

# Processos de Poisson: formalização, propriedades e generalizações

Aurora Palma Teijido



Universidade Federal do ABC

**Título:** Processos de Poisson: formalização, propriedades e generalizações

**Autor:** Aurora Palma Tejjido

**Orientador:** Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

**Banca Examinadora:**

**Prof. Dr. Cristian Favio Coletti**  
Universidade Federal do ABC

**Prof. Dr. Daniel Miranda Machado**  
Universidade Federal do ABC

Santo André, 28 de junho de 2022.

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Processos de Poisson</b>	<b>10</b>
1.1 O Processo Binomial . . . . .	10
1.2 O Processo de Poisson . . . . .	12
1.2.1 Propriedades do Processo de Poisson . . . . .	14
1.2.2 Processo de Poisson Unidimensional . . . . .	18
<b>2 Formalização de Processos Pontuais</b>	<b>20</b>
2.1 O Espaço das Configurações Localmente Finitas . . . . .	20
2.2 Processos Pontuais . . . . .	22
2.3 Eventos Vácuos . . . . .	25
<b>3 Processos de Poisson em Geral</b>	<b>28</b>
3.1 Caracterização de Processos de Poisson . . . . .	28
3.1.1 Caracterização por probabilidades vácuas . . . . .	28
3.1.2 Caracterização por independência . . . . .	29
3.1.3 Caracterização por integrais . . . . .	32
3.2 Propriedades . . . . .	35
3.2.1 Superposição e Emagrecimento . . . . .	36
3.3 Construção do Processo de Poisson . . . . .	42
3.3.1 Construção do processo de Poisson homogêneo via partição em blocos . . . . .	42
3.3.2 Construção do processo de Poisson não-homogêneo via projeção . . . . .	43
3.4 Processos de exclusão - construção via Processos de Poisson . . . . .	46
3.4.1 Processo de exclusão . . . . .	46
3.4.2 Construção gráfica . . . . .	47
<b>4 Processos de Cox</b>	<b>50</b>
4.1 Definição e propriedades . . . . .	50
4.1.1 Emagrecimento de processos de Cox . . . . .	53

4.2	Casos particulares . . . . .	54
4.2.1	Processo de Poisson Misto . . . . .	54
4.2.2	Processo de Neyman-Scott . . . . .	54
4.2.3	Processos tipo <i>Shot Noise</i> . . . . .	55
4.3	Aplicação de processos de Cox . . . . .	57
4.3.1	Modelagem do momento de <i>default</i> . . . . .	57
4.3.2	Processo de <i>ratings</i> de crédito e tempo de <i>default</i> . . . . .	59

# Agradecimento

Agradeço à minha família (por sangue ou por escolha), que me apoiou e torceu por mim ao longo desta jornada.

Este trabalho visa apresentar uma breve introdução à teoria de processos pontuais. Focaremos nossa atenção aos processos de Poisson, apresentando sua definição formal, principais formas de caracterizá-lo, além de suas principais propriedades. Como modo de generalizar os processos de Poisson, finalizaremos com um breve estudo dos processos de Cox.

**Palavras Chaves:** processos pontuais, processo de Poisson, processos de Cox

This work aims to present a brief introduction to the theory of point processes. We will focus our attention on Poisson processes, presenting its formal definition, main ways of characterizing it, in addition to its main properties. As a way of generalizing Poisson processes, we will end with a brief study of Cox processes.

**Keywords:** point processes, Poisson processes, Cox processes

Este trabalho apresenta uma introdução a processos pontuais, com foco em processos de Poisson. Além das principais propriedades dos processos de Poisson, serão apresentadas formas de caracterizá-los e construí-los. Por fim, serão introduzidas formas de utilizá-lo na definição de outros processos.

A fundamentação teórica deste trabalho segue majoritariamente a obra de Møller e Waagepetersen [2], que apresenta a formalização de processos pontuais via teoria da medida, caracterização de processos de Poisson e suas propriedades (superposição, emagrecimento, invariância por translações e rotações), além de processos de Cox. Também utilizamos intensamente o trabalho de Ferrari e Galves ([3] e [4]), que introduz a abordagem construtiva para os processos, além das noções de projeções, processos marcados e acoplamentos.

No capítulo 1, apresentaremos os processos binomial e de Poisson com uma abordagem informal, apenas tangenciando teoria da medida. Focaremos nos processos de Poisson, para os quais introduziremos a propriedade de independência entre disjuntos, além de discutirmos a invariância por translações e rotações. Por fim, focaremos no caso unidimensional e demonstraremos que, em uma dimensão, as distâncias entre pontos consecutivos do processo são dadas por exponenciais.

Em seguida, no capítulo 2, utilizaremos conceitos de teoria da medida para formalizar processos pontuais. Apresentaremos o espaço  $\mathcal{N}_{lf}$  e a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{N}_{lf}$  de configurações de pontos localmente finitas e definiremos processos pontuais em função desses objetos. Em seguida, introduziremos o conceito de evento vácuo, um evento de  $\mathcal{N}_{lf}$  que equivale ao conjunto das configurações localmente finitas sem pontos incidentes em um boreliano fixado, e as probabilidades vácuas associadas. Demonstraremos que um processo pontual é definido inteiramente por suas probabilidades vácuas, resultado que utilizaremos em diversas demonstrações posteriores.

No capítulo 3, retornaremos o foco para processos de Poisson e nos valeremos dos conceitos apresentados no capítulo 2 para demonstrar uma série de propriedades desses



processos. Primeiramente, exporemos três formas distintas de caracterizar processos de Poisson: por meio de sua expansão em integrais, por suas probabilidades vácuas e pela propriedade de independência entre disjuntos. Em seguida, discutiremos as propriedades de superposição e emagrecimento de processos, além dos processos marcados. Apresentaremos a construção do processo de Poisson homogêneo em  $\mathbb{R}^d$  via partição em blocos e, para o processo não-homogêneo, mostraremos a construção via projeção de um processo homogêneo de dimensão superior. Encerraremos com uma introdução a um processo de saltos que chamamos de processo de exclusão, conforme apresentado por Seppäläinen [5], focando no caso em que a lei que rege os momentos de salto é dada por processos de Poisson.

Por fim, no capítulo 4, introduziremos um processo derivado de Poisson denominado processo de Cox. Esses processos possuem intensidade aleatória e se comportam como Poisson quando condicionados a um campo aleatório. Apresentaremos as probabilidades vácuas do processo de Cox, o emagrecimento do processo e apresentaremos alguns casos particulares. Encerraremos introduzindo a aplicação de processos de Cox para a modelagem de risco de crédito, apresentando resultados de Lando [6].

O intuito deste capítulo é trazer uma introdução ao que chamamos de *processos pontuais*, seguindo a obra de Møller e Waagepetersen [2]. O próximo capítulo definirá esses processos formalmente, mas por enquanto nos interessa uma visão mais informal. Neste sentido, podemos entender um processo pontual como um subconjunto  $X$  aleatório e discreto (formado de pontos isolados) de um espaço métrico  $S$  (aqui, consideraremos  $S = \mathbb{R}^d$ ). A seguir, para consolidar esta ideia, vamos apresentar e construir alguns exemplos básicos e importantes.

## 1.1 O Processo Binomial

Existem diversas formas de se distribuir pontos aleatoriamente em  $S$ , sendo que algumas podem nos trazer características interessantes.

Uma maneira canônica é tentar controlar onde estão localizados cada pontos do processo, individualmente. Assim, no caso de um processo pontual  $X$  finito com  $n$  pontos, escrevemos  $X = \{X_1; X_2; \dots; X_n\}$ , com cada  $X_i$  sendo um vetor aleatório assumindo valores em  $S$ . Um caso especial e importante deste tipo de abordagem acontece quando tomamos pontos independentes e identicamente distribuídos. Neste caso diremos que  $X$  é um processo Binomial.

Para estudo do processo, precisaremos definir uma função de contagem dos pontos de  $X$ . Seja uma sub-região  $B \subseteq S$ , denotaremos essa função  $N(B) := \#(X \cap B)$ . Além disso, vamos simplificar a notação da restrição de  $X$  a  $B$ , adotando  $X_B := X \cap B$ .

