Universidade Federal do ABC

Marcos Agnoletto Forte

# Uma versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet

Santo André, 2022

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Marcos Agnoletto Forte

# Uma versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Santo André, 2022

# RESUMO

Baseados no artigo “A stereological version of the Gauss-Bonnet formula”, de Ximo Gual-Arnau e Juan J. Nuño-Ballesteros [GANB01], estudamos uma versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet, com a qual obtivemos uma maneira de calcular a característica de Euler de um domínio com fronteira em uma superfície suave e orientável em $\mathbb{R}^3$ a partir de seções bidimensionais desta superfície. Para isso, demos um significado geométrico para certos pontos de contato entre a superfície e um plano que a “varre”. Além disso, discutimos algumas aplicações estereológicas desta fórmula.

**Palavras-chave:** Geometria integral, estereologia, fórmula de Gauss-Bonnet, geometria diferencial.

# ABSTRACT

Based on the article "A stereological version of the Gauss-Bonnet formula", by Ximo Gual-Arnau e Juan J. Nuño-Ballesteros [GANB01], we have studied a stereological version of the Gauss-Bonnet formula, with which we have obtained a way to calculate the Euler characteristic of a domain with boundary on a smooth and orientable surface in $\mathbb{R}^3$ through two-dimensional sections of this surface. To do that, we have given a geometric meaning to certain contact points between the surface and a plane which "sweeps" it. In addition, we have discussed some stereological applications of this formula.

**Keywords:** Integral geometry, stereology, Gauss-Bonnet formula, differential geometry.

# CONTEÚDO

# 1 INTRODUÇÃO

*Grosso modo*, um estudo estereológico de uma superfície $S$ em $\mathbb{R}^3$ consiste em obter informações geométricas, como a curvatura, a característica de Euler-Poincaré ou a área, através de suas seções bidimensionais. Para isso, fixado $u \in \mathbb{S}^2$, consideramos uma ***função altura*** $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $h_u(p) = \langle p, u \rangle$, de modo que quando variamos um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ obtemos diferentes planos $\pi_{u,\lambda} = h_u^{-1}(\lambda)$ que "varrem" a superfície $S$. Assim, a partir das seções $\pi_{u,\lambda} \cap S$, obtemos as informações geométricas desejadas.

Como exemplo, o Princípio de Cavalieri é um estudo estereológico no qual a informação geométrica a ser determinada é o volume de um sólido, isto é, de um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira é uma superfície. Uma versão clássica deste princípio é a seguinte: "Consideremos dois sólidos e o plano que contém suas bases. Se todo plano paralelo ao plano das bases que intersectar um dos sólidos também intersectar o outro determinando seções de mesma área, como ilustra a Figura 1, então os volumes dos sólidos são iguais."

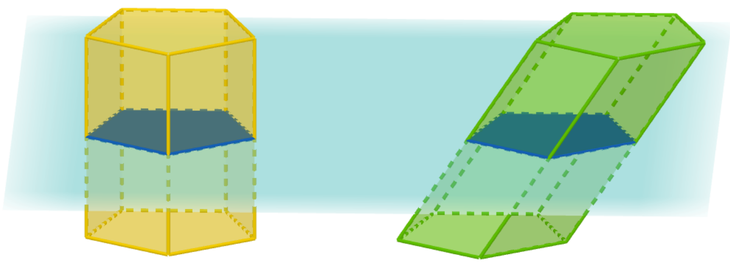

Figura 1: O Princípio de Cavalieri.

Outro estudo estereológico é o famoso problema da agulha de Buffon. Ehrhard Behrends e Jorge Buescu o apresentam da seguinte maneira em [BB14]: "Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707–1788), é famoso pela seguinte 'experiência': suponhamos que estamos numa sala cujo chão é constituído por tábuas paralelas. Designemos a distância entre as tábuas por $a$. Tomemos uma agulha, ou um objeto semelhante, de comprimento $2.r$ menor do que $a$. Esta condição assegura que, se deixarmos cair a agulha no chão, ela atravessará quando muito uma linha que divide duas tábuas diferentes. A probabilidade de que esse acontecimento ocorra (isto é, que a agulha, ao cair no chão, não fique totalmente contida no interior de uma única tábua) é então $P = \frac{4.r}{\pi.a}$. Esta fórmula contém a constante $\pi$ – proporcionando-nos, portanto, a possibilidade de calcular esta constante por via 'experimental'.". A Figura 2 ilustra o problema da agulha de Buffon.

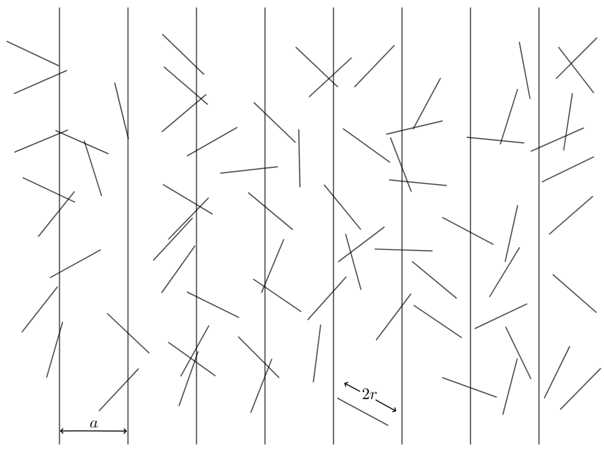


Figura 2: O problema de Buffon.

Como a estereologia é uma ciência aplicada que engloba um estudo interdisciplinar, o desenvolvimento de ferramentas matemáticas, como uma maneira estereológica de obtermos a característica de Euler-Poincaré de uma superfície, é fundamental para o desenvolvimento da área. Podemos ver isso pelas diversas aplicações da característica de Euler-Poincaré na estereologia: [DeH87], [ON08], [RdSB09], [GBNO93].

Este trabalho de conclusão de curso está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2, recordamos algumas definições importantes da geometria diferencial e fixamos notação. Além disso, revisamos um conjunto de fatos sobre as curvaturas de superfícies. Por fim, apresentamos uma demonstração para o Teorema de Gauss-Bonnet 2.76 e o Teorema de Poincaré-Hopf 2.84.

No Capítulo 3, estudamos as ferramentas necessárias para provarmos a versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet 3.13. Além disso, apresentamos algumas aplicações para esta fórmula desenvolvida.

# 2 PRELIMINARES

## 2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Nesta seção apresentaremos algumas definições básicas da geometria diferencial e fixaremos notação. As superfícies em $\mathbb{R}^3$ são o objeto de estudo dos resultados obtidos por Ximo Gual-Arnau e Juan J. Nuño-Ballesteros no artigo "A stereological version of the Gauss-Bonnet Formula" [GANB01]. Assim, a seguir definiremos superfícies.

**Definição 2.1.** *Um subconjunto conexo $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma* **superfície regular** *(ou* **mergulhada***) se para todo ponto $p \in S$ existe uma aplicação $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ de classe $C^\infty$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que:*

1. *$\phi(U) \subset S$ é uma vizinhança aberta de $p$ em $S$ (ou, equivalentemente, existe uma vizinhança aberta de $W \subset \mathbb{R}^3$ de $p$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\phi(U) = W \cap S$);*

2. *$\phi$ é um homeomorfismo sobre sua imagem;*

3. *A diferencial $d\phi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $x \in U$.*

No contexto da Definição 2.1 chamaremos qualquer aplicação $\phi$ que satisfaz os itens (1) - (3) de ***parametrização local*** (ou ***regular***) em $p$; se $0 \in U$ e $\phi(0) = p$ diremos que tal parametrização local é ***centrada*** em $p$. Chamaremos a aplicação inversa $\phi^{-1} : \phi(U) \to U$ de ***carta local*** em $p$; a vizinhança $\phi(U)$ de $p$ em $S$ é chamada de ***vizinhança coordenada***, as aplicações coordenadas $(x_1(p), x_2(p)) = \phi^{-1}(p)$ são chamadas de ***coordenadas locais*** de $p$; e, para $j = 1, 2$, a curva $t \mapsto \phi(x_0 + te_j)$ é chamada de ***j-ésima curva coordenada*** ao longo de $\phi(x_0)$.

**Definição 2.2.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Chamamos de* **atlas** *a família $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha\}$ de parametrizações locais $\phi_\alpha : U_\alpha \to S$ em $p$, para todo $p \in S$, tais que $S = \bigcup_\alpha \phi_\alpha(U_\alpha)$.*

A seguir daremos um procedimento para construir superfícies regulares a partir da imagem inversa de valores regulares. Comecemos com uma definição:

**Definição 2.3.** *Sejam $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dizemos que $p \in V$ é um* **ponto crítico** *de $f$ se $df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva. Denotaremos o conjunto dos pontos críticos de $f$ por $Crit(f)$ e os pontos de $V$ que não são pontos críticos chamaremos de* **pontos regulares** *de $f$. Se $p \in V$ é um ponto crítico de $f$, então chamamos $f(p) \in \mathbb{R}$ de* **valor crítico**. *Um ponto $y \in f(V) \subset \mathbb{R}$ que não é um valor crítico é um* **valor regular**. *Além disso, diremos que um ponto crítico $p \in V$ de $f$ é* **não-degenerado** *se a hessiana de $f$ em $p$ é uma forma bilinear não-degenerada; caso contrário, ele é dito* **degenerado**.

**Observação 2.4.** *Sejam $f : V \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ definida em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ e $p \in V$. Então $df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva se, e somente se, ela é identicamente nula. Em outras palavras, $p \in V$ é um ponto crítico de $f$ se, e somente se, o gradiente de $f$ é zero em $p$.*

**Proposição 2.5.** *Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$. Se $a \in \mathbb{R}$ é um valor regular de $f$ então toda componente conexa do conjunto de nível $f^{-1}(a) = \{p \in V : f(p) = a\}$ é uma superfície regular.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 3.1.25, p. 128]. □

**Definição 2.6.** *Sejam $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $f : V \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ e $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de $f$. Uma componente conexa de $f^{-1}(a)$ é chamada de* **superfície de nível** *de $f$.*

A seguir veremos que toda superfície regular é localmente o gráfico de uma função.

**Proposição 2.7.** *Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto. Então existe uma parametrização local $\phi : U \to S$ em $p$ de uma das seguintes formas:*

$$\phi(x,y) = \begin{cases} (x, y, f(x,y)), & \text{ou} \\ (x, f(x,y), y), & \text{ou} \\ (f(x,y), x, y), & \end{cases}$$

*para uma certa função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 3.1.29, p. 130]. □

**Definição 2.8.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. Uma função $f : S \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou suave) em $p$ se existe uma parametrização local $\phi : U \to S$ em $p$ tal que $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em uma vizinhança de $\phi^{-1}(p)$. Diremos que $f$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou suave) se ela for suave em todo ponto de $S$.*

Um possível problema com a Definição 2.8 é que ela pode depender da parametrização escolhida, isto é, pode existir uma outra parametrização $\psi$ em $p$ tal que $f \circ \psi$ não é suave em $\psi^{-1}(p)$. Entretanto, veremos a seguir que este não é o caso e a Definição 2.8 não depende da escolha de parametrização.

**Teorema 2.9.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $\phi : U \to S$ e $\psi : V \to S$ duas parametrizações com $\Omega = \phi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Então a aplicação $\eta = (\phi^{-1} \circ \psi)|_{\psi^{-1}(\Omega)} : \psi^{-1}(\Omega) \to \phi^{-1}(\Omega)$ é um difeomorfismo.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC14, Proposição 1, p. 82]. $\square$

**Corolário 2.10.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $f : S \to \mathbb{R}$ uma função em $S$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Se existe uma parametrização $\phi : U \to S$ em $p$ tal que $f \circ \phi$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em uma vizinhança de $\phi^{-1}(p)$ então $f \circ \psi$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em uma vizinhança de $\psi^{-1}(p)$ para todas as parametrizações $\psi : V \to S$ de $S$ em $p$.*

*Demonstração.* Notemos que podemos escrever $f \circ \psi = (f \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi)$. Então pelo Teorema 2.9 temos que $f \circ \psi$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em uma vizinhança de $\psi^{-1}(p)$ se, e somente se, $f \circ \phi$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em uma vizinhança de $\phi^{-1}(p)$. $\square$

Usando a mesma ideia da Definição 2.8, definiremos funções suaves entre superfícies.

**Definição 2.11.** *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares. Diremos que a aplicação $f : S_1 \to S_2$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou suave) em $p \in S_1$ se existe uma parametrização local $\phi_1 : U_1 \to S_1$ em $p$ e uma parametrização local $\phi_2 : U_2 \to S_2$ em $f(p)$ tal que $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em uma vizinhança de $\phi_1^{-1}(p)$. Diremos que $f$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou suave) de ela for suave em todo ponto de $S_1$. Se $f$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e inversível com inversa de classe $\mathcal{C}^\infty$ diremos que $f$ é um* **difeomorfismo** *e que $S_1$ e $S_2$ são* **difeomorfas**.

Definiremos, agora, a noção de um vetor tangente a uma superfície regular em um ponto.

**Definição 2.12.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. Um* **vetor tangente** *a $S$ em $p$ é um vetor da forma $\alpha'(0)$, onde $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to \mathbb{R}^3$ é uma curva de classe $\mathcal{C}^\infty$ cujo traço está contido em $S$ e tal que $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes a $S$ em $p$ é um espaço vetorial chamado de* **plano tangente** *a $S$ em $p$, que será denotado por $T_pS$.*

Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p \in S$ um ponto arbitrário e $\phi : U \to S$ uma parametrização local de $p$ com $\phi(x_0) = p$. Então $d\phi_{x_0}$ é um isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ e $T_pS$ que nos permite considerar uma base especial para o plano tangente:

**Definição 2.13.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. Consideremos $\phi : U \to S$ uma parametrização local centrada em $p$ e $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Definimos os vetores tangentes a $S$ em $p$ $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p \in T_pS$ por*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p = d\phi_0(e_j) = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j}(0) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_j}(0) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_j}(0) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

*A base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p \right\}$ de $T_pS$ será chamada de* **base induzida pela parametrização local** *$\phi$.*

Vimos na Proposição 2.5 que é possível definirmos superfícies como conjuntos de nível de uma função suave. A próxima proposição nos mostrará como encontrar o plano tangente neste caso particular.

