing}(k_g(p) + \tan g_u(p)) + \#(\{u, -u\} \cap D),$$

onde $\#(\{u, -u\} \cap D)$ é o número de vezes que u ou $-u$ pertencem a D .

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S \subset \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{S}^2$. Quando l varia em \mathbb{R} , os diferentes planos $\rho_{u,l}$ podem ser considerados como planos de “varredura” do \mathbb{R}^3 e (39) pode ser expressa como a seguir, devido ao Teorema 3.12:

$$\mathcal{X}(D) = (l_2 - P_2) + \frac{1}{2}(l_1 - P_1), \tag{42}$$

onde l_1, P_1 denotam o número de “ilhas” e “pontes”, respectivamente, observados nas curvas de nível $\rho_{u,l} \cap S$ e l_2, P_2 denotam o número de “bases” e “topos”, respectivamente, observadas no plano de “varredura” $\rho_{u,l}$, que contribuem para a soma $\sum_{p \in \text{Crit}(h_u)} \text{ind}_p(h_u)$. Para exemplificar, tomamos \mathbb{T}^2 um toro em \mathbb{R}^3 com atlas $\mathcal{A} = \{(f, U_1), (f, U_2), (f, U_3), (f, U_4)\}$, onde

$$f(u, v) = ((\cos(u) + 2) \cos(v), \sin(u), (\cos(u) + 2) \sin(v)), \tag{43}$$

$$U_1 =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\quad , \quad U_2 =]\pi, 3\pi[\times]0, 2\pi[\\ U_3 =]0, 2\pi[\times]\pi, 3\pi[\quad \text{e} \quad U_4 =]\pi, 3\pi[\times]\pi, 3\pi[$$

Consideremos $D \subset \mathbb{T}^2$ um domínio com fronteira em \mathbb{T}^2 parametrizado por (43) para $U = [0, 2\pi] \times [-\frac{1}{4}, \pi - \frac{1}{4}]$, como ilustra a Figura 9.

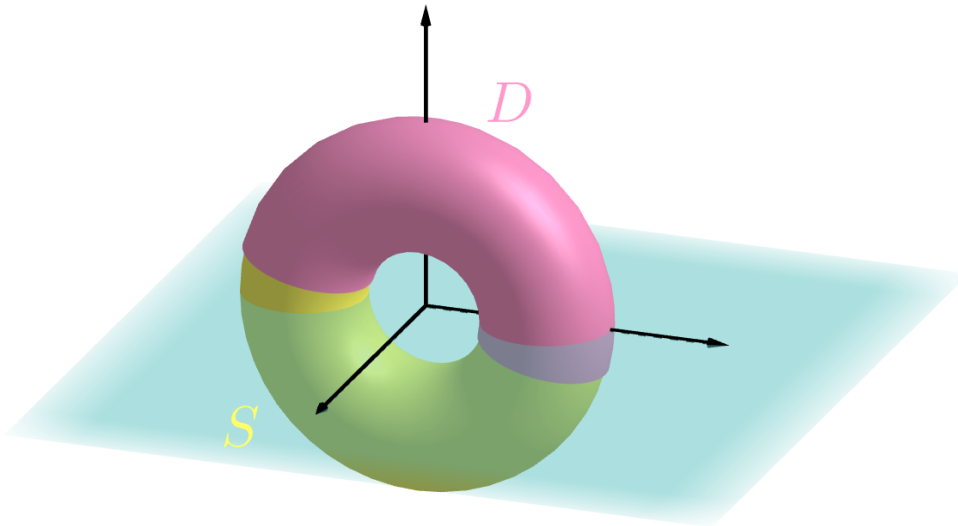


Figura 9: Toro \mathbb{T}^2 e o domínio $D \subset \mathbb{T}^2$ descritos acima.

Para $u = (0, 0, 1)$ o ponto $p_1^D = (0, 0, 1)$ é do tipo “base” e $p_2^D = (0, 0, 3)$ do tipo “topo”.

O ponto

$$p_1^{\eta D} = \left(3\cos\left(-\frac{1}{4}\right), 0, 3\sin\left(-\frac{1}{4}\right) \right)$$

em $\rho_{u,3\sin(-\frac{1}{4})} \cap S$ é do tipo “ilha”,

$$p_2^{\eta D} = \left(\cos\left(-\frac{1}{4}\right), 0, \sin\left(-\frac{1}{4}\right) \right)$$

em $\rho_{u,\sin(-\frac{1}{4})} \cap S$ é do tipo “ponte”,

$$p_3^{\eta D} = \left(\cos\left(\rho - \frac{1}{4}\right), 0, \sin\left(\rho - \frac{1}{4}\right) \right)$$

em $\rho_{u,\sin(\rho-\frac{1}{4})} \cap S$ é do tipo “ilha”,

$$p_4^{\eta D} = \left(3\cos\left(\rho - \frac{1}{4}\right), 0, 3\sin\left(\rho - \frac{1}{4}\right) \right)$$

em $\rho_{u,3\sin(\rho-\frac{1}{4})} \cap S$ é do tipo “ponte”.