**Definição 1.1 (Processo Pontual Binomial)** *Seja  $f$  uma função de densidade definida em  $S$ , e seja um processo pontual  $X$  consistindo de  $n$  pontos independentes e identicamente distribuídos com densidade  $f$ . Nessas condições, dizemos que  $X$  é um processo pontual binomial com  $n$  pontos em  $S$  com densidade  $f$  e escrevemos  $X \sim \text{Binomial}(S; n; f)$ .*

O fato de os pontos serem *i.i.d.* faz com que esse processo guarde certa semelhança com a variável aleatória binomial, conforme demonstramos a seguir.

**Proposição 1.2** *Sejam  $X$  Binomial( $S; n; f$ ) e  $A \subseteq S$ . Então,  $N(A) \sim \text{bin}(n; \int_A f)$ .*

**Demonstração:** Faça  $X = fX_1; \dots; X_n g$ . Pela definição de processo Binomial, os pontos  $X_i; i = 1; \dots; n$ , são *i.i.d.* com densidade  $f$ . Assim, sabemos que a probabilidade de  $X_i$  assumir valor em  $A$  é dada por  $p = \int_A f(x) dx$ . Utilizando a independência dos pontos temos que

$$P(N(A) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

ou seja,  $N(A) \sim \text{bin}(n; p)$ .

A escolha independente de pontos, apesar de conveniente, nos trás alguns problemas.

Primeiro note que para  $A \subseteq S$ , a média do total de pontos de  $X$  em  $A$  é dada por

$$E[N(A)] = n \int_A f;$$

o que nos mostra que a construção de tal processo com infinitos pontos é inviável, mesmo em espaços não limitados.

Mais do que isso, o lema de Borel Cantelli nos garante que se  $\int_A f > 0$  e  $X = fX_i; i = 1; 2; \dots g$  com os vetores  $X_i$  *i.i.d.*, então

$$P(N(A) = \infty) = 1 \iff P(X_i \in A \text{ i.v.}) = 1:$$

Dentre outros problemas, tomando  $A$  compacto, garantimos a existência de um ponto de acumulação em  $A$ , garantindo que  $X$  não é um processo pontual.

Outro problema, intimamente relacionado com o que comentamos acima, aparece quando consideramos uma classe importante de processos pontuais, conhecidos como *processos homogêneos*. Mais formalmente, denotando por  $m(\cdot)$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$ , um processo pontual  $X$  em  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  é homogêneo em  $S$  se para todo  $A; B \subseteq S$  tais que  $m(A) = m(B)$ , vale que  $N(A)$  e  $N(B)$  tem a mesma distribuição.

Para construir um processo Binomial *homogêneo*, basta fazer  $f = \frac{1}{m(S)}$ . Mas isso nos limita a espaços  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  com  $m(S) < \infty$ . O que impossibilita, por exemplo, a definição de tal processo em  $\mathbb{R}^d$  ou outros conjuntos ilimitados.

Em resumo, tal estratégia não nos permite a construção de processos com infinitos pontos. Em particular, não permite a construção de processos homogêneos em  $\mathbb{R}^d$ .

## 1.2 O Processo de Poisson

Neste ponto a construção de um processo homogêneo em  $\mathbb{R}^d$ , ou até mesmo de um processo com infinitos pontos, não parece ser óbvia.

A abordagem de controlar a posição de cada ponto do processo parece requerer uma forte dependência entre os pontos alocados. Poderíamos tentar colocar um ponto por vez, condicionando a posição de um dado ponto à posição do ponto anterior, mas a forma de fazê-lo não parece evidente.

Uma alternativa, como sugere a proposição 1.2, é focar a distribuição  $N(A)$  para borelianos  $A \in \mathcal{S}$ , deixando de lado a localização exata de cada ponto.

Para tentar encontrar pistas de como prosseguir, vamos investigar um pouco mais os processos Binomiais da seção anterior. Por simplicidade, vamos focar em processos homogêneos, e ao invés de pedir que  $N(A)$  e  $N(B)$  tenham a mesma distribuição sempre que  $m(A) = m(B)$ , vamos pedir que  $E[N(A)] = \lambda m(A)$  para alguma constante  $\lambda > 0$ .

Estamos interessados então em um processo pontual em  $\mathbb{R}^d$  que tenha uma *intensidade* constante  $\lambda > 0$  (isto é, a quantidade esperada de pontos por unidade de área deve ser  $\lambda$ , independentemente da região do espaço).

Sabemos fazê-lo em conjuntos de medida de Lebesgue finita, utilizando o processo binomial com função de densidade uniforme. Vamos partir de  $C_a = [ -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} ]^d$ , o cubo  $d$ -dimensional de lado  $a$  centrado na origem, e definir  $X_n$  como o processo binomial de  $n$  pontos com densidade  $\frac{1}{m(C_a)} = \frac{1}{a^d}$ .

Nossa estratégia é aumentar o cubo  $C_a$  simultaneamente a um aumento do número  $n$  de pontos, de modo a manter constante a intensidade do processo em  $C_a$ . Para isso, escrevemos  $a$  em função de  $\lambda$  e  $n$ , fazendo  $a = \sqrt[d]{\frac{n}{\lambda}}$ . Dessa forma, dado um conjunto

limitado  $A \subset \mathbb{R}^d$ , como  $A \subset C_a$  para  $n$  suficientemente grande, vale que

$$\begin{aligned} N_n(A) &= \#(X_n \cap A) \stackrel{\text{bin}}{\sim} \text{bin} \left( n; \frac{m(A)}{a^d} \right) \\ &= \text{bin} \left( n; \frac{m(A)}{n} \right) \\ &\stackrel{\text{dist}}{\sim} \text{po} \left( m(A) \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

O resultado acima, apesar de bastante simples, nos indica que um processo pontual homogêneo em  $\mathbb{R}^d$  (ou outro espaço não limitado), com infinitos pontos e análogo do processo Binomial, deveria ter  $N(A) \sim \text{po}(m(A))$ .

Em resumo, ainda não sabemos como construir tal processo (talvez pela aproximação sucessiva de processos Binomiais?), mas já temos uma primeira pista sobre o que esperar.

Esse processo de fato existe e é chamado de *processo pontual de Poisson*. A seguir vamos apresentar a definição teórica de um processo de Poisson e algumas de suas propriedades. Deixaremos sua construção para o capítulo 3, onde exploraremos este processo mais a fundo.

Antes de defini-lo, vamos relembrar alguns conceitos importantes ao longo de todo o texto.

Dizemos que uma função  $f$  é *localmente integrável* se for integrável em conjuntos limitados, isto é,  $\int_B f(x) dx < \infty$  para todo  $B \subset S$  limitado. Similarmente, uma medida  $\mu$  é dita *localmente finita* se  $\mu(B) < \infty$  for finita para todo  $B$  limitado. Além disso,  $\mu$  é dita *difusa* se não houver concentração de massa em nenhum ponto, ou seja,  $\mu(\{x\}) = 0$  para todo  $x \in S$ .

Além disso, Møller e Waagepetersen definem em [2] o processo de Poisson da seguinte maneira:

**Definição 1.3 (Processo Pontual de Poisson)** *Sejam um espaço  $S$ , uma função  $f : S \rightarrow [0; \infty)$  localmente integrável e  $\mu$  a medida em  $S$  (difusa e localmente finita) definida por:*

$$\mu(B) = \int_B f(x) dx \quad (1.2)$$

*Diremos que  $X$  é um processo de Poisson com função de intensidade  $f$  (ou com medida de intensidade  $\mu$ ) se:*

- Para qualquer subconjunto  $B$  de  $S$  com medida finita,  $N(B)$  se distribui como variável de Poisson com parâmetro  $\lambda(B)$  (e  $N(B) = 0$  no caso em que  $\lambda(B) = 0$ );
- Para quaisquer  $n$  natural e  $B$  subconjunto de  $S$  com medida positiva finita, condicionando a  $N(B) = n$ , temos  $X_B \sim \text{Binomial}(B; n; f)$  com  $f(\cdot) = \frac{\lambda(\cdot)}{\lambda(B)}$ .

Nesse caso, escrevemos  $X \sim \text{Poisson}(S; \lambda)$ .