**Proposição 2.14.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty$, $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de $f$, $S$ uma componente conexa de $f^{-1}(a)$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Então o plano tangente $T_pS$ é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a $grad(f)(p)$.*

*Demonstração.* Consideremos $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_pS$ um vetor arbitrário e seja $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to S$ uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Primeiramente notemos que $f \circ \alpha = a$, donde obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(p)v_3 = 0.$$

Portanto $v$ é ortogonal a $grad(f)(p)$. Como $v$ foi tomado arbitrário temos que $T_pS$ está contido no subespaço ortogonal a $grad(f)(p)$. Como ambos os espaços têm dimensão 2, então o plano tangente $T_pS$ é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a $grad(f)(p)$. $\square$

Munidos da noção de plano tangente, introduziremos a noção de diferencial de uma aplicação suave entre superfícies.

**Proposição 2.15.** *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares e $f : V \subset S_1 \to S_2$ uma aplicação suave de um conjunto aberto $V \subset S_1$. Consideremos $p \in V$ um ponto e $v \in T_pS_1$ um vetor arbitrários tais que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$ onde $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to V$ é uma curva parametrizada diferenciável. Então a curva $\beta = f \circ \alpha$ é tal que $\beta(0) = f(p)$ e $\beta'(0)$ é um vetor de $T_{f(p)}S_2$ que não depende da escolha de $\alpha$. Além disso, a aplicação $df_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ definida por $df_p(v) = \beta'(0)$ é linear.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC14, Proposição 2, p. 100]. □

**Definição 2.16.** *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares, $f : V \subset S_1 \to S_2$ uma aplicação suave de um conjunto aberto $V \subset S_1$ e $p \in V$ um ponto arbitrário. Chamamos a aplicação linear $df_p$, dada pela Proposição 2.15, de* **diferencial** *de $f$ em $p$.*

## 2.2 CURVATURAS

Até agora, tratamos as superfícies sob o ponto de vista da diferenciabilidade. Nesta seção, começaremos o estudo de outras estruturas geométricas associadas a uma superfície regular.

**Definição 2.17.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ o produto escalar positivo definido em $T_pS$ induzido pelo produto escalar canônico de $\mathbb{R}^3$. A* **primeira forma fundamental** *$I_p : T_pS \to \mathbb{R}$ é a forma quadrática (positiva definida) associada ao produto escalar, isto é, para todo $v \in T_pS$ temos que*

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p \geq 0.$$

Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto arbitrário. A seguir, expressaremos a primeira forma fundamental na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$ associada a uma parametrização local $\phi : U \to S$ em $p$.

Se tomarmos dois vetores tangentes $v, w \in T_pS$ e os escrevermos como combinação linear dos vetores da base, isto é, $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ e $w = w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, então

$$\langle v, w \rangle_p = v_1 w_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle_p + (v_1 w_2 + v_2 w_1) \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle_p + v_2 w_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle_p.$$

Em particular,

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = v_1^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle_p + 2 v_1 v_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle_p + v_2^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle_p. \tag{1}$$

**Definição 2.18.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\phi : U \to S$ uma parametrização local. Então definimos os* **coeficientes da primeira forma fundamental** *(ou* **métrica***) de $S$ com respeito a $\phi$ como as funções $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$E(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle_{\phi(x)}, \quad F(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle_{\phi(x)}, \quad G(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle_{\phi(x)},$$

*para todo $x \in U$.*

**Observação 2.19.** *Notamos que os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície regular são funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ e que, embora eles dependam da escolha de parametrização local, a primeira forma fundamental de $S$, dada por (1), independe de parametrização.*

As aplicações entre superfícies regulares que preservam a primeira forma fundamental e, portanto, a métrica, são chamadas de isometrias, enquanto que aquelas que preservam ângulo são chamadas de conformes. É o que definimos a seguir.

**Definição 2.20.** *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares e $f : S_1 \to S_2$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dizemos que $f$ é uma* **isometria em** *$p \in S_1$ se para todo $v \in T_pS_1$ tivermos que*

$$I_{f(p)}(df_p(v)) = I_p(v).$$

Nas condições da Definição 2.20, se $f : S_1 \to S_2$ é uma isometria então temos também que para todo $v, w \in T_pS_1$

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle_p &= \frac{I_p(v+w) - I_p(v) - I_p(w)}{2} \\ &= \frac{I_{f(p)}(df_p(v+w)) - I_{f(p)}(df_p(v)) - I_{f(p)}(df_p(w))}{2} \\ &= \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)}.\end{aligned}$$

Além disso, dizemos que $f$ é uma ***isometria local em*** $p \in S_1$ se $p$ possuir uma vizinhança $U$ tal que $f$ é uma isometria em cada ponto de $U$; e que $f$ é uma ***isometria local*** se ela é uma isometria em cada ponto de $S_1$. Por fim, dizemos que $f$ é uma ***isometria*** se ela for um difeomorfismo global e uma isometria local.

**Definição 2.21.** *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares. Dizemos que $S_1$ é* **localmente isométrica** *a $S_2$ e para todo $p \in S_1$ existe uma isometria de uma vizinhança de $p$ em $S_1$ com um conjunto aberto em $S_2$.*

**Definição 2.22.** *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares e $f : S_1 \to S_2$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dizemos que $f$ é uma* **aplicação conforme** *se para todo $p \in S_1$ e quaisquer $v \in T_pS_1$ temos*

$$I_{f(p)}(df_p(v)) = \lambda^2(p) I_p(v),$$

*onde $\lambda^2$ é uma função diferenciável em $S_1$ que nunca se anula. As superfícies $S_1$ e $S_2$ são chamadas* **conformes**.

Nas condições da Definição 2.22, se $f : S_1 \to S_2$ é uma aplicação conforme então temos também que para todo $v, w \in T_pS_1$

$$\left\langle df_p(v), df_p(w) \right\rangle_{f(p)} = \lambda^2(p) \left\langle v, w \right\rangle.$$

**Definição 2.23.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$ um ponto. A* **determinação do ângulo** *entre dois vetores tangentes $v, w \in T_pS$ é um número $\theta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle_p}{\sqrt{I_p(v) I_p(w)}}.$$

*Além disso, se $\alpha, \beta : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to S$ são curvas diferenciáveis com $\alpha(0) = \beta(0) = p$, nós dizemos que o* **ângulo entre** *$\alpha$* **e** *$\beta$* **em** *$p$ é a determinação do ângulo entre $\alpha'(0)$ e $\beta'(0)$.*

**Definição 2.24.** *Dizemos que uma parametrização local $\phi$ de uma superfície regular $S$ é* **ortogonal** *se suas curvas coordenadas formam um ângulo reto.*

Sendo $U$ uma vizinhança coordenadas de $p$, a parametrização $\phi$ é ortogonal se $F(x) = 0$, para todo $x \in U$.

Uma outra questão métrica que pode ser tratada com a primeira forma fundamental é o cálculo da área de uma região limitada de uma superfície regular $S$. Para isto, definiremos estas regiões cuja área queremos medir.

**Definição 2.25.** *Sejam $\alpha : [a, b] \to S$ uma curva regular por partes parametrizada por comprimento de arco em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ e $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que $\alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$ é regular para $j = 1, \ldots, k$. Definimos*

$$\alpha'(t_j^-) = \lim_{t \to t_j^-} \alpha'(t) \qquad e \qquad \alpha'(t_j^+) = \lim_{t \to t_j^+} \alpha'(t);$$

*$\alpha'(t_j^-)$ e $\alpha'(t_j^+)$ são (em geral) vetores distintos em $T_{\alpha(t_j)}S$. Notemos que $\alpha'(t_0^-)$ e $\alpha'(t_k^+)$ só estão definidos para curvas fechadas e, neste caso, definimos $\alpha'(t_0^-) = \alpha'(t_k^-)$ e $\alpha'(t_k^+) = \alpha'(t_0^+)$. Diremos que $\alpha(t_j)$ é um* **vértice** *de $\alpha$ se $\alpha'(t_j^-) \neq \alpha'(t_j^+)$ e uma* **cúspide** *se $\alpha'(t_j^-) = -\alpha'(t_j^+)$. Um* **polígono curvilíneo** *em $S$ é uma curva simples, regular por partes, parametrizada pelo comprimento de arco e sem cúspides.*

**Definição 2.26.** *Sejam $S$ uma superfície regular e $R \subset S$ um subconjunto conexo. Dizemos que $R$ é uma* **região regular** *se $R$ é compacto e sua fronteira $\partial R$ é uma união finita de polígonos curvilíneos que não se intersectam.*

No caso em que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular compacta, temos que $S$ é uma região regular com fronteira vazia.

**Definição 2.27.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $\phi : U \to S$ uma parametrização local e $R \subset S$ uma região regular de $S$ tal que $\phi^{-1}(R) \subset U$. Chamamos o número positivo*

$$A(R) = \iint_{\phi^{-1}(R)} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \right| dxdy$$

*de* **área de** *$R$.*

**Observação 2.28.** *Notemos que a área de uma região regular não depende da parametrização escolhida.*

**Definição 2.29.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Dizemos que $S$ é* **orientável** *se ela admite uma cobertura por vizinhanças coordenadas $\phi_\alpha(U_\alpha)$, em que $\phi_\alpha : U_\alpha \to S$, de tal modo que se $p \in \phi_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap \phi_{\alpha_2}(U_{\alpha_2})$, com $(x_1, y_1) \in U_{\alpha_1}$ e $(x_2, y_2) \in U_{\alpha_2}$ então $\dfrac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x_2, y_2)}(p) > 0$. A escolha de uma tal família de vizinhanças coordenadas que cobrem $S$ é denominada uma* **orientação** *de $S$, e $S$, neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, diz-se que $S$ é* **não-orientável**. *Se $S$ é orientada, uma parametrização local $\phi : U \to S$ é dita* **compatível** *com a orientação de $S$ se, unindo $\phi$ à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação.*

**Definição 2.30.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Um* **campo vetorial normal** *a $S$ é a aplicação $N : S \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $N(p)$ é ortogonal a $T_pS$ para todo $p \in S$. Se, além disso, $|N| = 1$ dizemos que $N$ é um* **campo normal unitário** *a $S$.*

A seguir, observamos a relação entre a orientabilidade de uma superfície e um campo normal unitário a ela.

**Proposição 2.31.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Então temos que $S$ é orientável se, e somente se, existe um campo normal unitário em $S$.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 4.3.7, p. 180]. □

**Definição 2.32.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada por um atlas $\mathcal{A}$. Um campo normal unitário $N$* **determina uma orientação** *se $N = \dfrac{\dfrac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dfrac{\partial}{\partial x_2}}{\left|\dfrac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right|}$ para qualquer parametrização local de $\mathcal{A}$.*

**Definição 2.33.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada e $N : S \to \mathbb{S}^2$ um campo normal unitário que determina uma orientação. Para $p \in S$ dizemos que uma base $\{v_1, v_2\}$ de $T_pS$ é* **positiva** *(resp.,* **negativa***) se a base $\{v_1, v_2, N(p)\}$ de $\mathbb{R}^3$ tem a mesma orientação (resp., a orientação oposta) da base canônica de $\mathbb{R}^3$.*

**Corolário 2.34.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty$ e $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de $f$. Então toda componente conexa $S$ de $f^{-1}(a)$ é orientável e o campo normal unitário é dado por $N = \dfrac{grad(f)}{|grad(f)|}$.*

*Demonstração.* Seja $p \in S$ um ponto arbitrário. Pela Proposição 2.14 temos que o plano tangente $T_pS$ é ortogonal a $grad(f)(p)$. Logo, basta tomar $N(p) = \dfrac{grad(f)}{|grad(f)|}(p)$. Pela Proposição 2.31, temos que $S$ é orientável. □

Uma das preocupações da geometria diferencial é medir a curvatura de uma superfície regular $S$. Isto está fortemente relacionado à variação do campo normal unitário $N$ sobre $S$, como veremos a seguir.

**Lema 2.35.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p \in S$ um ponto e $N(p)$ um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a $T_pS$. Dado $v \in T_pS$ um vetor tal que $|v| = 1$, consideremos $\Pi$ o plano que passa por $p$ e é paralelo a $v$ e $N(p)$. Então a interseção $\Pi \cap S$ é, em uma vizinhança de $p$, o traço de uma curva regular.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 4.4.1, p. 184]. □

**Definição 2.36.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada. A* **aplicação de Gauss** *de $S$ é o campo normal unitário $N : S \to \mathbb{S}^2$ que determina a mesma orientação de $S$.*

A aplicação de Gauss determina unicamente os planos tangentes a uma superfície regular $S$, pois $T_pS$ é ortogonal a $N(p)$; então a variação de $N$ mede o quanto os planos tangentes variam, isto é, o quanto $S$ deixa de ser um plano.

Este argumento sugere que a curvatura da superfície regular pode estar relacionada com a diferencial da aplicação de Gauss, assim como a curvatura de curvas está relacionada com a derivada do vetor unitário tangente.

**Proposição 2.37.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$. Então $dN_p$ é um endomorfismo de $T_pS$, simétrico com respeito ao produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, para todo $p \in S$.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 4.4.15, p. 188]. □

**Definição 2.38.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$. A* **segunda forma fundamental** *de $S$ é a forma quadrática $II_p : T_pS \to \mathbb{R}$ dada por*

$$II_p(v) = -\left\langle dN_p(v), v \right\rangle_p,$$

*para todo $v \in T_pS$.*

Uma mudança de orientação em $S$ faz a aplicação de Gauss mudar de sinal e, consequentemente, a segunda forma fundamental muda de sinal também. A partir da segunda forma fundamental de $S$ e do Lema 2.35, definimos o conceito de curvatura normal:

**Definição 2.39.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada e $\alpha : I \to S$ uma curva em $S$ parametrizada pelo comprimento de arco. A* **curvatura normal** *de $\alpha$ é a função $\kappa_n : I \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\kappa_n(t) = \left\langle \alpha''(t), N \circ \alpha(t) \right\rangle.$$

Em outras palavras, nas condições da Definição 2.39, a curvatura normal é o comprimento da projeção do vetor $\kappa n$, onde $\kappa$ é a curvatura da curva $\alpha$ e $n$ é o vetor normal de $\alpha$, sobre a normal à superfície em $p$, com um sinal dado pela orientação de $S$ em $p$. A seguir, damos uma interpretação geométrica para a segunda forma fundamental de $S$.