A Figura 10 ilustra os pontos $p_1^D, p_2^D, p_1^{\eta D}, p_2^{\eta D}, p_3^{\eta D}$ e $p_4^{\eta D}$ em \mathbb{T}^2 .

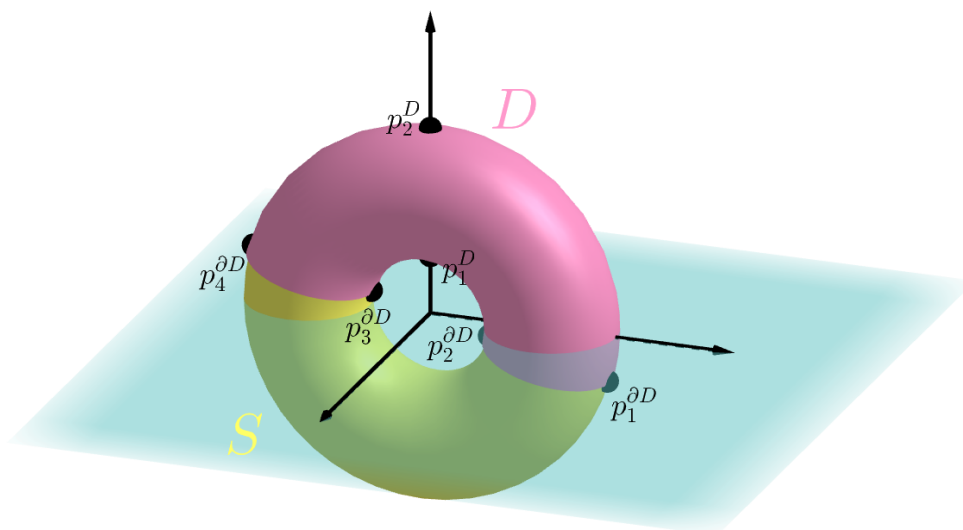


Figura 10: Os pontos $p_1^D, p_2^D, p_1^{\eta D}, p_2^{\eta D}, p_3^{\eta D}$ e $p_4^{\eta D}$ em \mathbb{T}^2 .

Disto temos que $l_1 = 2, P_1 = 2, l_2 = 1$ e $P_2 = 1$. Logo, por (42), temos que

$$\chi(D) = (1 - 1) + \frac{1}{2}(2 - 2) = 0$$

BIBLIOGRAFIA

- [AT12] M. Abate and F. Tovena, *Curves and surfaces*, 1st ed., Springer-Verlag Italia, Milão, Italia, 2012. [↑4](#), [10](#), [11](#), [12](#), [14](#), [18](#), [20](#), [22](#), [24](#), [27](#), [37](#)
- [BB14] E. Behrends and J. Buescu, *Terá Buffon realmente lançado agulhas?*, Boletim da SPM 71 (2014), 123–132. [↑1](#)
- [dC14] M. P. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, 6th ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil, 2014. [↑5](#), [7](#)
- [DeH87] R. T. DeHoff, *Use of the disector to estimate the Euler characteristic of three dimensional microstructures*, Acta Stereologica (1987). [↑2](#)
- [GANBo1] X. Gual-Arnau and J. J. Nuño Ballesteros, *A stereological version of the Gauss-Bonnet formula*, Geom. Dedicata 84 (2001), no. 1-3, 253–260. MR1825359 [↑iii](#), [v](#), [3](#)
- [GBNO93] H. J. G. Gundersen, R. W. Boyce, J. R. Nyengaard, and A. Odgaard, *The conneulor: unbiased estimation of connectivity using physical disectors under projection*, Bone 14 (1993), no. 3, 217–222. Bone Morphometry 1992 Sixth International Congress Proceedings. [↑2](#)
- [Jub09] B. Jubin, *A generalized Poincaré-Hopf index theorem*, 2009. [↑34](#)
- [Lim15] E. L. Lima, *Curso de análise vol. 2*, 11th ed., Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 2015. [↑23](#), [30](#), [31](#), [32](#), [37](#), [41](#)
- [Lim16] ———, *Álgebra linear*, 9th ed., Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 2016. [↑13](#)
- [Mil63] J. Milnor, *Morse theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. MR0163331 [↑41](#)
- [Mor29] M. Morse, *Singular points of vector fields under general boundary conditions*, Amer. J. Math. 51 (1929), no. 2, 165–178. MR1506710 [↑33](#), [34](#)
- [MR98] S. Montiel and A. Ros, *Curves and surfaces*, 2nd ed., Real Sociedad Matemática Española, Madrid, Espanha, 1998. [↑27](#)
- [ONo8] J. OHSER and W. Nagel, *The estimation of the Euler-Poincare characteristic from observations on parallel sections*, Journal of Microscopy 184 (2008), 117–126. [↑2](#)
- [RdSB09] W. L. Roque, A. C. A. de Souza, and D. X. Barbieri, *Característica de Euler-Poincaré aplicada para identificar baixa densidade óssea a partir de imagens tomográficas de vértebras*, Revista Brasileira de Reumatologia (2009). [↑2](#)