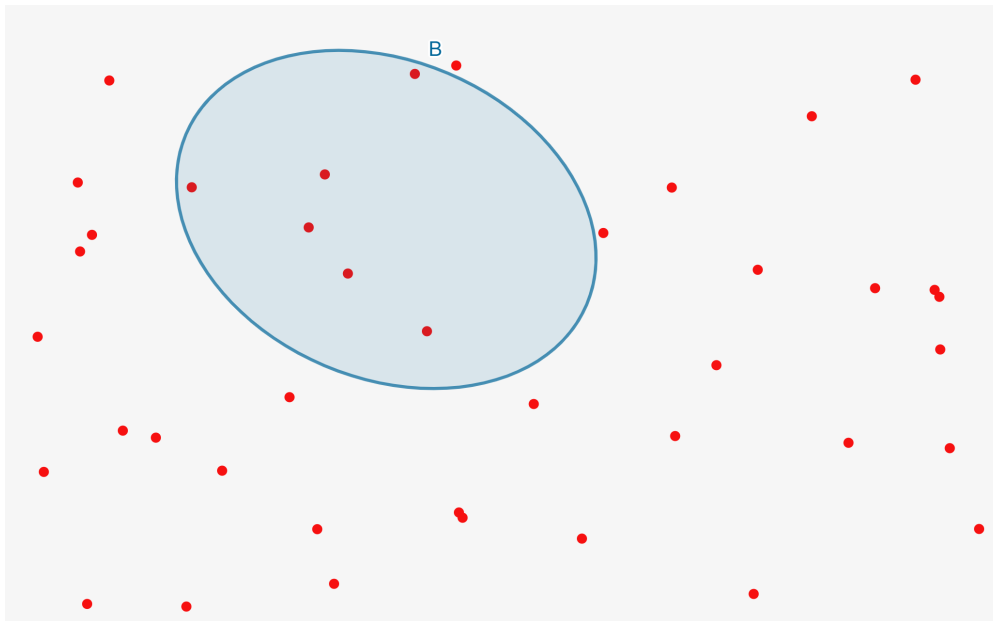


Figura 1.1: Processo de Poisson (em vermelho) sobre  $\mathbb{R}^2$  e um limitado  $B$ . Condicionado a  $N(B) = 6$ , a distribuição do processo restrita a  $B$  é binomial.

No caso em que  $\lambda$  é constante, chamamos o processo de *homogêneo* e damos a  $\lambda$  o nome de *taxa* do processo. Em particular, se a taxa é 1, o processo é chamado de *unitário* ou *padrão*. Já quando  $\lambda$  não é constante, chamamos o processo de *não homogêneo*.

### 1.2.1 Propriedades do Processo de Poisson

Nesta seção vamos tentar explorar algumas das propriedades que fazem do processo de Poisson um processo importante.

A propriedade mais distinta do processo de Poisson é a independência do processo em regiões disjuntas. Ela estabelece que, para uma sequência de disjuntos  $B_1; B_2; \dots \subset S$ , os processos restritos a cada um deles  $X_{B_1}; X_{B_2}; \dots$  são independentes entre si. Ou, mais informalmente, o conhecimento que temos do processo dentro de uma região  $B$

não adiciona informação sobre seu comportamento no restante do espaço. Ademais, conforme veremos na proposição 3.3, o processo de Poisson é o único com essa característica. Nós provaremos, como descrita acima, no capítulo 3 (proposição 3.2). Por agora, nos satisfaremos com uma versão aparentemente mais simples de tal resultado.

**Proposição 1.4** *Seja  $X$  um processo de Poisson em  $S \subset \mathbb{R}^d$  com medida de intensidade  $\lambda$  e  $A_n \subset S, n = 1, \dots, l$  borelianos disjuntos com  $\lambda(A_n) < 1; n = 1, \dots, l$ . Nestas condições,  $N(A_n), n = 1, \dots, l$  são variáveis aleatórias independentes.*

**Demonstração:** Dados índices  $k_1, \dots, k_l$  faça  $B_i = A_{k_i}$ . Note agora que se  $(B_i)_{i=1, \dots, l}$  são disjuntos e  $N(B_i) = m_i$ , para cada  $1 \leq i \leq l$ , então  $N(\cup_{i=1}^l B_i) = m_1 + \dots + m_l$ . Fazendo então  $K = \cup_{i=1}^l B_i$  e  $r = m_1 + \dots + m_l$ , segue da definição 1.3 que

$$\begin{aligned} P(N(B_i) = m_i; 1 \leq i \leq l) &= P(N(B_i) = m_i; 1 \leq i \leq l | N(K) = r) P(N(K) = r) \\ &= \frac{r!}{m_1! \dots m_l!} \prod_{i=1}^l \frac{(B_i)^{m_i}}{(K)^{m_i}} e^{-\lambda(K)} \frac{(K)^r}{r!} \\ &= \prod_{i=1}^l e^{-\lambda(B_i)} \frac{(B_i)^{m_i}}{m_i!} \\ &= \prod_{i=1}^l P(N(B_i) = m_i); \end{aligned}$$

concluindo o resultado.

**Corolário 1.5** *Se  $X$  é um processo de Poisson em  $S$  com medida de intensidade  $\lambda$  então*

$$\text{Cov}(N(A); N(B)) = \lambda(A \cap B);$$

**Demonstração:** Basta notar que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N(A); N(B)) &= \text{Cov}(N(A \setminus B^c); N(B)) + \text{Cov}(N(A \cap B); N(B)) \\ &= \text{Cov}(N(A \setminus B); N(B)) \\ &= \text{Cov}(N(A \setminus B); N(A \setminus B)) \\ &= \text{Var}(N(A \setminus B)); \end{aligned}$$

Como  $N(A)$  tem distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda(A \setminus B)$ , o resultado segue.

Além da propriedade de independência, interessam-nos também as propriedades de invariância no espaço, que chamamos de estacionariedade e isotropia:

**Definição 1.6** Um processo pontual  $X \subset \mathbb{R}^d$  é estacionário (ou invariante por translações) se o processo  $X + u := \{x + u \mid x \in X\}$  possui a mesma distribuição de  $X$  para todo  $u \in \mathbb{R}^d$ .

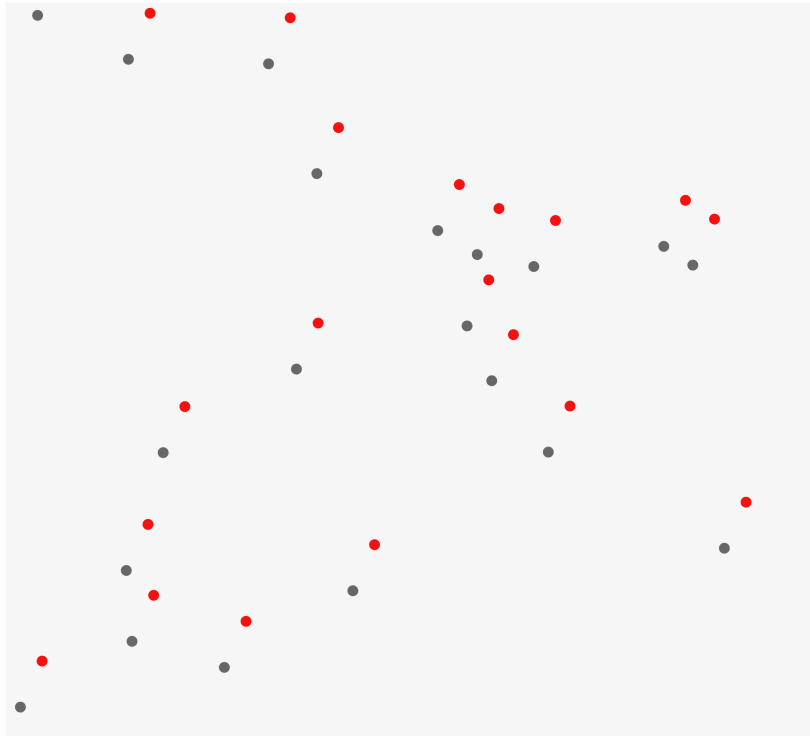


Figura 1.2: Exemplo de translação de um processo por um vetor  $u$ , em que  $X$  é retratado em preto e  $X + u$ , em vermelho.

**Definição 1.7** Um processo pontual  $X \subset \mathbb{R}^d$  é isotrópico se o processo  $OX := \{Ox \mid x \in X\}$  possui a mesma distribuição de  $X$  para toda rotação  $O$  ao redor da origem de  $\mathbb{R}^d$ .

Essas propriedades unidas significam que o processo se comporta de forma idêntica em todo o espaço. Diferentemente da independência, estas não valem para todos os processos de Poisson. Abaixo estudaremos o que concede ao processo essas propriedades.

**Proposição 1.8** Seja  $X$  um processo de Poisson tal como na definição 1.3.  $X$  é estacionário se, e somente se, a medida  $\mu$  é estacionária. Similarmente,  $X$  é isotrópico se, e somente se,  $\mu$  é isotrópica.