**Observação 2.40.** *Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada e $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to S$ uma curva em $S$, parametrizada pelo comprimento de arco. Notemos que $\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0$, $\forall s \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$. Logo, segue-se que*

$$-\left\langle dN_{\alpha(s)}(\alpha'(s)), \alpha'(s) \right\rangle = \left\langle N(\alpha(s)), \alpha''(s) \right\rangle.$$

*Portanto,*

$$II_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = -\left\langle dN_{\alpha(s)}(\alpha'(s)), \alpha'(s) \right\rangle = \left\langle N(\alpha(s)), \alpha''(s) \right\rangle = \kappa_n(s).$$

**Teorema 2.41** (Meusnier)**.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Então:*

1. *Duas curvas em $S$ passando por $p$ e tangentes à mesma direção têm a mesma curvatura normal em $p$.*

2. *A curvatura normal de $S$ em $p$ num vetor $v \in T_pS$ tal que $|v| = 1$ é dada por $II_p(v)$.*

*Demonstração.* A demonstração segue da Observação 2.40. $\square$

Como vimos na Proposição 2.37, dada uma superfície regular orientada $S \subset \mathbb{R}^3$ com aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$, sabemos que $dN_p$ é um endomorfismo simétrico e, portanto, pelo Teorema Espectral [Lim16, Teorema 13.6, p. 160], temos que $dN_p$ é diagonalizável, o que nos permite definir:

**Definição 2.42.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Se $v \in T_pS$, com $|v| = 1$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ são tais que $dN_p(v) = -\lambda v$ dizemos que $v$ é uma* **direção principal de** $S$ **em** $p$ *e $\lambda$ é a* **curvatura principal de** $S$ **em** $p$.

Assim, sendo $v \in T_pS$ uma direção principal com curvatura principal $\kappa$, temos que

$$II_p(v) = -\left\langle dN_p(v), v \right\rangle_p = -\langle -\kappa v, v \rangle_p = \kappa,$$

de modo que as curvaturas principais são curvaturas normais. Como veremos a seguir, elas são precisamente a maior e menor curvaturas normais num ponto:

**Proposição 2.43.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Então existem direções principais $v_1, v_2 \in T_pS$ com correspondentes curvaturas principais $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$, com $\kappa_1 \leq \kappa_2$, tais que:*

1. *$\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $T_pS$;*

2. *dado um vetor unitário $v \in T_pS$, consideremos $\theta \in ]-\pi, \pi]$ a determinação do ângulo entre $v_1$ e $v$, logo $\cos\theta = \langle v_1, v \rangle_p$ e $\sin\theta = \langle v_2, v \rangle_p$. Então*

$$II_p(v) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta \qquad \textit{(Fórmula de Euler)};$$

3. *$\kappa_1$ é a menor curvatura normal em $p$ e $\kappa_2$ é a maior curvatura normal em $p$. Mais precisamente, o conjunto de todas as possíveis curvaturas normais de $S$ em $p$ é o intervalo $[\kappa_1, \kappa_2]$, isto é,*

$$\left\{II_p(v) : v \in T_pS, I_p(v) = 1\right\} = [\kappa_1, \kappa_2].$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 4.5.2, p. 191]. □

**Definição 2.44.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$. A* **curvatura Gaussiana** *de $S$ é a função $K : S \to \mathbb{R}$ dada por*

$$K(p) = \det dN_p, \qquad \forall p \in S,$$

*e a* **curvatura média** *de $S$ é a função $H : S \to \mathbb{R}$ dada por*

$$H(p) = -\frac{1}{2}\operatorname{trace} dN_p, \qquad \forall p \in S.$$

**Observação 2.45.** *Se $\kappa_1$ e $\kappa_2$ são as curvaturas principais de $S$ em $p$ então $K(p) = \kappa_1\kappa_2$ e $H(p) = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$.*

Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ e $p \in S$ um ponto arbitrário. Fixemos $\phi : U \to S$ uma parametrização local em $p$. Se $v = v_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + v_2\dfrac{\partial}{\partial x_2} \in T_pS$, então

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle_p = II_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)v_1^2 - 2\left\langle dN_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \frac{\partial}{\partial x_2}\right\rangle_p v_1v_2 + II_p\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)v_2^2,$$

donde temos a seguinte definição.

**Definição 2.46.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\phi : U \to S$ uma parametrização local. Definimos os* **coeficientes da segunda forma fundamental** *de $S$ com respeito a $\phi$ como sendo as funções $e, f, g : U \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$\begin{aligned}
e(x) &= -\left\langle dN_{\phi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle_{\phi(x)} = II_{\phi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right),\\
f(x) &= -\left\langle dN_{\phi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \frac{\partial}{\partial x_2}\right\rangle_{\phi(x)},\\
g(x) &= -\left\langle dN_{\phi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \frac{\partial}{\partial x_2}\right\rangle_{\phi(x)} = II_{\phi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right),
\end{aligned}$$

*para todo $x \in U$, onde $N = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}}{\left|\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}\right|}$.*

**Observação 2.47.** *Notemos que os coeficientes da segunda forma fundamental de uma superfície regular são funções de classe $C^\infty$.*

Para finalizarmos esta seção, provaremos que a curvatura Gaussiana é uma propriedade intrínseca da superfície, isto é, depende somente da primeira forma fundamental e não da maneira que a superfície está imersa no $\mathbb{R}^3$.

Sejam $\phi : U \to S$ uma parametrização local da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ e $N : \phi(U) \to \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss de $\phi(U)$ dada por $N = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}}{\left|\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}\right|}$. Notemos que $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, N\right\}$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$ em todo ponto. Em particular, existem funções $\Gamma_{ij}^k, h_{ij}, a_{ij} : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} &= \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + h_{ij} N, \\ \frac{\partial (N \circ \phi)}{\partial x_j} &= a_{1j} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{2j} \frac{\partial}{\partial x_2}, \end{aligned} \tag{2}$$

para $i, j = 1, 2$. Em (2), observamos que a componente de $\dfrac{\partial(N \circ \phi)}{\partial x_j}$ na direção $N$ é nula, pois $|N| = 1$. Além disso, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ e $h_{ij} = h_{ji}$, para todos $i, j, k = 1, 2$.

Como $\dfrac{\partial(N \circ \phi)}{\partial x_i} = dN_p\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)$, os termos $a_{ij}$ são justamente as componentes da matriz que representa a transformação linear $dN_p$ na base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right\}$. Segue de $\left\langle N \circ \phi, \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle = 0$, para $i = 1, 2$, que $h_{ij}$ são os coeficientes da segunda forma fundamental de $S$. Falta determinarmos os coeficientes $\Gamma_{ij}^k$, que são chamados de ***símbolos de Christoffel*** da parametrização local $\phi$.

Tomando o produto escalar de $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}$ com $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ e usando a equação (2), obtemos:

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial x_1} \\ \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial x_2}. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial x_2} \\ \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial x_1}. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} E\Gamma_{22}^{1}+F\Gamma_{22}^{2}=\dfrac{\partial F}{\partial x_{2}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial x_{1}} \\ \\ F\Gamma_{22}^{1}+G\Gamma_{22}^{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial x_{2}}. \end{cases} \tag{5}$$

Como $EG - F^2 \neq 0$, os sistemas lineares (3), (4) e (5) têm soluções únicas, que podem ser expressas em termos dos coeficientes da métrica e de suas derivadas. Em particular, os símbolos de Christoffel dependem somente da primeira forma fundamental de $S$ e, portanto, são intrínsecos. Como consequência, qualquer quantidade que possa ser escrita em termos dos símbolos de Christoffel é intrínseca, isto é, depende somente da estrutura métrica da superfície e não da maneira que a superfície está imersa em $\mathbb{R}^3$.

De modo análogo, existem funções $A_{ijk}^l, B_{ijk} : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}=A_{ijk}^{1}\frac{\partial}{\partial x_1}+A_{ijk}^{2}\frac{\partial}{\partial x_2}+B_{ijk}N.$$

Novamente, os termos $A_{ijk}^l$ e $B_{ijk}$ são simétricos com relação aos índices inferiores.

Além disso, diferenciando-se a equação (2) obtemos

$$\begin{aligned} A_{ijk}^{l}&=\frac{\partial\Gamma_{jk}^{l}}{\partial x_i}+\Gamma_{jk}^{1}\Gamma_{i1}^{l}+\Gamma_{jk}^{2}\Gamma_{i2}^{l}+h_{jk}a_{li},\\ B_{ijk}&=\Gamma_{jk}^{1}h_{i1}+\Gamma_{jk}^{2}h_{i2}+\frac{\partial h_{jk}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Visto que $A_{ijk}^l$ são simétricos com relação aos índices inferiores, então $A_{ijk}^l - A_{jik}^l = 0$, donde obtemos, para $i, j, k, l = 1, 2$, as ***equações fundamentais de Gauss***:

$$\frac{\partial\Gamma_{jk}^{l}}{\partial x_i}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^{l}}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{jk}^{m}\Gamma_{im}^{l}-\Gamma_{ik}^{m}\Gamma_{jm}^{l}\right)=-\left(h_{jk}a_{li}-h_{ik}a_{lj}\right). \tag{6}$$

Assim, se escrevermos a equação (6) para $i = l = 1$ e $j = k = 2$ obtemos

$$K=\frac{1}{G}\left(\frac{\partial\Gamma_{22}^{1}}{\partial x_1}-\frac{\partial\Gamma_{12}^{1}}{\partial x_2}+\sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^{m}\Gamma_{1m}^{1}-\Gamma_{12}^{m}\Gamma_{2m}^{1}\right)\right). \tag{7}$$

Por (7), temos que a curvatura Gaussiana é intrínseca como está enunciado a seguir.

**Teorema 2.48** (Teorema Egregium de Gauss)**.** *A curvatura Gaussiana de uma superfície regular é uma propriedade intrínseca, isto é, depende somente da primeira forma fundamental.*

Da simetria dos coeficientes $B_{ijk}$ seguem as ***equações de Mainardi-Codazzi***.

**Definição 2.49.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada com aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$. Uma* **linha de curvatura** *da superfície regular $S$ é uma curva $\alpha$ em $S$ tal que $\alpha'$ é sempre uma direção principal. Uma* **direção assintótica** *em $p \in S$ é um vetor unitário $v \in T_pS$ tal que $II_p(v) = 0$. Uma* **curva assintótica** *de uma superfície regular $S$ é uma curva $\alpha$ em $S$ tal que $\alpha'$ é sempre uma direção assintótica.*

## 2.3 GEODÉSICAS

Nesta seção, estudamos uma propriedade que caracteriza as "retas" de uma superfície $S$. Começamos generalizando para superfícies regulares a caracterização analítica local de segmentos de retas, isto é, curvas com vetor tangente constante.

**Definição 2.50.** *Seja $S$ uma superfície regular. Um* **campo de vetores ao longo de uma curva** *$\alpha : I \to S$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ é uma aplicação $\xi : I \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\xi(t) \in T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$. Mais geralmente, se $\alpha : I \to S$ é uma curva $\mathcal{C}^\infty$ por partes, um* **campo de vetores ao longo de** *$\alpha$ é uma aplicação contínua $\xi : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\xi(t) \in T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$, suave em cada subintervalo de $I$ onde $\alpha$ é suave. O espaço vetorial de vetores ao longo de $\alpha$ será denotado por $\mathcal{T}(\alpha)$.*

Um exemplo típico de campo de vetor ao longo de uma curva é o campo de vetores tangentes $\alpha' : I \to \mathbb{R}^3$ de uma curva $\alpha : I \to S$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

A noção que apresentamos a seguir mede quanto um campo de vetores $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ varia ao longo de uma curva $\alpha : I \to S$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, do ponto de vista da superfície regular $S$.

**Definição 2.51.** *A* **derivada covariante** *de um campo de vetores $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ ao longo de uma curva $\alpha : I \to S$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ em uma superfície regular $S$ é o campo de vetores $D\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ dado por*

$$D\xi(t) = \pi_{\alpha(t)}\left(\frac{d\xi}{dt}(t)\right),$$

*onde $\pi_{\alpha(t)} : \mathbb{R}^3 \to T_{\alpha(t)}S$ é a projeção ortogonal sobre o plano tangente a $S$ em $\alpha(t)$.*

**Observação 2.52.** *A derivada covariante é uma noção intrínseca, isto é, depende somente da primeira forma fundamental de $S$.*

**Definição 2.53.** *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva de classe $\mathcal{C}^\infty$ em uma superfície regular $S$. Um campo de vetores $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ ao longo de $\alpha$ é dito* **paralelo** *se $D\xi = 0$. Mais geralmente, se $\alpha : I \to S$ é uma curva de classe $\mathcal{C}^\infty$ por partes, um campo de vetores $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ é* **paralelo** *se ele for paralelo em cada subintervalo de $I$ no qual $\alpha$ é suave.*

**Proposição 2.54.** *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva de classe $\mathcal{C}^\infty$ por partes em uma superfície regular $S$. Então*

1. *dado $t_0 \in I$ e $v \in T_{\alpha(t_0)}S$, existe um único campo de vetores paralelo $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ tal que $\xi(t_0) = v$;*

2. *se $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{T}(\alpha)$ são campos de vetores paralelos ao longo de $\alpha$, o produto interno $\langle \xi, \tilde{\xi} \rangle_\alpha$ é constante. Em particular, a norma de um campo paralelo é constante.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 5.1.6, p. 250]. □

Agora definiremos as curvas que têm o papel análogo ao das retas no plano, isto é, curvas com campo tangente paralelo.