**Demonstração:**

Sejam  $X$  um processo estacionário e um  $v \in S$ . Faça  $X^v = X + v$  e  $B^v = B \cap v$  para



$B \subseteq S$ , e note que

$$N^\theta(B) := \#(X^\theta \setminus B) = \#(X \setminus B^\theta) = N(B^\theta)g:$$

Assim, pela definição 1.3, se  $B$  é limitado, temos que  $N(B) \sim \text{poi}(\lambda(B))$  e  $N^\theta(B) \sim \text{poi}(\lambda(B^\theta))$ . Mas da estacionariedade do processo,  $N^\theta(B) \sim \text{poi}(\lambda(B))$ . Como essa propriedade independe da escolha de  $B$ , podemos concluir que  $X$  é estacionária.

Para demonstrar a volta, assumamos  $X$  estacionária. Como vimos, a função de contagem para  $X^\theta$  pode ser escrita como  $N^\theta(B) = N(B^\theta)$ . Pela definição,  $N^\theta(B) \sim \text{poi}(\lambda(B^\theta))$ . Como  $X$  é estacionária,  $N(B^\theta) \sim \text{poi}(\lambda(B))$ .

Como  $X$  é estacionária, então a função de intensidade  $\lambda$  é também estacionária, e portanto constante.

Considere então  $B \subseteq S$  com  $\lambda(B) < 1$  e suponha que  $N^\theta(B) = n$ . Segue assim que  $N(B^\theta) = n$  e  $X_{B^\theta} \sim \text{Binomial}(n; \lambda(B^\theta) = \lambda(B))$ . Assim,  $X_{B^\theta} = \sum_{i=1}^n X_i$  como  $X_1, \dots, X_n$  iid e uniformemente distribuídos em  $B^\theta$ . Concluímos assim que  $X_B^\theta = X_{B^\theta} + \nu = \sum_{i=1}^n X_i + \nu$ , com  $X_1 + \nu, \dots, X_n + \nu$  iid e uniformemente distribuídos em  $B = B^\theta + \nu$ .

Ou seja,  $X^\theta$  é um processo de Poisson com a mesma intensidade de  $X$  e portanto  $X$  é estacionário.

A demonstração é análoga para a propriedade de isotropia.

Como toda medida invariante por translações em um espaço euclidiano é um múltiplo de Lebesgue, temos o seguinte corolário.

**Corolário 1.9** *Um processo de Poisson  $X$  em  $\mathbb{R}^d$  é estacionário se, e somente se, sua medida de intensidade é um múltiplo da medida de Lebesgue e o processo é homogêneo.*

É importante ressaltar também que a medida de Lebesgue é isotrópica, de forma que em  $\mathbb{R}^d$  todo processo de Poisson estacionário deve ser também isotrópico. Contudo, a recíproca não é verdadeira. Existem processos em  $\mathbb{R}^d$  que são isotrópicos, porém não estacionários. Por exemplo, tome em  $S = \mathbb{R}^2$  um processo de Poisson  $X$  com função de intensidade  $\lambda(x; y) = x^2 + y^2$ . O comportamento neste caso depende apenas da distância da origem, o que torna  $X$  invariante por rotações ao redor da origem, mas não por translações.

## 1.2.2 Processo de Poisson Unidimensional

Seja  $X$  um processo de Poisson de nido em  $\mathbb{R}$  com taxa constante  $\lambda > 0$ . O caso em que  $S = \mathbb{R}$  é especial porque podemos ordenar dos pontos de  $X$ , fazendo  $X = \{f; \dots; S_{-2}; S_{-1}; S_0; S_1; S_2; \dots; g\}$ , onde  $S_k < S_{k+1}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  e  $S_0 < 0 < S_1$ .

Figura 1.3: Processo de Poisson unidimensional em  $\mathbb{R}$  com pontos enumerados.

Para simplificar, vamos restringir o processo a  $\mathbb{R}_+$ , isto é, consideraremos  $X = \{f; S_1; S_2; \dots; g\}$ . Podemos interpretar  $X$  como a sequência de momentos em que um evento ocorre. Agora, vamos deslocar essa sequência no tempo. Para isso, definimos uma variável aleatória exponencial  $T$  com parâmetro  $\lambda$  e independente de  $X$ . Vamos deslocar cada um dos pontos de  $X$  para a direita por  $T$ . Isto é, definimos uma nova sequência  $X^*$  como

$$\begin{aligned} X^* &= (X + T) \cap [f, Tg] \\ &= \{f + T; \dots; S_k + T; \dots; X + T; \dots; g + T\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

**Teorema 1.10** O processo  $X^*$  definido por 1.3 é um processo de Poisson de taxa  $\lambda$ .

**Demonstração:** Conforme provaremos no teorema 3.1, basta mostrar que, se  $B$  é um boreliano limitado,  $P(X^* \cap B = \emptyset) = \exp(-\lambda |B|)$ . Como simplificação, vamos assumir que  $B = [a; b]$ . O caso mais geral é derivável deste, considerando que  $B$  é uma união enumerável de intervalos.

$$\begin{aligned} P(X^* \cap B = \emptyset) &= \sum_{T \geq 0} P((X + T) \cap B = \emptyset; T \geq 0) \\ &= \int_{B^c} P((X + T) \cap B = \emptyset | T = t) e^{-\lambda t} dt \end{aligned}$$

Como  $B^c = (1; a] \cup (b; 1) \in \mathcal{X}$  em  $\mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^1 P(X \setminus [a-t; b-t] \setminus [0; 1) = \emptyset) e^{-t} dt + \int_b^1 e^{-t} dt \\
 &= \int_a^0 P(X \setminus [a-t; b-t] = \emptyset) e^{-t} dt + \int_b^1 1 e^{-t} dt \\
 &= \int_0^a e^{-(b-a)} e^{-t} dt + \int_b^1 e^{-t} dt \\
 &= e^{-(b-a)} (1 - e^{-a}) + e^{-b} \\
 &= e^{-(b-a)}
 \end{aligned}$$

**Proposição 1.11** Sejam  $X$  o processo de Poisson em  $\mathbb{R}^+$  com intensidade  $\lambda$  e  $(T_n)$  a sequência de distâncias entre pontos consecutivos de  $X$ , isto é,  $T_1 = S_1$  e  $T_n = S_n - S_{n-1}$ ,  $n > 1$ . As variáveis  $T_n$  são exponenciais iid com parâmetro  $\lambda$ .

**Demonstração:** Conforme provamos no teorema 1.10, é possível construir  $X$  através da união de  $T_1 \sim \text{exp}(\lambda)$  com um processo de Poisson com intensidade  $\lambda$ , que chamaremos de  $X_1$ . Similarmente,  $X_1$  é um processo de Poisson em  $[T_1; 1)$ , de modo que podemos escrevê-lo como união entre uma exponencial  $T_2$  de parâmetro  $\lambda$  e um processo  $X_2$ . Dessa forma, teremos  $X = f T_1 g [f T_1 + T_2 g [ X_2$ . Podemos repetir essa iteração de modo que todo  $S_i \in X$  pode ser escrito como  $T_1 + \dots + T_i$ , com  $T_n \sim \text{exp}(\lambda)$  para todo  $n$ .

## 2 Formalização de Processos Pontuais

No capítulo 1, introduzimos uma noção informal de processo pontual, definindo-o como um subconjunto discreto aleatório de um dado espaço. Neste capítulo, utilizaremos conceitos de teoria da medida para trazer uma abordagem formal. Vamos definir e estudar o espaço mensurável onde vivem tais processos, definiremos o que entenderemos por distribuição de um processo pontual, além de introduzir alguns conceitos básicos importantes ao estudo de processos pontuais.

### 2.1 O Espaço das Configurações Localmente Finitas

O primeiro passo na formalização dos processos pontuais (e, de fato, de qualquer outro processo) é entender onde vivem tais processos. Isso inclui não apenas o espaço de configurações do processo, como também a  $\sigma$ -álgebra que dará suporte à sua distribuição.

No caso dos processos pontuais existem duas formas clássicas de se abordar o problema: a primeira, que seguiremos neste trabalho, é ver o processo pontual como um subconjunto discreto de um dado espaço métrico  $S$ . A segunda forma é ver o processo como uma medida de contagem aleatória no espaço  $(S; B(S))$ . As duas formas são equivalentes e quase indissociáveis, mas não entraremos em maiores detalhes sobre a segunda abordagem. Interessados podem ler mais sobre isso em [10, 11].