**Definição 2.55.** *Uma* **geodésica** *em uma superfície regular $S$ é uma curva $\alpha : I \to S$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\alpha' \in \mathcal{T}(\alpha)$ é paralelo, isto é, tal que $D\alpha' = 0$.*

**Observação 2.56.** *Dados um ponto $p \in S$ em uma superfície regular $S$ e um vetor $v \in T_pS$ temos que existe uma única geodésica $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to S$ em uma vizinhança de $p$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.*

**Proposição 2.57.** *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva regular em uma superfície regular $S$. Então $\alpha$ é uma geodésica se, e somente se, $\alpha$ estiver parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco e sua curvatura $\kappa$ coincide com o valor absoluto de sua curvatura normal $|\kappa_n|$.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 5.1.18, p. 257]. □

**Definição 2.58.** *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva regular em uma superfície regular $S$. Um* **campo normal unitário ao longo de** *$\alpha$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^\infty$ $N : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $|N(t)| = 1$ e $N(t) \perp T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$.*

Sejam $\alpha : I \to S$ uma curva regular em uma superfície regular $S$ e $N : I \to \mathbb{R}^3$ um campo normal unitário ao longo de $\alpha$. Se $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ é um campo de vetores unitários ao longo de $\alpha$, diferenciando-se $\langle \xi, \xi \rangle_\alpha = 1$ obtemos que

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \xi, \xi \rangle_\alpha = 2 \langle D\xi, \xi \rangle_\alpha .$$

Consequentemente $D\xi$ é ortogonal a $N$ e a $\xi$; então existe uma função $\lambda : I \to \mathbb{R}$ tal que $D\xi = \lambda N \wedge \xi$. Mais precisamente, como $N \wedge \xi$ é um vetor unitário, temos que $\lambda = \langle D\xi, N \wedge \xi \rangle_\alpha$ e, em particular, $\lambda$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Definição 2.59.** *Sejam $\alpha : I \to S$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco em uma superfície regular $S$ e $N : I \to \mathbb{R}^3$ um campo normal unitário ao longo de $\alpha$. A* **curvatura geodésica** *de $\alpha$ é a função $\kappa_g : I \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\kappa_g = \left\langle D\alpha', N \wedge \alpha' \right\rangle,$$

*de modo que*

$$D\alpha' = \kappa_g (N \wedge \alpha').$$

Nas condições da Definição 2.59 $\alpha'' = \kappa n$ e $\alpha'' = \left(\alpha''\right)^\top + \left(\alpha''\right)^\perp$. Assim,

$$|\alpha''|^2 = \left|\left(\alpha''\right)^\top\right|^2 + \left|\left(\alpha''\right)^\perp\right|^2.$$

donde temos o seguinte resultado.

**Corolário 2.60.** *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada por comprimento de arco em uma superfície regular $S$. Então*

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2.$$

*Em particular, uma curva $\alpha$ parametrizada pelo comprimento de arco é uma geodésica se, e somente se, sua curvatura geodésica é zero em todo ponto.*

Em outras palavras, a curvatura geodésica de uma curva mede o quanto uma curva "deixa" de ser uma geodésica.

Sejam $\alpha : [a, b] \to S$ uma curva regular em uma superfície regular $S$, $N : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ um campo normal unitário ao longo de $\alpha$ e $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{T}(\alpha)$ dois campos de vetores unitários ao longo de $\alpha$. Como $\{\xi_1(t), N(t) \wedge \xi_1(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in [a, b]$, podemos decompor $\xi_2(t)$ na base $\{\xi_1(t), N(t) \wedge \xi_1(t)\}$ como

$$\xi_2(t) = \langle \xi_2(t), \xi_1(t) \rangle \xi_1(t) + \langle \xi_2(t), N(t) \wedge \xi_1(t) \rangle \left(N(t) \wedge \xi_1(t)\right),$$

de modo que $\left(\langle \xi_2(t), \xi_1(t) \rangle\right)^2 + \left(\langle \xi_2(t), N(t) \wedge \xi_1(t) \rangle\right)^2 = |\xi_2(t)|^2 = 1$. Consequentemente, podemos definir uma aplicação contínua $\varphi : [a, b] \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$\varphi(t) = \left(\langle \xi_2(t), \xi_1(t) \rangle, \langle \xi_2(t), N(t) \wedge \xi_1(t) \rangle\right). \tag{8}$$

O levantamento de $\varphi$ é uma aplicação $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que o diagrama da Figura 3 é comutativo, isto é, $\tilde{\pi} \circ \theta = \varphi$, onde $\tilde{\pi} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ é dada por $\tilde{\pi}(x) = (\cos x, \sin x)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\
{[a,b]} \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Figura 3: Levantamento de $\varphi$.

Tomando-se $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\pi}(x_0) = \varphi(a)$, podemos mostrar que existe um único levantamento $\theta$ de $\varphi$ tal que $\theta(a) = x_0$. Esta prova é dada em [AT12, Proposicao 2.1.4, p. 69].

**Definição 2.61.** *Sejam $\alpha : [a,b] \to S$ uma curva parametrizada por comprimento de arco em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, $N : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ um campo normal unitário ao longo de $\alpha$ e $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{T}(\alpha)$ dois campos de vetores unitários ao longo de $\alpha$. Uma* **determinação contínua do ângulo entre $\xi_1$ e $\xi_2$** *é o levantamento $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ da função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{S}^1$ dada por (8).*

Nas condições da Definição 2.61, temos que

$$\xi_2(t) = \cos(\theta(t))\xi_1(t) + \sin(\theta(t))\left(N(t) \wedge \xi_1(t)\right).$$

**Proposição 2.62.** *Sejam $\phi : U \to S$ uma parametrização ortogonal de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ e $\alpha : I \to \phi(U) \subset S$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Escreva $\alpha(t) = \phi(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$; então a curvatura geodésica de $\alpha$ é dada por*

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\alpha_2' \frac{\partial G}{\partial x_1} - \alpha_1' \frac{\partial E}{\partial x_2}\right) + \frac{d\theta}{dt},$$

*onde $\theta : I \to \mathbb{R}$ é uma determinação contínua do ângulo entre $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{\alpha}$ e $\alpha'$.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 5.1.28, p. 260]. □

## 2.4 O TEOREMA DE GAUSS-BONNET E O TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

Nesta seção apresentaremos uma prova para o Teorema de Gauss-Bonnet, um resultado de bastante importância no estudo da geometria diferencial de superfícies. O Teorema de Gauss-Bonnet nos permite relacionar quantidades geométricas de uma superfície com a sua topologia global.

A versão local do Teorema de Gauss-Bonnet se aplica a regiões regulares simples que estão contidas na imagem de uma parametrização ortogonal da superfície, enquanto que para a versão global, subdividimos a superfície em diversas regiões regulares por meio de triangulações.

Nas condições da Definição 2.25, introduzimos a noção de polígonos curvilíneos pequenos.

**Definição 2.63.** *Um polígono curvilíneo* **pequeno** *em uma superfície regular $S$ é um polígono curvilíneo cujo traço está contido na imagem de uma parametrização local.*

Sejam $S$ uma superfície regular e $\alpha : [a,b] \to \phi(U) \subset S$ um polígono curvilíneo pequeno com traço contido na imagem de uma parametrização local $\phi : U \to S$. Consideremos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ uma partição de $[a,b]$ tal que $\alpha|_{[t_j-1,t_j]}$ é regular para $j = 1, \cdots, k$. O ***ângulo externo*** de $\alpha$ em $t_j$ é o ângulo $\varepsilon_j \in [-\pi, \pi]$ de $\alpha'(t_j^-)$ para $\alpha'(t_j^+)$, tomado com sinal positivo se $\left\{\alpha'(t_j^-), \alpha'(t_j^+)\right\}$ for uma base positiva de $T_{\alpha(t_j)}S$, e com sinal negativo, caso contrário.

Nestas condições, estendemos a seguir o conceito de determinação contínua do ângulo para polígonos curvilíneos:

**Definição 2.64.** *Definimos a* **determinação do ângulo do polígono curvilíneo** *$\alpha$ como sendo a função $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $j = 1, \ldots, k$, $\theta : [t_{j-1}, t_j[ \to \mathbb{R}$ é a determinação contínua do ângulo entre $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_\alpha$ e $\alpha'$, com $\theta(t_j) \in ]-\pi, \pi]$, e*

$$\theta(t_j) = \lim_{t \to t_j^-} \theta(t) + \varepsilon_j,$$

*onde $\varepsilon_j$ é o ângulo externo de $\alpha(t_j)$.*

**Definição 2.65.** *Sejam $\alpha : [a, b] \to S$ um polígono curvilíneo pequeno em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ e $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ determinação do ângulo de $\alpha$. O* **índice de rotação** *$\rho(\alpha)$* **do polígono curvilíneo** *$\alpha$ é dado por*

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta(b) - \theta(a)\right).$$

**Proposição 2.66.** *Sejam $\alpha : [a, b] \to S$ um polígono curvilíneo pequeno com traço contido na imagem de uma parametrização local $\phi : U \to S$ de uma superfície regular $S$ e $\alpha_0 = \phi^{-1} \circ \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Então $\rho(\alpha) = \rho(\alpha_0) = \pm 1$.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 6.1.3, p. 305, Proposição 2.4,7, p. 87]. □

**Definição 2.67.** *Um polígono curvilíneo pequeno $\alpha : [a, b] \to S$ em uma superfície regular $S$ é* **orientado positivamente** *(com respeito à parametrização local na qual o traço de $\alpha$ está contido na imagem) se o seu índice de rotação é $+1$. Caso contrário dizemos que $\alpha$ é* **orientado negativamente***.*

**Definição 2.68.** *Uma região regular $R \subset S$ de uma superfície regular $S$ é* **simples** *se ela é homeomorfa a um disco fechado.*

**Teorema 2.69** (Teorema de Gauss-Bonnet, versão local)**.** *Sejam $S$ uma superfície regular, $R \subset S$ uma região simples contida na imagem de uma parametrização ortogonal local $\phi : U \to S$, $\alpha : [a, b] \to S$ uma parametrização por comprimento de arco da fronteira de $R$, positivamente orientada com respeito a $\phi$, com ângulos externos $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in ]-\pi, \pi[$. Além disso, consideremos $N = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}}{\left|\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}\right|}$ o campo normal unitário que determina uma orientação para $\phi(U)$ e $\kappa_g$ a curvatura geodésica de $\alpha$ nos subintervalos de $[a, b]$ onde $\alpha$ é regular. Então*

$$\int_R K d\sigma + \int_a^b \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 2\pi, \tag{9}$$

*onde $K$ é a curvatura Gaussiana de $S$, $d\sigma$ é o elemento de área de $R$ e $ds$ é o elemento de comprimento de $\alpha$.*

*Demonstração.* Consideremos $\alpha = \phi(\alpha_1, \alpha_2)$. Pela Proposição 2.62 temos que para pontos onde $\alpha$ é regular

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\alpha_2' \frac{\partial G}{\partial x_1} - \alpha_1' \frac{\partial E}{\partial x_2}\right) + \frac{d\theta}{dt},$$

onde $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ é a determinação do ângulo de $\alpha$ tal que $\theta(a) \in ]-\pi, \pi]$. Consequentemente, tomando $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ uma partição de $[a,b]$ tal que $\alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$ é regular para $i = 1, \cdots, k$, temos, pelo Teorema de Gauss-Green [Lim15, Teorema de Green, p. 424], que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \kappa_g ds &= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa_g(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \alpha_2' \frac{\partial G}{\partial x_1} - \alpha_1' \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) + \frac{d\theta}{dt} \right) ds \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \alpha_2' \frac{\partial G}{\partial x_1} - \alpha_1' \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) \right) ds + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d\theta}{dt} ds \\
&= \iint_{\phi^{-1}(R)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) \right) \right) dx_1 dx_2 \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} (\theta(t_i) - \theta(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Como a parametrização é ortogonal temos, pelo Teorema Egregium de Gauss 2.48, que

$$\begin{aligned}
\iint_{\phi^{-1}(R)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) \right) \right) dx_1 dx_2 &= \\
= - \iint_{\phi^{-1}(R)} K \sqrt{EG} dx_1 dx_2 & \\
= - \iint_R K d\sigma. & \qquad (11)
\end{aligned}$$

Além disso, como $\alpha$ está orientada positivamente temos, pela Definição 2.65 e Proposição 2.66, que

$$\sum_{i=1}^{k} (\theta(t_i) - \theta(t_{i-1})) = 2\pi\rho(\alpha) = 2\pi, \qquad (12)$$

onde $\rho(\alpha)$ é o índice de rotação de $\alpha$. Portanto, substituindo em (10) as equações (11) e (12), temos

$$\int_a^b \kappa_g ds = - \iint_R K d\sigma + 2\pi - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i.$$

Ou seja,

$$\int_R K d\sigma + \int_a^b \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 2\pi.$$

□

Nosso próximo objetivo é apresentar a versão global do teorema de Gauss-Bonnet, a qual será dada por meio de triangulação de uma região regular.

**Definição 2.70.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Dizemos que $T \subset S$ é um* **triângulo** *em $S$ se $\partial T$ é uma curva simples, fechada e formada por três arcos regulares. Assim, se $\alpha : [a,b] \to S$ é uma parametrização para $\partial T$, existe uma partição $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = b$ de $[a,b]$ tal que $\alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$ é regular para $i = 1,2,3$.*

**Definição 2.71.** *Uma* **triangulação** *de uma superfície regular $S$ é uma família de triângulos $\{T_i\}_{i\in I}$ em $S$ tal que se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, com $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ ou é uma aresta ou é um vértice para $T_i$ e $T_j$.*

**Definição 2.72.** *Se $\{T_i\}_{i=1}^n$ é uma triangulação finita de uma superfície (compacta) $S$, definimos a* **característica de Euler-Poincaré** *de $S$, denotada por $\mathcal{X}(S)$, como sendo o número*

$$\mathcal{X}(S) = V - A + F,$$

*onde $V$, $A$ e $F$ denotam o número de vértices, arestas e faces da triangulação.*

**Observação 2.73.** *$\mathcal{X}(S)$ não depende da triangulação escolhida e toda região regular e compacta de uma superfície admite uma triangulação* [AT12, Capítulo 6.5, p. 338].

**Proposição 2.74.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e conexa. Então*

$$\mathcal{X}(S) = 2 - 2g, \tag{13}$$

*com $g \in \mathbb{N}$. Além disso, se $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular compacta e conexa com $\mathcal{X}(S) = \mathcal{X}(\tilde{S})$ então $\tilde{S}$ é homeomorfa a $S$.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Proposição 6.2.12, p. 313, Proposição 6.2.14, p. 314]. □

**Observação 2.75.** *$g$ denota o gênero da superfície $S$. Por (13), $\mathcal{X}(S) \leq 2$.*

**Teorema 2.76** (Teorema de Gauss-Bonnet, versão global)**.** *Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície regular orientada $S$ com fronteira $\partial R$ orientada positivamente. Consideremos $C_1, \ldots, C_k$ as componentes conexas da fronteira de $R$ parametrizadas, para $j = 1, \ldots, k$, por curvas $\alpha_j : [a_j, b_j] \to S$ com curvaturas geodésicas $\kappa_g^j$. Denotemos por $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ o conjunto dos ângulos externos das curvas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Então*

$$\iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_h = 2\pi \mathcal{X}(R), \tag{14}$$

*onde $K$ é a curvatura Gaussiana de $S$, $d\sigma$ é o elemento de área de $R$ e $ds$ é o elemento de comprimento de $\alpha_j$.*

*Demonstração.* Consideremos uma triangulação $\mathbb{T}$ da região $R$ de modo que cada triângulo $T_j \in \mathbb{T}$ está contido em uma vizinhança coordenada de uma família de parametrizações ortogonais, compatíveis com a orientação de $S$. Além disso, como a fronteira de todo triângulo de $\mathbb{T}$ está orientada positivamente, obtemos orientações opostas nas arestas que são comuns a triângulos adjacentes. Aplicando-se a versão local do Teorema de Gauss-Bonnet 2.69 a cada triangulo de $\mathbb{T}$ e somando-se os resultados, obtemos:

$$\iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} = 2\pi F, \tag{15}$$

onde $\varepsilon_{i1}$, $\varepsilon_{i2}$ e $\varepsilon_{i3}$ são os ângulos externos do triângulo $T_i$ e $F$ é o número de triângulos de $\mathbb{T}$.

Se denotarmos por $\phi_{ij} = \pi - \varepsilon_{ij}$, para $j = 1, 2, 3$, os ângulos internos de um triângulo $T_i$, temos que

$$\sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} = \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \pi - \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \phi_{ij} = 3\pi F - \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \phi_{ij}.$$

Denotemos por $A_e$ o número de arestas externas de $\mathbb{T}$, $A_i$ o número de arestas internas de $\mathbb{T}$, $V_e$ o número de vértices externos de $\mathbb{T}$ e $V_i$ o número de vértices internos de $\mathbb{T}$. Como $C_i$ são fechadas, temos que $A_e = V_e$. Além disso, $3F = 2A_i + A_e$. Para provar este fato basta tomar uma indução no número de faces.

Desta forma, temos que

$$\sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} = 2\pi A_i + \pi A_e - \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \phi_{ij}.$$

Os vértices externos são vértices das curvas $C_i$ ou vértices introduzidos pela triangulação. Temos que $V_e = V_{ec} + V_{et}$, onde $V_{ec}$ denota o número de vértices externos de alguma curva $C_i$ e $V_{et}$ o número de vértices externos que vêm da triangulação que não são vértices de alguma curva $C_i$.

Como a soma dos ângulos ao redor de cada vértice interno é $2\pi$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} &= 2\pi A_i + \pi A_e - \left( 2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{h=1}^{p} (\pi - \varepsilon_h) \right) \\
&= 2\pi A_i + \pi A_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_h \\
&= 2\pi(A_i + A_e) - \pi A_e - 2\pi V_i - \pi(V_{et} + V_{ec}) + \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_h
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi(A_i + A_e) - 2\pi(V_i + V_e) - \pi A_e + \pi V_e + \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_h \\
&= 2\pi A - 2\pi V + \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_h. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Assim, substituindo-se (16) em (14) obtemos que

$$
\iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + 2\pi A - 2\pi V + \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_h = 2\pi F.
$$

Ou seja,

$$
\iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_h = 2\pi \mathcal{X}(R).
$$

$\square$

Para finalizarmos esta seção, estudaremos o Teorema de Poincaré-Hopf como uma aplicação do Teorema de Gauss-Bonnet.

**Definição 2.77.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Um* **campo de vetores (tangentes)** *em $S$ é uma aplicação $X : S \to \mathbb{R}^3$ de classe $C^\infty$ tal que $X(p) \in T_pS$ para todo $p \in S$. Denotaremos por $\mathcal{T}(S)$ o espaço vetorial dos campos tangentes em $S$.*

**Definição 2.78.** *Uma* **curva integral** *(ou* **trajetória***) de um campo de vetores $X \in \mathcal{T}(S)$ em uma superfície regular $S$ é uma curva $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para todo $t \in I$.*

**Definição 2.79.** *Seja $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em uma superfície regular $S$. Um ponto $p \in S$ é* **singular** *(ou um* **zero***) de $X$ se $X(p) = 0$. O conjunto dos pontos singulares de $X$ será denotado por $Sing(X)$. Um ponto não singular será chamado de* **regular***.*

A seguir, apresentamos uma maneira de associar um ponto singular isolado de um campo de vetores a um número inteiro que, em um certo sentido, resume o comportamento qualitativo do campo próximo ao ponto.

Sejam $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em uma superfície regular $S$ e $p \in S$ um ponto singular isolado de $X$, ou seja, sendo $\phi : U \to S$ é uma parametrização local centrada em $p$, então $U$ é homeomorfo a um disco aberto e $\phi(U) \cap Sing(X) \subset \{p\}$, isto é, $\phi(U)$ não contém pontos singulares de $X$ exceto $p$. Fixemos um campo de vetores $Y_0 \in \mathcal{T}(\phi(U))$ que não se anula em nenhum ponto, por exemplo $Y_0 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$. Tomemos $R \subset \phi(U)$ uma região regular simples com $p$ no seu interior e $\alpha : [a, b] \to \partial R \subset \phi(U)$ uma parametrização da fronteira de $R$, orientada positivamente (com respeito a $\phi$).

Denotemos por $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma determinação contínua do ângulo entre $Y_0 \circ \alpha$ e $X \circ \alpha$.

Nestas condições, introduzimos a noção de índice de um campo.

**Definição 2.80.** *O* **índice de** $X$ **em** $p$, *denotado por* $ind_p(X)$, *é dado por*

$$ind_p(X) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta(b) - \theta(a)\right) \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

**Observação 2.81.** *Grosso modo,* $ind_p(X)$ *mede o número de voltas completas que* $X$ *dá ao longo de uma curva cujo traço contenha* $p$ *em seu interior.*

**Proposição 2.82.** *Sejam* $X \in \mathcal{T}(S)$ *um campo de vetores em uma superfície regular* $S$ *e* $p \in S$ *um ponto de* $S$ *que é um ponto singular isolado de* $X$*. Então*

$$ind_p(X) = \begin{cases} +1, & se \ \det(dX_p) > 0, \\ -1, & se \ \det(dX_p) < 0. \end{cases} \tag{18}$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [MR98, Proposição 8.25, p. 291]. □

A proposição a seguir nos dá uma maneira alternativa de calcular o índice de um campo.

**Proposição 2.83.** *Sejam* $X \in \mathcal{T}(S)$ *um campo de vetores em uma superfície regular* $S$, $p \in S$ *uma singularidade isolada de* $X$ *e* $R \subset \phi(U)$ *uma região regular simples que contém* $p$ *em seu interior, contida na imagem de uma parametrização local ortogonal* $\phi : U \to S$ *e tal que* $R \cap Sing(X) \subset \{p\}$*. Sejam também* $\alpha : [a,b] \to \partial R \subset \phi(U)$ *uma parametrização pelo comprimento de arco da fronteira de* $R$*, positivamente orientada com respeito a* $\phi$ *e* $\eta \in \mathcal{T}(\alpha)$ *um campo de vetores paralelos não-nulo ao longo de* $\alpha$*. Então*

$$ind_p(X) = \frac{1}{2\pi}\iint_R K d\sigma - \frac{1}{2\pi}\left(\psi(a) - \psi(b)\right),$$

*onde* $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma determinação contínua do ângulo entre* $X \circ \alpha$ *e* $\eta$*.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [AT12, Teorema 6.4.9, p. 328]. □

**Teorema 2.84** (Teorema de Poincaré-Hopf)**.** *Seja* $X \in \mathcal{T}(S)$ *um campo de vetores cujos pontos singulares são todos isolados em uma superfície regular compacta orientável* $S$*. Então*

$$\sum_{p \in Sing(X)} ind_p(X) = \mathcal{X}(S). \tag{19}$$

*Demonstração.* Consideremos uma triangulação $\mathbb{T}$ da região $S$ de modo que cada triângulo $T_j \in \mathbb{T}$ esteja contido em uma vizinhança coordenada de uma família de parametrizações ortogonais, compatíveis com a orientação de $S$. Além disso, como a fronteira de todo triângulo de $\mathbb{T}$ está orientada positivamente, obtemos orientações opostas nas arestas que são comuns a triângulos adjacentes. Aplicando-se a Proposição 2.83 a cada triangulo de $\mathbb{T}$ e somando-se os resultados, obtemos:

$$\iint_S K d\sigma - 2\pi \sum_{p \in Sing(X)} ind_p(X) = \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij}$$

onde $\varepsilon_{i1}$, $\varepsilon_{i2}$ e $\varepsilon_{i3}$ são os ângulos externos do triângulo $T_i$ e $F$ é o número de triângulos de $\mathbb{T}$.

Mas, levando em conta que a aresta de cada $T_i \in \mathbb{T}$ aparece duas vezes com orientações opostas temos que $\sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} = 0$. Portanto,

$$\sum_{p \in Sing(X)} ind_p(X) = \frac{1}{2\pi} \iint_S K d\sigma. \tag{20}$$

Como, por hipótese, $S$ é uma superfície regular compacta e orientável, isto é, uma região regular sem fronteira, temos, pelo Teorema de Gauss-Bonnet 2.76, que

$$\mathcal{X}(S) = \frac{1}{2\pi} \iint_S K d\sigma. \tag{21}$$

De (20) e (21) obtemos

$$\sum_{p \in Sing(X)} ind_p(X) = \mathcal{X}(S).$$

□

# 3 A FÓRMULA DE GAUSS-BONNET ESTEREOLÓGICA

Nesta seção, apresentamos a versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet (14) para domínios com fronteira não vazia em uma superfície regular.

Para isso, introduzimos o conceito de degenerescência para os pontos singulares de um campo de vetores.

**Definição 3.1.** *Sejam $S$ uma superfície regular, $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em $S$ e $p \in S$ um ponto singular. Dizemos que $p$ é um ponto* **não-degenerado de** *$X$ se* $\det(dX_p) \neq 0$*; caso contrário, ele é dito* **degenerado**.

O próximo resultado nos permite relacionar os pontos críticos de uma função com os pontos singulares do campo gradiente desta função.

**Lema 3.2.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $S$. Então $p \in S$ é um ponto singular não-degenerado de $grad(f)$ se, e somente se, $p$ é um ponto crítico não-degenerado de $f$.*

*Demonstração.* Como $\langle grad(f)(p), v\rangle = df_p(v)$, para todo $v \in T_pS$, temos que $p \in S$ é um ponto singular de $grad(f)$ se, e somente se, $p$ é um ponto crítico de $f$. Suponhamos que $p$ seja um ponto singular de $grad(f)$. Sejam $v \in T_pS$ um vetor arbitrário e $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Temos que

$$\langle grad(f)(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle = df_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t), \tag{22}$$

para $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$. Tomando a derivada em $t = 0$ em (22) e tendo que $grad(f)(p) = 0$, então

$$\begin{aligned} Hess_p(f)(v) &= \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) \\ &= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} grad(f)(\alpha(t)), v \right\rangle + \langle grad(f)(p), \alpha''(0)\rangle \\ &= \langle d(grad(f))_p, v\rangle, \end{aligned} \tag{23}$$

em cada ponto singular $p$ de $grad(f)$ e para cada $v \in T_pS$. Portanto, a diferencial $d(grad(f))_p$ é regular, isto é, $\det(d(grad(f))_p) \neq 0$, se, e somente se, $Hess_p f$ é não-degenerada.

Consequentemente, $p \in S$ é um ponto singular não-degenerado de $grad(f)$ se, e somente se, $p$ é um ponto crítico não-degenerado de $f$. $\square$

**Lema 3.3.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $S$. Se $p \in S$ é um ponto singular não-degenerado de $grad(f)$ então $p$ é um ponto singular isolado.*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.2 temos que $p \in S$ é um ponto singular não-degenerado de $grad(f)$ se, e somente se, $p$ é um ponto crítico não-degenerado de $f$. Seja $\phi : U \to S$ uma parametrização local em $p$ tal que $p = \phi(q)$ e $q = (a, b) \in U$. Tomando-se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos assumir que $\alpha(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset \phi(U)$. Se representarmos a composta $\phi^{-1} \circ \alpha$ por $\beta$ e escrevermos $\beta$ explicitamente em componentes $\beta(t) = (x_1(t), x_2(t))$, então temos que

$$(f \circ \alpha)(t) = (f \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \alpha)(t) = (f \circ \phi)(x_1(t), x_2(t)).$$

Logo,

$$(f \circ \alpha)'(t) = \frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \phi)(x_1(t), x_2(t))x_1'(t) + \frac{\partial}{\partial x_2}(f \circ \phi)(x_1(t), x_2(t))x_2'(t)$$

e

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)''(0) = {} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}(f \circ \phi)(a, b)x_1'(0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(f \circ \phi)(a, b)x_1'(0)x_2'(0) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}(f \circ \phi)(a, b)x_2'(0)^2 + \frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \phi)(a, b)x_1''(0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(f \circ \phi)(a, b)x_2''(0).\end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \phi)(a, b) = d(f \circ \phi)_{(a,b)}(1, 0) = df_p(d\phi_{(a,b)}(1, 0)) = 0,$$

pois $p$ é um ponto crítico de $f$. Analogamente, $\frac{\partial}{\partial x_2}(f \circ \phi)(a, b) = 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}Hess_p f(v) = (f \circ \alpha)''(0) = {} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}(f \circ \phi)(a, b)x_1'(0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(f \circ \phi)(a, b)x_1'(0)x_2'(0) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}(f \circ \phi)(a, b)x_2'(0)^2.\end{aligned} \tag{24}$$

Logo, da equação (24), temos que se $p$ é um ponto crítico não-degenerado de $f$ então $p$ é um ponto crítico não-degenerado de $(f \circ \phi) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Por [Lim15, Teorema 4, p. 156] temos que $p$ é isolado. $\square$

**Lema 3.4.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty$ em $S$ e $p \in S$ um ponto singular não-degenerado de $grad(f)$. São equivalentes:*

1. *A hessiana $Hess_p f$ de $f$ em $p$ é positiva ou negativa definida;*
2. *$ind_p(grad(f)) = +1$;*
3. *$p$ é um ponto de máximo ou mínimo local de $f$.*

*Demonstração.* (1) $\iff$ (3): ($\Longleftarrow$): Suponhamos que $p$ seja um ponto de máximo (resp., mínimo) local de $f$ e consideremos $v \in T_pS$ um vetor arbitrário e $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então a função $f \circ \alpha$ tem um máximo (resp., mínimo) local em $0$ e, consequentemente, $Hess_p f(v) = (f \circ \alpha)''(0) \leq 0$ (resp., $Hess_p f(v) = (f \circ \alpha)''(0) \geq 0$), isto é, $Hess_p f$ é negativa (resp., positiva) definida.