Uma vez que trataremos um processo pontual como subconjunto discreto de algum espaço métrico, definir o espaço onde vivem tais processos é tarefa simples. Para tanto, seja  $S$  um espaço métrico, e lembre que uma configuração de pontos desse espaço é dita localmente finita se o número de pontos de  $\gamma \cap B$  é finito para todo  $B \subset S$  limitado. Essa propriedade é suficiente para garantir que  $\gamma$  não possua pontos de acumulação. Chamaremos então de  $N_{lf}$  o espaço de tais configurações:

$$N_{lf} = \{ \gamma : \#(\gamma \cap B) < \infty \text{ para todo } B \subset S \text{ limitado} \}$$

Observação 2.1 É importante que as con gurações localmente nitas (ou as medidas de contagem associadas a elas) sejam compatíveis com a topologia induzida pela métrica. Do ponto de vista de medidas, isso seria o mesmo que dizer que conjuntos de medida nita estão arbitrariamente (do ponto de vista da medida) próximos de um compacto. Para que isso funcione bem, é importante que o espaço métrico  $S$  considerado seja localmente compacto.

Outra hipótese importante é a de separabilidade do espaço. Tal hipótese garante, por exemplo, que alguns procedimentos vistos aqui possam ser descritos em um total enumerável de passos. Mais do que isso, em um espaço  $S$  métrico e separável a família dos borelianos  $B(S)$  é gerada pelas bolas limitadas em  $S$ , sem a necessidade de tomar todo aberto de  $S$ .

Deste modo, quase toda a teoria desenvolvida ao longo deste trabalho pode ser facilmente adaptada para espaços métricos separáveis e localmente compactos (espaços Poloneses).

Posto isso, para os propósitos deste trabalho, consideraremos  $S = \mathbb{R}^d$ , em geral com medida de Lebesgue positiva. É possível também considerar  $S = \mathbb{R}^d$  com dimensão de Hausdorff maior ou igual a 1.

O maior desafio agora é tentar construir uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $N_{lf}$  rica o suficiente para nossos propósitos. Para isso, observe para conhecer completamente uma con guração  $f \in N_{lf}$ , basta que saibamos o total de pontos de  $f$  em (quase) todo subconjunto limitado  $B \subset S$ .

Vamos então atribuir a  $N_{lf}$  uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{N}_{lf}$ , que será a menor  $\sigma$ -álgebra que contém subconjuntos de  $N_{lf}$  do tipo

$$f \in N_{lf} : \#(f \setminus A_i) = k_i; i = 1; \dots; n_g$$

para  $A_1; \dots; A_n \in B(S)$  limitados e  $k_i \in \mathbb{N}_0$ . Isto é,

$$\mathcal{N}_{lf} = \{f \in N_{lf} : \#(f \setminus B) = mg : B \in B_0; m \in \mathbb{N}_0\},$$

onde  $B_0$  denota a classe dos borelianos limitados de  $S$ .

## 2.2 Processos Pontuais

No capítulo 1, definimos informalmente um processo pontual em  $S$  como um subconjunto aleatório e enumerável de  $S$ . Agora, munidos do espaço  $N_{lf}$  e da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{N}_{lf}$ , somos capazes de formular uma definição mais exata.

**Definição 2.2** Um processo pontual é um elemento aleatório no espaço  $N_{lf}$  definido acima. Ou seja, é um mapa  $X : (\Omega; \mathcal{F}) \rightarrow (N_{lf}; \mathcal{N}_{lf})$  mensurável definido em algum espaço de probabilidade  $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ .

A distribuição  $P_X$  de  $X$  é medida de probabilidade em  $(N_{lf}; \mathcal{N}_{lf})$  dada por

$$P_X(F) = P(X \in F),$$

onde  $F \in \mathcal{N}_{lf}$ .

Dado um processo pontual  $X$  podemos definir a função de contagem  $N(\cdot)$  dada por

$$N(B) = \#(X \cap B);$$

$B \in \mathcal{B}(S)$

Antes de estudarmos como caracterizar a distribuição de um processo pontual, vamos abrir um parêntese para relembrar alguns conceitos e resultados básicos de teoria da medida que nos serão úteis ao longo do texto.

Primeiro lembremos que uma família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de um espaço  $S$  é um  $\sigma$ -sistema se  $\mathcal{A}$  é fechado para interseções. Ou seja, se para quaisquer  $A, B \in \mathcal{A}$  temos  $A \cap B \in \mathcal{A}$ .

Finalmente, o resultado abaixo nos dá uma maneira prática de comparar medidas. A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [1] ou em diversos outros textos sobre teoria da medida e probabilidade.

**Lema 2.3** Seja  $\mathcal{A}$  um  $\sigma$ -sistema de subconjuntos de um espaço  $S$  tal que  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $S$ . Se duas medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , definidas em  $S$  equipado com  $\mathcal{F}$ , são tais que  $\mu_1(S) = \mu_2(S) < \infty$  e  $\mu_1(A) = \mu_2(A)$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ , então as duas medidas são equivalentes em toda a  $\mathcal{F}$ .

O resultado a seguir se utiliza desse lema para mostrar que podemos caracterizar a

distribuição de um processo com base apenas em como sua função de contagem  $N$  se distribui conjuntamente em  $N(B_1); \dots; N(B_m)$ . Ou seja, a distribuição é determinada pelos valores de  $P(N(B_1) = k_1; \dots; N(B_m) = k_m)$ , com  $k_i \in \mathbb{Z}$ .

**Lema 2.4** A distribuição de um processo pontual  $X$  é determinada pelas distribuições finito dimensionais de sua função de contagem, ou seja, se  $N(B) = \#(X \cap B)$ , então  $P_X$  é determinada pela distribuição conjunta de  $(N(B_1); \dots; N(B_m))$  (como vetor aleatório), para quaisquer  $B_1; \dots; B_m \in \mathcal{B}_0$  e  $m \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Faça

$$A = \{f \in \mathcal{N}_{lf} : \#(f \cap B_i) = k_i; i = 1; \dots; m; k_i \in \mathbb{N}_0; B_i \in \mathcal{B}_0; \\ i = 1; \dots; m; m \in \mathbb{N}_0\}$$

Vamos aplicar o lema 2.3 utilizando esse  $A$ . Por definição,  $\mu(A) = \mathbb{N}_{lf}$ , e resta apenas mostrar que  $A$  é fechado por interseções. Sejam dois elementos de  $A$ :

$$A_1 = \{f \in \mathcal{N}_{lf} : \#(f \cap B_i) = k_i; i = 1; \dots; m_1\} \\ A_2 = \{f \in \mathcal{N}_{lf} : \#(f \cap B_i) = k_i; i = m_1 + 1; \dots; m_1 + m_2\},$$

dados  $m_1; m_2 \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in \mathbb{N}$  e  $B_i \in \mathcal{B}_0$  para  $i = 1; \dots; m_1 + m_2$ . Observe que  $A_1$  e  $A_2$  podem ser reescritos no formato:

$$f \in \mathcal{N}_{lf} : \#(f \cap B_i) = k_i; i = 1; \dots; m; m = \sum_{i=1}^m m_i.$$

Calculando a interseção desses elementos, temos

$$A_1 \cap A_2 = \{f \in \mathcal{N}_{lf} : \#(f \cap B_i) = k_i; i = 1; \dots; m_1 + m_2\} \\ = \{f \in \mathcal{N}_{lf} : \#(f \cap B_i) = k_i; i = 1; \dots; m_1 + m_2\}$$

que é um elemento de  $A$ .

No decorrer do texto, utilizaremos os conceitos de função de contagem e medida de intensidade de um processo pontual, conforme de nidros por Møller [2].

**Definição 2.5 (Função de contagem)** Sejam  $X$  um processo pontual em  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $B \subseteq S$  um boreliano limitado. Denotando como  $X_B$  a restrição de  $X$  a  $B$  (isto é,  $X \cap B$ ), a

função de contagem de  $X$  é dada por

$$N(B) = \#(X_B). \quad (2.1)$$

Definição 2.6 (Medida de intensidade) Seja  $X$  um processo pontual em  $S \subset \mathbb{R}^d$  e  $N$  sua função de contagem. A medida de intensidade de  $X$  é dada por

$$\lambda(B) = EN(B). \quad (2.2)$$

Se  $\lambda$  puder ser escrita como

$$\lambda(B) = \int_B f(x) dx \quad (2.3)$$

para uma função  $f$  definida em  $S$ , não negativa e localmente integrável, chamamos  $f$  de função de intensidade do processo.