($\Longrightarrow$): Seja $\phi : U \to S$ uma parametrização local em $p$ tal que $p = \phi(q)$ e $q = (a, b) \in U$. Tomando-se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos assumir que $\alpha(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset \phi(U)$. Seja $\beta(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\phi^{-1} \circ \alpha)(t)$.

Logo, da equação (24), temos que se $Hess_p f$ é negativa (resp., positiva) definida no ponto crítico $p$, então $q = (a, b)$ é um ponto crítico de $f \circ \phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e a hessiana de $f \circ \phi$ no ponto $q$ é negativa (resp., positiva) definida. Por [Lim15, Teorema 5, p. 157] temos que se a hessiana de $f \circ \phi$ no ponto $q$ é negativa (resp., positiva) definida em $p$ então $p$ é um ponto de máximo (resp., mínimo) local.

(1) $\iff$ (2): Pela equação (23) e pela Proposição 2.82 temos que

$$ind_p(grad(f)) = \begin{cases} +1, \textit{se} \det Hess_p f > 0, \\ -1, \textit{se} \det Hess_p f < 0. \end{cases} \tag{25}$$

($\Longrightarrow$): Suponha que a hessiana $Hess_p f$ em $p$ é positiva ou negativa definida. Então $\det Hess_p f > 0$ e, pela equação (25), temos que $ind_p(grad(f)) = +1$.

($\Longleftarrow$): Suponha que $ind_p(grad(f)) = +1$ então, pela equação (25), temos que $\det Hess_p f > 0$, isto é, a hessiana $Hess_p f$ em $p$ é positiva ou negativa definida. □

**Lema 3.5.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $f : S \to \mathbb{R}$ função de classe $C^\infty$ em $S$ e $p \in S$ um ponto singular não-degenerado de $grad(f)$. São equivalentes:*

1. *A hessiana $Hess_p f$ de $f$ em $p$ é indefinida;*
2. *$ind_p(grad(f)) = -1$;*

3. *$p$ é um ponto de sela de $f$.*

*Demonstração.* (1) $\iff$ (3): ($\Longleftarrow$): Suponhamos que $p$ seja um ponto de sela de $f$ e consideremos $v \in T_pS$ um vetor arbitrário e $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então a função $f \circ \alpha$ tem uma inflexão em 0 e, consequentemente, s.p.g., $Hess_p f(\alpha'(-\delta)) = (f \circ \alpha)''(-\delta) < 0$ e $Hess_p f(\alpha'(+\delta)) = (f \circ \alpha)''(+\delta) > 0$, para $0 < \delta < \varepsilon$, isto é, $Hess_p f$ é indefinida.

( $\Longrightarrow$ ): Seja $\phi : U \to S$ uma parametrização local em $p$ tal que $p = \phi(q)$ e $q = (a, b) \in U$. Tomando-se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos assumir que $\alpha(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset \phi(U)$. Seja $\beta(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\phi^{-1} \circ \alpha)(t)$.

Logo, da equação (24), temos que se $Hess_p f$ é indefinida no ponto crítico $p$, então $q = (a, b)$ é um ponto crítico de $f \circ \phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e a hessiana de $f \circ \phi$ no ponto $q$ é indefinida. Por [Lim15, Teorema 5, p. 157] temos que se a hessiana de $f \circ \phi$ no ponto $q$ é indefinida em $p$ então $p$ é um ponto de sela.

(1) $\iff$ (2): ( $\Longrightarrow$ ): Suponha que a hessiana $Hess_p f$ em $p$ é indefinida. Então $\det Hess_p f < 0$ e, pela equação (25), temos que $ind_p(grad(f)) = -1$.

($\Longleftarrow$): Suponha que $ind_p(grad(f)) = -1$ então, pela equação (25), temos que $\det Hess_p f < 0$, isto é, a hessiana $Hess_p f$ em $p$ é indefinida. □

A seguir, apresentamos uma versão do Teorema de Poincaré-Hopf 2.84 para funções de Morse, que agora definimos.

**Definição 3.6.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty$ em $S$. Chamaremos a função $f$ de* **função de Morse** *se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.*

O índice de uma função no ponto crítico será definido a seguir.

**Definição 3.7.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de Morse e $p \in S$ um ponto crítico de $f$. Definimos o* **índice de $f$ em $p$** *por:*

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é ponto de extremo local,} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ponto de sela.} \end{cases}$$

**Teorema 3.8** (Teorema de Poincaré-Hopf para funções de Morse)**.** *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta orientável e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então*

$$\sum_{p \in Crit(f)} ind_p(f) = \mathcal{X}(S), \tag{26}$$

*onde $Crit(f)$ é o conjunto dos pontos críticos de $f$.*

*Demonstração.* Como $f$ é uma função de Morse, temos, pelo Lema 3.2, que todo ponto singular de $grad(f)$ é não-degenerado. Mas, pelo Lema 3.3, temos que todo ponto singular de $grad(f)$ é isolado. Desta maneira, pelo Teorema de Poincaré-Hopf 2.84, segue-se que

$$\sum_{p \in Sing(grad(f))} ind_p(grad(f)) = \mathcal{X}(S).$$

Mas, $Crit(f) = Sing(grad(f))$ e se $p \in Crit(f)$ for um ponto de extremo local então, pelo Lema 3.4, $ind_p(f) = +1 = ind_p(grad(f))$, enquanto que se $p \in Crit(f)$ for um ponto de sela então, pelo Lema 3.5, $ind_p(f) = -1 = ind_p(grad(f))$, isto é, para todo $p \in Crit(f)$ temos que $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Portanto,

$$\sum_{p \in Crit(f)} ind_p(f) = \sum_{p \in Sing(grad(f))} ind_p(grad(f)) = \mathcal{X}(S).$$

□

O Teorema de Poincaré-Hopf 2.84 foi generalizado para superfícies regulares com fronteira não vazia por Morse [Mor29, Teorema $A_0$, p. 170]. Antes de apresentarmos uma versão deste resultado, estendemos a Definição 2.80 de índice de um campo de vetores para domínios com fronteira não vazia.

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientável e $D \subset S$ um domínio em $S$ com fronteira não vazia, isto é, um subconjunto aberto de $S$, conexo e com fecho compacto. Consideremos $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em $D$ tal que:

1. $X$ tem singularidades isoladas em $D$;

2. $X$ não tem singularidades em $\partial D$;

3. $X$ é ortogonal a $\partial D$ somente em um número finito de pontos.

Se $p \in D$ é uma singularidade isolada de $X$, o índice de $X$ em $p$ é dado pela equação (17).

Se $p \in \partial D$ é um ponto de $\partial D$ onde $X$ é ortogonal a $\partial D$, consideramos $Y \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores tangentes a $S$ tal que, para todo $q \in S$, $\langle X(q), Y(q) \rangle = 0$ e a base $\{Y(q), X(q)\}$ de $T_qS$ é positiva. Notamos que a curva integral de $Y$ em $p$ está localmente contida em $S \setminus D$ ou em $D$. Desta maneira, definimos o índice de $X$ em $p$ por

$$ind_p(X) = \begin{cases} +1, & \text{se a curva integral de } Y \text{ está contida em } S \setminus D, \\ -1, & \text{se a curva integral de } Y \text{ está contida em } D. \end{cases}$$

Nas Figuras 4 e 5 a região hachurada representa o domínio $D$, a região não hachurada representa $S \setminus D$, as setas verticais para cima (em vermelho) representam o campo $X$, enquanto que as setas horizontais para direita (em verde) representam o campo $Y$. A curva $\alpha$ destacada nessas figuras é a curva integral de $Y$ em $p$.

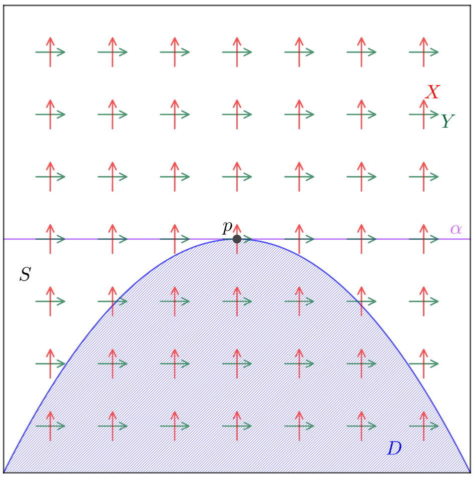


Figura 4: $ind_p(X) = +1$.

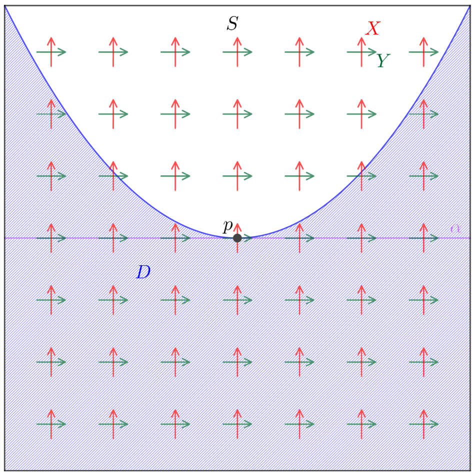


Figura 5: $ind_p(X) = -1$.

**Teorema 3.9** (Teorema de Poincaré-Hopf generalizado). *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S$ e $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em $D$ tal que $X$ tem singularidades isoladas em $D$, não tem singularidades em $\partial D$ e é ortogonal a $\partial D$ somente em um número finito de pontos. Então*

$$\sum_{p \in Sing(X)} ind_p(X) + (1/2) \sum_{X(p) \perp T_p \partial D} ind_p(X) = \mathcal{X}(D). \tag{27}$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [Mor29, Teorema $A_0$, p. 170] ou em [Jub09, Teorema 12, p. 5]. □

Nosso próximo objetivo é adaptar o Teorema de Poincaré-Hopf generalizado 3.9 para funções de Morse.

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que:

1. $f$ é uma função de Morse em $D$;
2. $f$ não tem pontos críticos em $\partial D$;
3. A restrição $f|_{\partial D} \colon \partial D \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse.

Se $p \in D$ é um ponto crítico de $f$, o índice de $X$ em $p$ é dado pela Definição 3.7.

Se $p \in \partial D$ é um ponto crítico de $f|_{\partial D}$ então o conjunto de nível $f^{-1}(f(p))$ está localmente contido ou em $S \setminus D$ ou em $D$, pois $f$ não tem pontos críticos na fronteira. Desta maneira, definimos o índice de $f$ em $p$ por

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } f^{-1}(f(p)) \text{ está localmente contido ou em } S \setminus D, \\ -1, & \text{se } f^{-1}(f(p)) \text{ está localmente contido ou em } D. \end{cases}$$

Os pontos $p \in \partial D$ para os quais $f^{-1}(f(p))$ está localmente contido em $S \setminus D$ são chamados de pontos do tipo "ilha", enquanto que $p \in \partial D$ para os quais $f^{-1}(f(p))$ está localmente contido ou em $D$ são do tipo "ponte". As Figuras 6 e 7 ilustram os pontos do tipo "ilha" e do tipo "ponte", respectivamente.

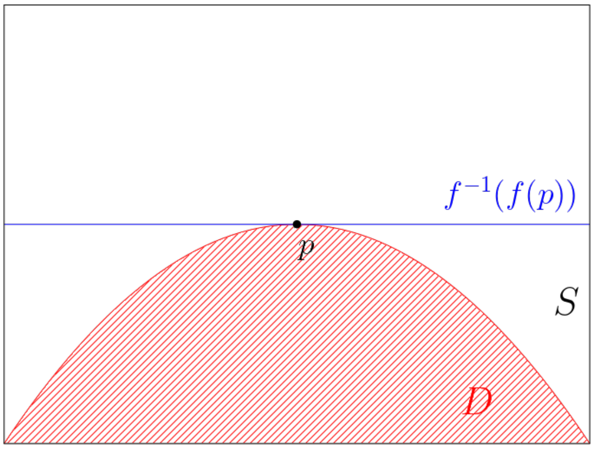


Figura 6: "Ilha"

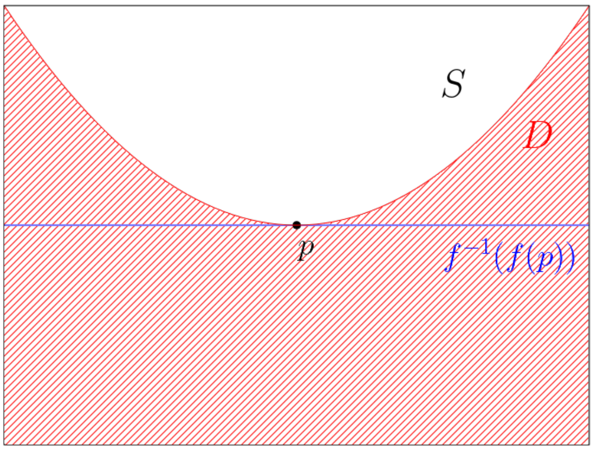


Figura 7: "Ponte"

**Lema 3.10.** *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S$, $p \in \partial D$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que a restrição $f|_{\partial D}: \partial D \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse. Então valem as seguintes afirmações:*

1. *$Crit(f|_{\partial D}) = \{p \in \partial D : grad(f)(p) \perp T_p\partial D\}$;*
2. *$grad(f)$ é ortogonal a $\partial D$ somente em um número finito de pontos;*
3. *$ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.*

*Demonstração.* (1): Note que $p \in \partial D$ é um ponto crítico de $f|_{\partial D}$ se, e somente se, $\langle grad(f)(p), v\rangle = 0$, para todo $v \in T_p\partial D$, isto é, $p \in \partial D$ é um ponto crítico de $f|_{\partial D}$ se, e somente se, $grad(f)(p) \perp T_p\partial D$.

(2): Como $f|_{\partial D}$ é uma função de Morse e $D$ é um domínio temos que $f|_{\partial D}$ tem uma quantidade finita de pontos críticos. Logo, pelo item 1, temos o desejado.

(3): Consideremos $Y \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores tangentes a $S$ tal que, para todo $q \in S$, $\langle grad(f)(q), Y(q)\rangle = 0$ e a base $\{Y(q), grad(f)(q)\}$ de $T_qS$ é positiva. Pela Proposição 2.14 temos que $grad(f)$ é ortogonal a $f^{-1}(f(p))$. Logo, o traço da curva integral de $Y$ é localmente dado por $f^{-1}(f(p))$. Portanto, se a curva integral de $Y$, numa vizinhança de $p$, está contida em $S \setminus D$ (resp., $D$) então $f^{-1}(f(p))$ está localmente contido em $S \setminus D$ (resp., $D$), donde temos que $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$. □

**Teorema 3.11** (Teorema de Poincaré-Hopf generalizado para funções de Morse)**.** *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f$ é uma função de Morse em $D$, $f$ não tem pontos críticos em $\partial D$ e a restrição $f|_{\partial D}\colon \partial D \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse. Então*

$$\sum_{p\in Crit(f)} ind_p(f) + (1/2) \sum_{p\in Crit(f|_{\partial D})} ind_p(f) = \mathcal{X}(D). \tag{28}$$

*Demonstração.* Como $f$ é uma função de Morse, temos, pelo Lema 3.2, que todo ponto singular de $grad(f)$ em $D$ é não-degenerado. Mas, pelo Lema 3.3, temos que todo ponto singular de $grad(f)$ é isolado em $D$. Pelo item 2 do Lema 3.10, temos que $grad(f)$ é ortogonal a $\partial D$ somente em um número finito de pontos. Além disso, por hipótese, $f$ não tem pontos críticos em $\partial D$ e, portanto, $grad(f)$ não tem pontos singulares em $\partial D$.

Desta maneira, temos que $grad(f)$ tem singularidades isoladas em $D$, não tem singularidades em $\partial D$ e é ortogonal a $\partial D$ somente em um número finito de pontos e, portanto, pelo Teorema de Poincaré-Hopf generalizado 3.9, segue-se que

$$\sum_{p\in Sing(grad(f))} ind_p(grad(f)) + (1/2) \sum_{grad(f)(p)\perp T_p\partial D} ind_p(grad(f)) = \mathcal{X}(D). \tag{29}$$

Para $p \in D$, $Crit(f) = Sing(grad(f))$ e se $p \in Crit(f)$ for um ponto de extremo local então, pelo Lema 3.4, $ind_p(f) = +1 = ind_p(grad(f))$, enquanto que se $p \in Crit(f)$ for um ponto de sela então, pelo Lema 3.5, $ind_p(f) = -1 = ind_p(grad(f))$, isto é, para todo $p \in Crit(f)$ temos que $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Para $p \in \partial D$, pelo item 1 do Lema 3.10, temos que $Crit(f|_{\partial D}) = \{p \in \partial D : grad(f)(p) \perp T_p\partial D\}$. Além disso, pelo item 3 do Lema 3.10, temos que $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

$$\sum_{p\in Crit(f)} ind_p(f) = \sum_{p\in Sing(grad(f))} ind_p(grad(f)). \tag{30}$$

$$\sum_{p \in Crit(f|_{\partial D})} ind_p(f) = \sum_{grad(f)(p) \perp T_p \partial D} ind_p(grad(f)). \tag{31}$$

Por (29), (30) e (31) temos que

$$\sum_{p \in Crit(f)} ind_p(f) + (1/2) \sum_{p \in Crit(f|_{\partial D})} ind_p(f) = \mathcal{X}(D).$$

□

De agora em diante, nossa atenção estará voltada para a função altura, que é uma função de Morse.

Seja $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável $S$ em $\mathbb{R}^3$. Fixado $u \in \mathbb{S}^2$ arbitrário, consideremos a ***função altura*** $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $h_u(p) = \langle p, u \rangle$. Pelo Teorema da transversalidade [AT12, Teorema 4.7.6, p, 232], quando restringimos a função altura $h_u$ a $D$ (ou $S$), a intersecção $\pi_{u,\lambda} \cap D$ (resp., $\pi_{u,\lambda} \cap S$) é uma curva plana, onde $\pi_{u,\lambda}$ é o plano $h_u^{-1}(\lambda)$, para todo $\lambda \geq 0$. Em particular, pelo Teorema da função implícita [Lim15, Teorema global da função implícita, p. 169], se $\lambda$ é um valor regular de $h_u|_D$ (e, consequentemente, de $h_u|_S$), temos que $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é uma curva suave em $S$.

Daremos uma interpretação geométrica para os pontos críticos de $h_u|_D$ e $h_u|_{\partial D}$ e os índices correspondentes. Seja $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável $S$ em $\mathbb{R}^3$. Dado $p \in D$, denotaremos por $N(p)$ o vetor normal unitário de $D$ em $p$ e $K(p)$ a curvatura Gaussiana de $D$ em $q$. Dado $q \in \partial D$, denotaremos por $n(q)$ o vetor conormal unitário de $\partial D$ em $q$ e $\kappa_g(q)$ a curvatura geodésica de $\partial D$ em $D$ no ponto $q$. Por fim, denotaremos por $\kappa_g^u(p)$ a curvatura geodésica da curva $\pi_{u,\lambda} \cap S$ no ponto $p$. Nestas condições, temos o seguinte resultado.

**Teorema 3.12.** *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável $S$ em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de $u$ em $T_pD$, para $p \in D$.*

1. *$p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda}$ é tangente a $D$ em $p$ se, e somente se, $u = \pm N(p)$.*

2. *$p \in D$ é um ponto crítico não-degenerado de $h_u|_D$ se, e somente se, $K(p) \neq 0$. Além disso, $p$ é um extremo local de $h_u|_D$ quando $K(p) > 0$ e um ponto de sela quando $K(p) < 0$.*

3. *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ então $p$ é um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é tangente a $\partial D$ em $p$ se, e somente se, $\tilde{u} = \pm n(p)$.*

4. *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ e um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ então $p \in \partial D$ é não degenerado se, e somente se, $\kappa_g(p) \neq \kappa_g^u(p)$. Além disso, $p$ é uma ilha quando $\kappa_g(p) > \kappa_g^u(p)$ e uma ponte quando $\kappa_g(p) < \kappa_g^u(p)$.*

*Demonstração.* (1): Seja $v \in T_pD$ um vetor unitário arbitrário e consideremos $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to D \subset S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $D$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Assim,

$$d\left(h_u|_D\right)_p(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h_u|_D(\alpha(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \alpha(t), u\rangle = \langle \alpha'(0), u\rangle = \langle v, u\rangle. \tag{32}$$

Por (32), temos que $p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $\langle v, u\rangle = 0$, para todo $v \in T_pD$, isto é, $u$ é perpendicular a $T_pD$. Portanto, temos que $p$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $u = \pm N(p)$.

Seja $w \in T_p\pi_{u,\lambda}$ um vetor unitário arbitrário e consideremos $\beta : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to \pi_{u,\lambda}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $\pi_{u,\lambda}$ tal que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = w$. Note que $h_u|_D(\beta(t)) = \langle \beta(t), u\rangle = \lambda$, para todo $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$, então $\langle \beta'(t), u\rangle = 0$, isto é, $u = \pm N_{\pi_{u,\lambda}}(p)$, onde $N_{\pi_{u,\lambda}}(p)$ é o vetor normal unitário a $\pi_{u,\lambda}$ em $p$.

Portanto, temos que $u = \pm N(p)$ se, e somente se, $N(p) = \pm N_{\pi_{u,\lambda}}(p)$, isto é, $\pi_{u,\lambda}$ é tangente a $D$ em $p$.

(2): Afirmamos que $Hess_p\left(h_u|_D\right)(v) = II_p(v)$.

De fato, seja $v \in T_pD$ um vetor unitário arbitrário e consideremos $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to D \subset S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $D$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Assim,

$$Hess_p\left(h_u|_D\right)(v) = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} h_u|_D(\alpha(t)) = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \langle \alpha(t), u\rangle = \langle \alpha''(0), u\rangle. \tag{33}$$

Mas, $\langle \alpha'(t), N(\alpha(t))\rangle = 0$, para todo $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$. Logo,

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \alpha'(t), N(\alpha(t))\rangle = \langle \alpha''(0), N(p)\rangle + \left\langle \alpha'(0), \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} N(\alpha(t)) \right\rangle \tag{34}$$

Como $p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ temos, pelo item (1), que $u = \pm N(p)$. Sem perda de generalidade, tomemos $u = N(p)$. Por (34), temos que

$$\langle \alpha''(0), u\rangle = -\langle dN_p(v), v\rangle. \tag{35}$$

Substituindo (35) em (33), obtemos

$$Hess_p\left(h_u|_D\right)(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle = II_p(v).$$

Consideremos agora $\{v_1, v_2\}$ um referencial ortonormal principal em $p$ com curvaturas principais $\kappa_1, \kappa_2$. Matricialmente obtemos:

$$Hess_p\left(h_u|_D\right)(v) = v \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix} v^T. \tag{36}$$

Por (36), $p \in D$ é um ponto crítico não-degenerado de $h|_D$ se, e somente se, $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$, isto é, $K(p) \neq 0$.

Além disso, se $K(p) > 0$ então $\kappa_1\kappa_2 > 0$. Logo, por (36), a hessiana $Hess_p\left(h_u|_D\right)$ é positiva ou negativa definida e, portanto, pelo Lema 3.4, temos que $p$ é um ponto de extremo local de $f$.

Analogamente, se $K(p) < 0$ então $\kappa_1\kappa_2 < 0$. Logo, por (36), a hessiana $Hess_p\left(h_u|_D\right)$ é indefinida e, portanto, pelo Lema 3.5, temos que $p$ é um ponto de sela de $f$.

(3): Consideremos $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma parametrização pelo comprimento de arco de $\partial D$ tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$. Como $\{N(p), \alpha'(t_0), n(p)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$u = \langle u, N(p)\rangle N(p) + \langle u, \alpha'(t_0)\rangle \alpha'(t_0) + \langle u, n(p)\rangle n(p).$$

Em particular, como $p$ é um ponto regular de $h_u|_D$ temos, pelo item 1, que $u \neq \pm N(p)$, donde segue-se que $\tilde{u} = \dfrac{v}{|v|}$, onde

$$v = \langle u, \alpha'(t_0)\rangle \alpha'(t_0) + \langle u, n(p)\rangle n(p).$$

Então, $\tilde{u} = \pm n(p)$ se, e somente se, $\langle u, \alpha'(t_0)\rangle = 0$ (isto é, $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é tangente a $\partial D$ em $p$) se, e somente se, $p \in \partial D$ é um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$.

(4): Consideremos $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma parametrização pelo comprimento de arco de $\partial D$ tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$. Seja $\beta : I \to \pi_{u,\lambda} \cap S \subset S$ uma parametrização pelo comprimento de arco de $\pi_{u,\lambda} \cap S$ tal que $\beta(s_0) = p$. Neste caso, $\langle u, \beta(s)\rangle = \lambda$, para todo $s \in I$, então $\langle u, \beta'(s)\rangle = 0$. Disto temos que $\tilde{u}$ é também igual ao vetor normal a $\beta'(s_0)$ em $T_p\partial D$. Em particular, como $p$ é um ponto regular de $h_u|_D$ e um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$, pelo item 3, $\tilde{u} = \pm n(p)$ e, consequentemente, as curvas $\alpha$ e $\beta$ são tangentes em $p$.

Como $\alpha$ é parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$\alpha''(t_0) = \kappa_n(p)N(p) + \kappa_g(p)n(p),$$

donde segue-se que

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \kappa_n(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g(p)\langle u, n(p)\rangle. \tag{37}$$

Como $\beta$ é parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$\beta''(s_0) = \kappa_n^u(p)N(p) + \kappa_g^u(p)n(p),$$

onde $\kappa_n^u(p)$ é a curvatura normal da curva $\pi_{u,\lambda} \cap S$ no ponto $p$, donde concluímos que

$$0 = \langle u, \beta''(s_0)\rangle = \kappa_n^u(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g^u(p)\langle u, n(p)\rangle. \tag{38}$$

Como as curvas $\alpha$ e $\beta$ são tangentes em $p$, pelo Teorema de Meusnier 2.41, temos que $\kappa_n^u(p) = \kappa_n(p)$. Logo, subtraindo (37) de (38), obtemos

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \left(\kappa_g(p) - \kappa_g^u(p)\right)\langle u, n(p)\rangle.$$

Como $p$ é um ponto regular de $h_u|_D$ temos que $\langle u, n(p)\rangle \neq 0$, donde segue que $p$ é um ponto crítico não degenerado de $h_u|_{\partial D}$ se, e somente se, $\kappa_g(p) \neq \kappa_g^u(p)$. Pela orientação dada a $\partial D$ temos que $p$ é um ponto crítico do tipo ilha quando $\kappa_g(p) > \kappa_g^u(p)$ e do tipo ponte quando $\kappa_g(p) < \kappa_g^u(p)$. □

O Corolário 3.13 pode ser visto como uma versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet (14).

**Corolário 3.13** (Uma versão estereológica para a fórmula de Gauss-Bonnet)**.** *Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S$ e $u \in \mathbb{S}^2$ um vetor arbitrário. Então a função altura $h_u|_D$ é uma função de Morse, não tem pontos críticos em $\partial D$ e a restrição $h_u|_{\partial D}$ é também uma função de Morse. Em particular temos que*

$$\mathcal{X}(D) = \sum_{p\in D:N(p)=\pm u} sign\left(K(p)\right) + (1/2)\sum_{q\in\partial D:n(q)=\pm\tilde{u}} sign\left(\kappa_g(q) - \kappa_g^u(q)\right), \tag{39}$$

*onde $sign(\cdot)$ é a função sinal e $\tilde{u}$ denota a projeção ortogonal normalizada de $u$ em $T_pD$, para $p \in D$.*

*Demonstração.* Seja $p \in D$ um ponto arbitrário. Notemos que a função altura $h_u|_D(p) = \langle p, u\rangle$ pode ser expressa da seguinte maneira:

$$h_u|_D(p) = \frac{|p|^2 - |p-u|^2 + |u|^2}{2}. \tag{40}$$

De fato,

$$|p-u|^2 = \langle p-u, p-u\rangle = \langle p, p\rangle - 2\langle p, u\rangle + \langle u, u\rangle.$$

Para $p \in \partial D$ um ponto arbitrário, a função $h_u|_{\partial D}$ também é expressa por (40).