Em outras palavras, a função de contagem mensura a quantidade de pontos do processo incidentes em um subconjunto  $B$  do espaço. Já a medida de intensidade representa a quantidade esperada de pontos do processo sobre o espaço.

Exemplo 2.7 Se  $X$  é um processo Binomial em  $B \subset S$ , com  $n$  pontos distribuídos com densidade  $f$ , então fazendo  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  com  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  i.i.d., as probabilidades do tipo

$$P(N(B_1) = k_1, \dots, N(B_m) = k_m)$$

podem ser calculadas via argumentos combinatórios. Podemos, por exemplo, fazer

$$A_1 = B_1; A_2 = B_1 \cap B_2; \dots; A_m = B_m \cap (\bigcup_{i=1}^{m-1} B_i);$$

e obter

$$P(N(B_1) = k_1, \dots, N(B_m) = k_m) = \sum_{l_1, \dots, l_m} P(N(B_1) = l_1, \dots, N(A_m) = l_m);$$

para valores convenientes de  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  tais que  $l_1 + \dots + l_m = k_1 + \dots + k_m$ . Isso nos daria que

$$P(N(B_1) = k_1, \dots, N(B_m) = k_m) = \sum_{l_1, \dots, l_m} P(N(A_1) = l_1, \dots, N(A_m) = l_m);$$

Como  $A_1, \dots, A_m$  são disjuntos, então  $(N(A_1), \dots, N(A_m))$  tem distribuição multinomial, concluindo o cálculo.



Exemplo 2.8 No caso de um processo de Poisson  $X$  com medida de intensidade  $\lambda$ , a de nição 1.3 é feita em duas partes: a primeira fala da distribuição de eventos do tipo  $f N(B) = \lambda g$ , enquanto a segunda nos dá uma forma de entender as correlações do vetor  $(N(A_1); \dots; N(A_m))$ .

De fato, à luz da proposição 1.4, seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, temos que

$$\begin{aligned} P(N(B_1) = k_1; \dots; N(B_m) = k_m) &= \sum_{l_1, \dots, l_m} P(N(A_1) = l_1; \dots; N(A_m) = l_m) \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_m} P(N(A_1) = l_1) \dots P(N(A_m) = l_m); \end{aligned}$$

uma vez que  $N(A_1); \dots; N(A_m)$  são independentes com  $N(A_k) \sim \text{po}(\lambda(A_k))$ .

## 2.3 Eventos Vácuos

Para concluir este capítulo vamos estudar uma maneira mais simples de caracterizar a distribuição de um processo pontual. Como vimos, a caracterização vista na seção anterior, apesar de conceitualmente simples, pode ser um tanto trabalhosa.

Antes de continuar, considere o conjunto  $S$ , onde vivem os pontos do nosso processo pontual, seja um espaço métrico separável (o que vale para  $S = \mathbb{R}^d$ ).

Nestas condições, denotaremos por evento vácuo todo evento  $E_B \in \mathcal{N}_{lf}$  do tipo

$$E_B = \{ \omega \in \Omega : \#(\omega \cap B) = 0 \}$$

para  $B \in \mathcal{B}(S)$  limitado. Isto é, para um boreliano limitado  $B$ , é o conjunto das configurações localmente finitas que não têm pontos incidentes em  $B$ .

A probabilidade de ocorrência de um evento vácuo é chamada de probabilidade vácuo:

$$v(B) = P(X \in E_B) = P(N(B) = 0)$$

A ideia central, colocada de maneira simplista e explicitada no resultado abaixo, é que a separabilidade do espaço permite que contemos o total de pontos em uma série de conjuntos limitados usando apenas a informação de onde tais pontos não estão.

Lema 2.9 Se  $S$  é um espaço métrico separável, então

$$N_{lf} = (N_{lf}^0)$$

onde

$$N_{lf}^0 = \{ B \in \mathcal{N}_{lf} : \#(B \setminus B^0) = 0 \}$$

é a classe dos eventos vácuos.

Demonstração: Como  $N_{lf}^0 \subseteq N_{lf}$ , sabemos que  $(N_{lf}^0) \subseteq (N_{lf}) = N_{lf}$ . Resta, portanto, provar que  $N_{lf} \subseteq (N_{lf}^0)$ .

Como  $S$  é separável, conseguimos uma sequência de partições  $F_n = \{A_{n,i} : i = 1, \dots, k_n\}$  de  $S$ , onde  $F_{n+1}$  é refinamento de  $F_n$ , e tal que se  $x \in S$ , então existe um  $n_0$  suficientemente grande tal que se  $n \geq n_0$  e  $x \in A_{n,i}$ , então  $x \in A_{n_0,i}$ .

Figura 2.1: Esquerda: Exemplo de partição de uma região do  $\mathbb{R}^2$  com os pontos de  $X$  (em vermelho) não separados. Direita: Refinamento da partição anterior que separa os pontos de  $X$ .

Nessas condições, temos que, para  $B \in \mathcal{N}_{lf}$ , vale que  $\#(B \setminus B^0) = 0$ ,  $\exists n_0 \geq 1$  com  $k_{n_0} = m$  ( $n_0$  depende de  $B \in \mathcal{N}_{lf}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  e  $B \in \mathcal{B}_0$ ), tais que  $\exists n \geq n_0$ ;  $\exists j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, k_n\}$  tais que

- $\#(B \setminus A_{n,j_i}) > 0$ ;  $\forall i = 1, \dots, m$
- $\bigcap_{i=1}^m (B \cap A_{n,j_i}) = \emptyset$

Assim, se

$$A(n; m; B; f_{j_1}; \dots; j_m g) = \sum_{i=1}^m f_{j_i} \cdot \mathbb{1}_{\{ \#(B \setminus A_{n;j_i}) > 0 \}} \cdot \mathbb{1}_{\{ \bigcap_{i=1}^m A_{n;j_i} = \emptyset \}}$$

então  $A(n; m; B; f_{j_1}; \dots; j_m g) \in (N_{lf}^0)$  e

$$f_{j_1} \cdot \mathbb{1}_{\{ \#(x \setminus B) = m \}} = \sum_{n_0=1}^n \sum_{n_1=1}^{n-n_0} \dots \sum_{j_1 < \dots < j_m < n} A(n; m; B; f_{j_1}; \dots; j_m g),$$

que pertence a  $(N_{lf}^0)$ .

O seguinte resultado será particularmente útil na caracterização de um processo e suas propriedades. Ele diz que é possível conhecer um processo pontual por inteiro, sabendo apenas as probabilidades de seus eventos vácuos:

**Corolário 2.10** A distribuição processo pontual  $X$  é unicamente determinada por suas probabilidades vácuas. Ou seja, a distribuição de  $X$  é determinada unicamente por  $\nu(B)$ ,  $B \in \mathcal{B}(R^d)$  limitados.

**Demonstração:**  $N_{lf}^0$  é  $\sigma$ -sistema, pois

$$f_{j_1} \cdot \mathbb{1}_{\{ \#(x \setminus B) = 0 \}} \cdot f_{j_2} \cdot \mathbb{1}_{\{ \#(x \setminus A) = 0 \}} = f_{j_1} \cdot \mathbb{1}_{\{ \#(x \setminus (A \cap B)) = 0 \}}$$

e se  $A, B \in \mathcal{B}_0$ , então  $A \cap B \in \mathcal{B}_0$ . Portanto, o lema 2.3 nos garante que a distribuição de  $X$  em  $N_{lf}^0$  determina sua distribuição em todo o  $N_{lf}$ .

# 3 Processos de Poisson em Geral

No capítulo 1, apresentamos uma definição para o processo de Poisson, mas não chegamos a construí-lo e nem exploramos a fundo as suas principais propriedades. Dedicaremos então este capítulo a um estudo mais profundo dos Processos de Poisson.

Para começar apresentaremos formas distintas de caracterizá-los, valendo-nos dos resultados discutidos no capítulo 2. A seguir, serão apresentadas as principais propriedades do processo e formas de construí-lo.

## 3.1 Caracterização de Processos de Poisson

### 3.1.1 Caracterização por probabilidades vácuas

A primeira e mais simples forma de caracterizar os processos de Poisson é através de suas probabilidades vácuas.

Lembre que, conforme provamos no corolário 2.10, um processo pontual é completamente caracterizado por suas probabilidades vácuas. Ou seja, pelos valores de  $P(N(B) = 0)$  para cada boreliano limitado  $B \subset \mathbb{R}^d$ .

Para o processo de Poisson, podemos calcular essas probabilidades à luz da definição 1.3. Neste caso, se  $X \sim \text{Poisson}(S; \lambda)$  e  $|B| = \int_B dx$ , temos para  $B \subset \mathbb{R}^d$  que  $N(B)$  tem distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda |B|$  e, portanto:

$$\begin{aligned} p_0(B) &= P(N(B) = 0) \\ &= \exp(-\lambda |B|) \end{aligned} \tag{3.1}$$

O corolário 2.10 nos permite então concluir o seguinte resultado.

**Teorema 3.1** Seja  $X$  um processo pontual em  $\mathbb{R}^d$ . Nestas condições,  $X \sim \text{Poisson}(S; \lambda)$

se, e somente se,  $X$  possui probabilidades vácuas dadas por  $P(X(B) = 0) = \exp(-\lambda(B))$ ,  $B \in \mathcal{B}^0$ .

### 3.1.2 Caracterização por independência

Uma das propriedades mais importantes do processo de Poisson, que exploramos na Proposição 1.4, é o fato de que, para uma família de conjuntos  $B_1, B_2, \dots \subset S$  disjuntos, o total de pontos de  $X$  que incidem em cada conjunto são independentes. Mas à luz do Lema 2.4 e do Corolário 2.10, como veremos abaixo, isso implica que os próprios processos  $X_{B_i}$ ,  $i=1, \dots$  são independentes. Isso significa que o conhecimento sobre o comportamento do processo em um local não adiciona informação sobre como esse processo se comporta em outros locais.

**Proposição 3.2** Sejam  $X$  um processo de Poisson em  $S$  e  $B_1, B_2, \dots \subset S$  disjuntos.  $X_{B_1}, X_{B_2}, \dots$  são independentes.

**Demonstração:**

Para cada  $i \geq 1$ , de na

$$A_i = \{X_{B_i} \leq c; C \in \mathcal{B}^0\} = \{X_{B_i} \leq c; E \in \mathcal{N}_{\text{if}}^0\};$$

e observe que do mesmo modo que  $\mathcal{N}_{\text{if}}^0$  é um  $\sigma$ -sistema gerando  $\mathcal{N}_{\text{if}}$ , temos que  $A_i$  é também um  $\sigma$ -sistema gerando

$$\{X_{B_i} \leq c; E \in \mathcal{N}_{\text{if}}\};$$

Tome agora  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{B}^0$  e note que como  $B_1, \dots, B_n$  são disjuntos, então

$$\begin{aligned} P(X_{B_i} \leq c_i; 1 \leq i \leq n) &= P(X \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i \leq c; 1 \leq i \leq n) \\ &= P(X \setminus (\bigcup_{i=1}^n B_i \setminus C_i) \leq c) \\ &= e^{-\sum_{i=1}^n \lambda(B_i \setminus C_i)} \\ &= e^{-\sum_{i=1}^n \lambda(B_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(C_i)} \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda(B_i) + \lambda(C_i)} \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_{B_i} \leq c_i): \end{aligned}$$

Isso mostra que  $A_i^0, i = 1, \dots, n$  são classes independentes, e como são também sistemas, segue do Teorema 4.2 em [1] que  $(X_{B_i}) = (A_i); i = 1, \dots, n$  são também independentes.

Como isso vale para qualquer  $n \geq 1$ , o resultado segue.

A seguir, mostramos que, em certo sentido, o processo de Poisson é o único processo pontual que possui essa propriedade de independência entre disjuntos.

**Teorema 3.3** Seja  $X$  um processo pontual em  $R^d$  sem pontos  $x$  os  $(P(X \setminus \{x\} = \emptyset) > 0$  para quaisquer  $x \in R^d$ ) e tal que  $X_A$  e  $X_B$  são independentes sempre que  $A \cap B = \emptyset$ . Nessas condições, existe uma medida localmente finita tal que  $P(X \setminus A = \emptyset) = e^{-m(A)}$ . Se, além disso,  $P(N(A) = 0) = 1$  para qualquer  $A \in B(R^d)$  com  $m(A) = 0$ , então  $X$  é um processo de Poisson com medida de intensidade  $m$ .

**Demonstração:** Seja  $X$  um processo que satisfaz as condições acima, e seja  $\mu$  de nida em  $B(R^d)$  como

$$\mu(A) = -\ln P(X \setminus A = \emptyset). \tag{3.2}$$

Começamos mostrando que  $\mu$  de nida acima é localmente finita. Para isso precisamos mostrar que se  $A \in B_0(R^d)$  é limitado, então  $P(N(A) > 0) > 0$ .

Antes de mais nada note que um argumento simples por indução, seguindo os argumentos da demonstração da proposição 3.2, nos permite concluir que a propriedade de independência vale para enumeráveis conjuntos disjuntos  $B_1, B_2, \dots$ .

Suponha agora que  $P(N(A) > 0) = 0$ , e note que como  $A$  é limitado, existe um retângulo  $R_1$  fechado tal que  $A \subset R_1$  e portanto  $P(N(R_1) > 0) = P(N(A) > 0) = 0$ .

Dividindo os lados de  $R_1$  na metade, particionamos  $R_1$  em  $2^d$  retângulos  $R_1^1, \dots, R_1^{2^d}$  disjuntos. Pela propriedade de independência, temos que

$$0 = P(N(R_1) > 0) = P(N(R_1^k) > 0; k = 1, \dots, 2^d) = \prod_k P(N(R_1^k) > 0);$$

e portanto existe algum  $k^0 = 1, \dots, 2^d$  para o qual  $P(N(R_1^{k^0}) > 0) = 0$ .

Fazendo  $R_2 = \overline{R_1^{k^0}}$ , encontramos que  $R_2 \subset R_1$  e  $P(N(R_2) > 0) = 0$ .

Repetindo sucessivamente este mesmo procedimento, encontramos uma sequência

decrecente de retângulos compactos  $(R_n)_{n \geq 1}$ , com  $\bigcap_n R_n = \{x_0\}$  e  $P(N(R_n) > 0) = 1$  para todo  $n$ .

Mas isso nos dá que  $P(N(\{x_0\}) > 0) = 1$  e  $x_0$  é um ponto  $x_0$  de  $X$ , o que é um absurdo. Concluimos assim que  $P(N(A) = 0) > 0$  e que  $\mu$  é localmente finita.

Vamos provar agora que  $\mu$  é uma medida.

- i. Como  $P(X \setminus A = \emptyset) = 1$ ,  $\mu(A) = 0$ ;
- ii.  $\mu(\emptyset) = -\ln P(X \setminus \emptyset = \emptyset) = -\ln 1 = 0$ ;
- iii. Para mostrar que  $\mu$  é  $\sigma$ -aditiva, precisamos utilizar a hipótese de independência entre disjuntos.

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= -\ln P(X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset) \\ &= -\ln \prod_{k=1}^{\infty} P(X \setminus B_k = \emptyset) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k); \end{aligned}$$

mostrando que  $\mu$  é uma medida em  $(\mathbb{R}^d; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  e concluindo a primeira parte do teorema.

Suponha agora que  $P(N(A) = 0) = 1$  para  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  com  $m(A) = 0$ . Neste caso, se  $m(A) = 0$ , então  $\mu(A) = 0$  e a medida  $\mu$  é absolutamente contínua em relação à Lebesgue. Pelo Teorema de Radon-Nykodim, existe uma função mensurável e positiva  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\mu(B) = \int_B f(x) dx;$$

concluindo o resultado.

Observação 3.4 É possível alterar a definição do processo de Poisson para usar uma medida de intensidade que possua parte singular à medida de Lebesgue. Mas isso trás complicações, como a possível necessidade de diversos pontos de  $X$  em um mesmo ponto de  $\mathbb{R}^d$ , o que não é possível na nossa definição de processo pontual. É possível contornar tal problema, mas isso deixaria o trabalho mais longo do que o permitido.