Por [Mil63, Teorema 6.6, p.36], temos que para quase todo $p \in \mathbb{R}^3$ a função $L_p : S \to \mathbb{R}$, dada por $L_p(q) = |p - q|^2$, não tem pontos críticos degenerados. Como

$$h_u|_D = \frac{L_0(p) - L_u(p) + L_0(u)}{2},$$

então $h_u|_D$ é função de Morse para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$. Analogamente, $h_u|_{\partial D}$ é função de Morse para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$.

Sejam $p \in \partial D$, $v \in T_pS$ arbitrários, $N : S \to \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss de $S$ e $\alpha : I \to D \subset S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $D$ tal que $\alpha(s_0) = p$ e $\alpha'(s_0) = v$. Como

$$d(h_u|_D)_p(v) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=s_0} h_u|_D(\alpha(s)) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=s_0} \langle \alpha(s), u\rangle = \langle \alpha'(s_0), u\rangle = \langle v, u\rangle, \qquad (41)$$

segue-se que $p \in \partial D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $u = \pm N(p)$, pois (41) vale para todo $v \in T_pS$.

Para $p \in \partial D$, temos que $u = \pm N(p)$ se, e somente se, $\langle u, N(\beta(t))\rangle = \pm 1$, onde $\beta : I' \to \partial D \subset S$ é uma parametrização pelo comprimento de arco de $\partial D$ tal que $\beta(t_0) = p$. Mas, $\langle u, N(\beta(t))\rangle = \pm 1$ se, e somente se,

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \langle u, N(\beta(t))\rangle = \langle u, dN_p(w)\rangle,$$

onde $w = \beta'(t_0)$. Como $u$ é arbitrário, segue-se que $dN_p(w) = 0$ para todo $w \in T_p\partial D$, ou seja, $\langle u, N(\beta(t))\rangle = \pm 1$ se, e somente se, $u$ é valor crítico de $N$.

Portanto, $p$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $u$ é valor crítico de $N$. Ou seja, $h_u|_D$ não tem pontos críticos em $\partial D$ se, e somente se, $u$ é valor regular de $N$. Assim, pelo Teorema de Sard [Lim15, Teorema de Sard, p. 359], $h_u|_D$ não tem pontos críticos em $\partial D$ para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$.

A fórmula (39) para $\mathcal{X}(D)$ é uma consequência direta do Teorema de Poincaré-Hopf generalizado para funções de Morse 3.11 e do Teorema 3.12. □

**Observação 3.14.** *Uma outra maneira de demonstrar que $h_u|_D$ e $h_u|_{\partial D}$ são funções de Morse para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$ é a seguinte. Notemos que $h_u|_D$ é uma função de Morse se, e somente se, $u$ é um valor regular da aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ de $S$. Assim, pelo Teorema de Sard* [Lim15, Teorema de Sard, p. 359], *$h_u|_D$ é uma função de Morse para quase todo $u \in \mathbb{S}^2$. Para a função $h_u|_{\partial D}$ é análoga a abordagem.*

## 3.1 APLICAÇÕES

A seguir, olharemos para alguns casos particulares do Corolário 3.13. Primeiramente, tomamos $S = \mathbb{R}^2$ e $h_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, para $u \in \mathbb{S}^1$, a função altura. As curvas de nível neste caso são retas ortogonais a $u$, as quais tem curvatura nula. Além disso, $h_u$ não tem pontos críticos em $\mathbb{R}^2$ e a curvatura geodésica é igual à curvatura de uma curva plana. Neste caso, obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 3.15.** *Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira e $u \in \mathbb{S}^1$ um vetor arbitrário. Então a restrição da função altura $h_u|_{\partial D}$ é uma função de Morse e*

$$\mathcal{X}(D) = (1/2) \sum_{p \in \partial D : n(p) = \pm\tilde{u}} sign\,(\kappa(p))\,,$$

*onde $sign(\cdot)$ é a função sinal e $\tilde{u}$ denota a projeção ortogonal normalizada de $u$ em $T_pD$, para $p \in D$.*

No caso em que $S = \mathbb{S}^2$, temos que as curvas de nível associadas à função altura $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são os paralelos; assim, denotando por $\theta_u$, $\gamma_u$ as coordenadas esféricas relativas a $u$, como ilustra a Figura 8, temos que a curvatura geodésica de um paralelo é $-\tan\gamma_u$.

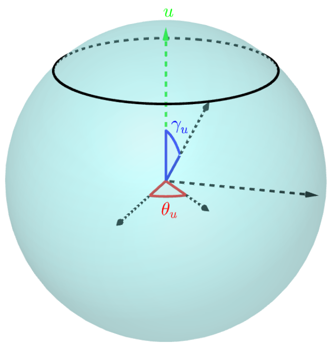


Figura 8: Coordenadas esféricas relativas a $u$.

Notemos que $h_u|_{\mathbb{S}^2}$ é uma função de Morse com dois pontos críticos, $u$ e $-u$. Neste caso, obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 3.16.** *Sejam $D \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira e $u \in \mathbb{S}^2$ um vetor arbitrário. Então*

$$\mathcal{X}(D) = (1/2) \sum_{p \in \partial D : n(p) = \pm\tilde{u}} sing\,\big(\kappa_g(p) + \tan\gamma_u(p)\big) + \#\,(\{u, -u\} \cap D)\,,$$

*onde $\#\,(\{u, -u\} \cap D)$ é o número de vezes que $u$ ou $-u$ pertencem a $D$.*

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S \subset \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{S}^2$. Quando $\lambda$ varia em $\mathbb{R}$, os diferentes planos $\pi_{u,\lambda}$ podem ser considerados como planos de "varredura" do $\mathbb{R}^3$ e (39) pode ser expressa como a seguir, devido ao Teorema 3.12:

$$\mathcal{X}(D) = (I_2 - P_2) + \frac{1}{2}(I_1 - P_1), \tag{42}$$

onde $I_1$, $P_1$ denotam o número de "ilhas" e "pontes", respectivamente, observados nas curvas de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ e $I_2$, $P_2$ denotam o número de "bases" e "topos", respectivamente, observadas no plano de "varredura" $\pi_{u,\lambda}$, que contribuem para a soma $\sum_{p \in Crit(h_u)} ind_p(h_u)$. Para exemplificar, tomamos $\mathbb{T}^2$ um toro em $\mathbb{R}^3$ com atlas $\mathcal{A} = \{(\phi, U_1), (\phi, U_2), (\phi, U_3), (\phi, U_4)\}$, onde

$$\phi(u,v) = ((\cos(u) + 2)\cos(v), \sin(u), (\cos(u) + 2)\sin(v)), \tag{43}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[ \quad , \quad U_2 = ]\pi, 3\pi[ \times ]0, 2\pi[ \\ U_3 &= ]0, 2\pi[ \times ]\pi, 3\pi[ \quad \text{e} \quad U_4 = ]\pi, 3\pi[ \times ]\pi, 3\pi[ \end{aligned}$$

Consideremos $D \subset \mathbb{T}^2$ um domínio com fronteira em $\mathbb{T}^2$ parametrizado por (43) para $U = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{1}{4}, \pi - \frac{1}{4}\right]$, como ilustra a Figura 9.

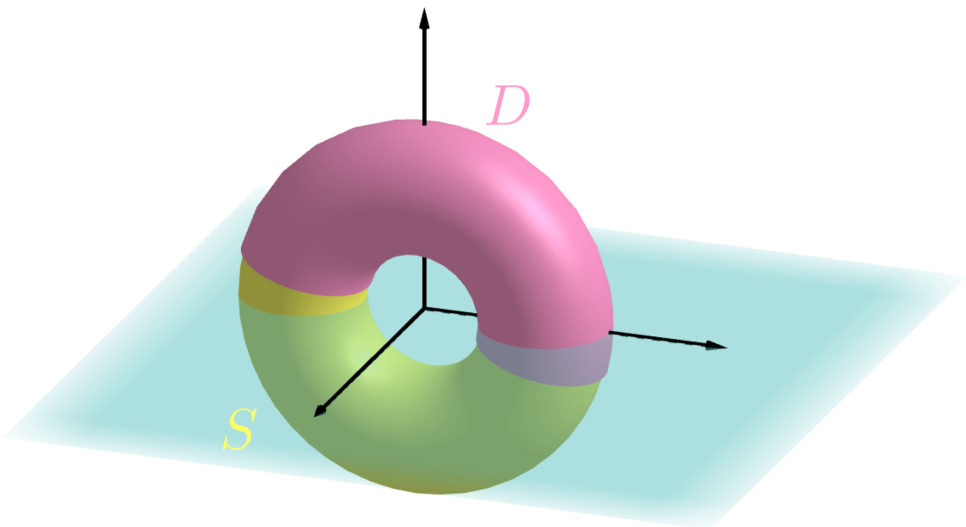


Figura 9: Toro $\mathbb{T}^2$ e o domínio $D \subset \mathbb{T}^2$ descritos acima.

Para $u = (0,0,1)$ o ponto $p_1^D = (0,0,1)$ é do tipo "base" e $p_2^D = (0,0,3)$ do tipo "topo".

O ponto

$$p_1^{\partial D} = \left(3cos\left(-\frac{1}{4}\right), 0, 3\sin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

em $\pi_{u,3\sin\left(-\frac{1}{4}\right)} \cap S$ é do tipo "ilha",

$$p_2^{\partial D} = \left(cos\left(-\frac{1}{4}\right), 0, \sin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

em $\pi_{u,\sin\left(-\frac{1}{4}\right)} \cap S$ é do tipo "ponte",

$$p_3^{\partial D} = \left(cos\left(\pi-\frac{1}{4}\right), 0, \sin\left(\pi-\frac{1}{4}\right)\right)$$

em $\pi_{u,\sin\left(\pi-\frac{1}{4}\right)} \cap S$ é do tipo "ilha",

$$p_4^{\partial D} = \left(3cos\left(\pi-\frac{1}{4}\right), 0, 3\sin\left(\pi-\frac{1}{4}\right)\right)$$

em $\pi_{u,3\sin\left(\pi-\frac{1}{4}\right)} \cap S$ é do tipo "ponte".

A Figura 10 ilustra os pontos $p_1^D$, $p_2^D$, $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ em $\mathbb{T}^2$.

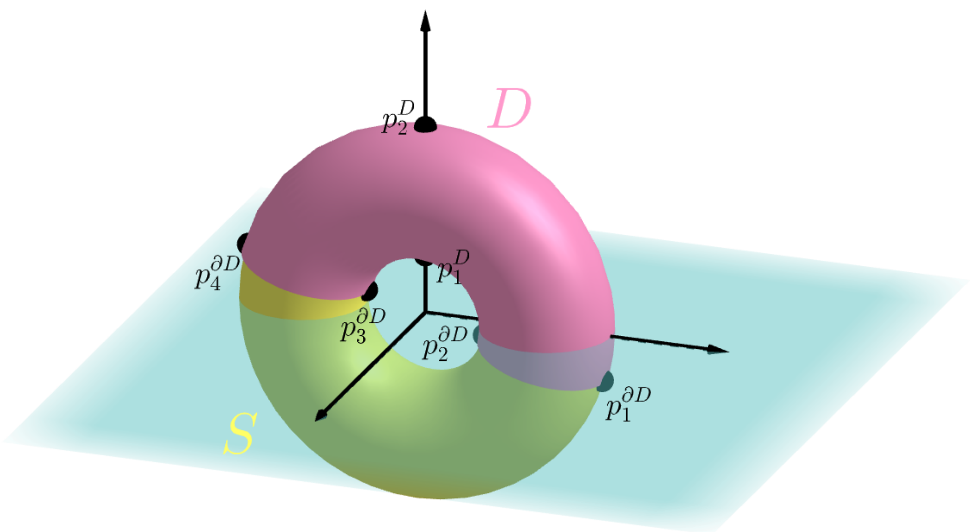


Figura 10: Os pontos $p_1^D$, $p_2^D$, $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ em $\mathbb{T}^2$.

Disto temos que $I_1 = 2$, $P_1 = 2$, $I_2 = 1$ e $P_2 = 1$. Logo, por (42), temos que

$$\mathcal{X}(D) = (1-1) + \frac{1}{2}(2-2) = 0$$

.

# BIBLIOGRAFIA


[AT12] M. Abate and F. Tovena, *Curves and surfaces*, 1st ed., Springer-Verlag Italia, Milão, Italia, 2012. ↑4, 10, 11, 12, 14, 18, 20, 22, 24, 27, 37

[BB14] E. Behrends and J. Buescu, *Terá Buffon realmente lançado agulhas?*, Boletim da SPM 71 (2014), 123 –132. ↑1

[dC14] M. P. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, 6th ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil, 2014. ↑5, 7

[DeH87] R. T. DeHoff, *Use of the disector to estimate the Euler characteristic of three dimensional microstructures*, Acta Stereologica (1987). ↑2

[GANB01] X. Gual-Arnau and J. J. Nuño Ballesteros, *A stereological version of the Gauss-Bonnet formula*, Geom. Dedicata **84** (2001), no. 1-3, 253–260. MR1825359 ↑iii, v, 3

[GBNO93] H. J. G. Gundersen, R. W. Boyce, J. R. Nyengaard, and A. Odgaard, *The conneulor: unbiased estimation of connectivity using physical disectors under projection*, Bone **14** (1993), no. 3, 217–222. Bone Morphometry 1992 Sixth International Congress Proceedings. ↑2

[Jub09] B. Jubin, *A generalized Poincaré-Hopf index theorem*, 2009. ↑34

[Lim15] E. L. Lima, *Curso de análise vol. 2*, 11th ed., Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 2015. ↑23, 30, 31, 32, 37, 41

[Lim16] ______, *Álgebra linear*, 9th ed., Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 2016. ↑13

[Mil63] J. Milnor, *Morse theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. MR0163331 ↑41

[Mor29] M. Morse, *Singular points of vector fields under general boundary conditions*, Amer. J. Math. **51** (1929), no. 2, 165–178. MR1506710 ↑33, 34

[MR98] S. Montiel and A. Ros, *Curves and surfaces*, 2nd ed., Real Sociedad Matemática Española, Madrid, Espanha, 1998. ↑27

[ON08] J. OHSER and W. Nagel, *The estimation of the Euler-Poincare characteristic from observations on parallel sections*, Journal of Microscopy **184** (2008), 117 –126. ↑2

[RdSB09] W. L. Roque, A. C. A. de Souza, and D. X. Barbieri, *Característica de Euler-Poincaré aplicada para identificar baixa densidade óssea a partir de imagens tomográficas de vértebras*, Revista Brasileira de Reumatologia (2009). ↑2