### 3.1.3 Caracterização por integrais

Uma forma de caracterizar o processo de Poisson é por meio de sua expansão em integrais:

Proposição 3.5 i.  $X$  Poisson( $S; \nu$ ) se, e somente se, para todo  $B \subseteq S$  tal que  $\nu(B) < 1$  e se para  $F \subseteq \mathcal{N}_f$

$$P(X_B \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\nu(B)) \nu(B)^n}{n!} \int_B \int_B \dots \int_B 1_{f(x_1, \dots, x_n) \in F} \prod_{i=1}^n \nu(dx_i) \quad (3.3)$$

(se  $n = 0$ , substituímos as integrais por  $1_{f \in F}$ ).

ii. Se  $X$  Poisson( $S; \nu$ ), então as funções  $h : \mathcal{N}_f \rightarrow [0; 1]$ , com  $B \subseteq S$  e  $\nu(B) < 1$ , satisfazem

$$E[h(X_B)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\nu(B)) \nu(B)^n}{n!} \int_B \int_B \dots \int_B h(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \nu(dx_i)$$

Demonstração: Primeiro suponha que  $X$  Poisson( $S; \nu$ ).

i. Utilizando probabilidade total e o fato de que  $P(A) = E(1_A)$ , temos:

$$\begin{aligned} P(X_B \in F) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_B \in F | N(B) = n) P(N(B) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_B \int_B \dots \int_B 1_{f(x_1, \dots, x_n) \in F} \prod_{i=1}^n \nu(dx_i) \frac{\exp(-\nu(B)) \nu(B)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\nu(B)) \nu(B)^n}{n!} \int_B \int_B \dots \int_B 1_{f(x_1, \dots, x_n) \in F} \prod_{i=1}^n \nu(dx_i); \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade vem do fato de que  $X_B$ , condicionado a  $N(B) = n$ , é um processo Binomial. Ou seja,  $(X_B | N(B) = n) = f(X_1, \dots, X_n)$ , onde  $X_i, i = 1, \dots, n$  são i.i.d. com densidade  $\frac{\nu(dx)}{\nu(B)} 1_B(x)$ .

Reciprocamente, se  $X$  satisfaz (3.3), então podemos fazer  $F = f \in \mathcal{N}_f : \setminus B = \emptyset$  e ver que  $1_{f(x_1, \dots, x_n) \in F} = 0$  se  $n \geq 1$  e  $f(x_1, \dots, x_n) \in B$ . Com isso segue que

$$P(X_B = \emptyset) = P(X_B \in F) = e^{-\nu(B)};$$

e  $X$  Poisson( $S; \nu$ ).



ii. Primeiro notamos que (i) é um caso particular, onde

$$h(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{1}_{\{x_1, \dots, x_n\} \in F}$$

A partir daí a demonstração segue diretamente usando a prova padrão.

Para concluir vamos usar a proposição acima para ilustrar as ideias da demonstração de um importante resultado, conhecido como teorema de Slivnyak-Mecke. Tal resultado permite que analisemos o comportamento médio de um processo de Poisson em torno de cada de seus pontos.

**Teorema 3.6 (Slivnyak-Mecke)** Se  $X$  é Poisson( $S; \lambda$ ), para funções  $h : S \times \mathbb{N} \rightarrow [0; 1]$ ,

$$E \sum_{x \in X} h(x; X \setminus \{x\}) = \int_S E h(x; X) \lambda(x) dx,$$

onde o lado esquerdo é finito se, e somente se, o lado direito é finito.

**Demonstração:** Vamos começar supondo que a função  $h$  tem suporte em  $B \in \mathcal{B}_0(S)$ , no sentido que

$$h(x; \omega) = h(x; \omega \setminus B);$$

para  $x \in B$  e  $h(x; \omega) = 0$  para  $x \notin B$ .

Primeiro observe que, pela proposição 3.5, vale que

$$E[h(x; X)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda(B)) \lambda(B)^n}{n!} \int_B \int_B h(x; \omega) \prod_{i=1}^n \lambda(x_i) dx_i;$$

para todo  $x \in S$ .



Sua expansão natural, que apresentamos na sequência, considera que a função  $h$  é definida em um espaço de dimensão maior,  $S^n \rightarrow \mathbb{N}_f$ .

**Teorema 3.7 (Slivnyak-Mecke Estendido)** Sejam  $X \sim \text{Poisson}(S; \lambda)$ . Então para qualquer  $n$  natural,  $n$  pontos distintos  $x_1, \dots, x_n \in X$  e  $h : S^n \rightarrow \mathbb{N}_f \cup \{0\}$ ,

$$E \int_{x_1, \dots, x_n \in X} h(x_1, \dots, x_n; X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) = \int_S \dots \int_S E h(x_1, \dots, x_n; X) \prod_{i=1}^n \lambda(x_i) dx_i.$$

**Demonstração:** Segue diretamente da aplicação de indução finita ao Teorema de Slivnyak-Mecke.

### 3.2 Propriedades

A seguir vamos nos valer das diferentes caracterizações do processo de Poisson para estudar algumas de suas principais propriedades.

Começemos com uma simples. Para isso tome  $X \sim \text{Poisson}(\mathbb{R}^d; \lambda)$  e  $R$  uma reta em  $\mathbb{R}^d$ . Se  $d > 1$ , como  $R$  é unidimensional, sabemos que  $\lambda(R) = 0$ , e portanto  $P(N(R) = 0) = 1$ .

Por outro lado, existem infinitas retas passando por pontos de  $X$ . Tome então dois pontos  $x, y \in X$  e seja  $R(x, y)$  a reta definida por  $x, y$ . O que podemos falar sobre  $R(x, y)$ ? Existe algum outro ponto de  $X$  passando por esta reta?

Para responder esta pergunta, tome  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ , e seja

$$H(x_1, \dots, x_k) = \lambda(\text{hiperplano gerado por } x_1, \dots, x_k).$$

o hiperplano gerado pelos pontos  $x_1, \dots, x_k$ .

Defina agora a função  $h : (\mathbb{R}^d)^k \rightarrow \mathbb{N}_f$  dada por

$$h(x_1, \dots, x_k) = 1_{H(x_1, \dots, x_{k-1})}(x_k):$$

Deste modo, a variável

$$M_k = \frac{1}{k!} E \sum_{x_1, \dots, x_k \in X} h(x_1, \dots, x_k)$$

conta do total de hiperplanos de dimensão menor ou igual a  $k - 2$  que contém ao menos  $k$  pontos de  $X$ .

Note agora que, pelo teorema de Slyvniak-Mecke Estendido temos que se  $k \leq d + 1$ , então

$$\begin{aligned} k! E[M_k] &= E \sum_{x_1, \dots, x_k \in X} h(x_1, \dots, x_k) \\ &= \int \int \dots \int h(x_1, \dots, x_k) \prod_{i=1}^k \lambda(x_i) dx_i \\ &= \int \int \dots \int 1_{H(x_1, \dots, x_{k-1})}(x_k) \prod_{i=1}^k \lambda(x_i) dx_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Isso mostra que  $P(M_k = 0) = 1$ , respondendo nossa pergunta original ( $k = 3$ ) e estabelecendo o seguinte resultado.

**Proposição 3.8** Se  $X \sim \text{Poisson}(R^d; \lambda)$ , então para cada  $2 \leq k \leq d + 1$ , com probabilidade 1, não existem  $k$  pontos de  $X$  em um mesmo hiperplano de dimensão  $k - 2$ .

### 3.2.1 Superposição e Emagrecimento

A seguir vamos trabalhar com duas ideias antagônicas, mas igualmente importantes para o estudo dos processos de Poisson: superposição e emagrecimento. A primeira trata da adição de pontos a um processo através da união de processos de Poisson, enquanto a segunda fala da remoção de pontos de um processo de Poisson.

Começemos pela superposição.

**Definição 3.9** Uma superposição é uma união disjunta de processos pontuais  $X_i, i \in \mathbb{N}$ .

Estamos interessados, obviamente, na união de Processos de Poisson, mais especificamente na união de processos independentes. Mas antes de seguir precisamos fazer algumas considerações gerais.

Dados dois processos pontuais  $X$  e  $Y$ , de na  $Z = X \cup Y$ , e denote por  $N_X(\cdot)$ ,  $N_Y(\cdot)$  e  $N_Z(\cdot)$  suas respectivas funções de contagem. Observe que se  $X \cap Y = \emptyset$  quase certamente, então para qualquer  $B \in \mathcal{B}_0$  vale que

$$N_Z(B) = N_X(B) + N_Y(B):$$

Em particular, se  $X \sim \text{Poisson}(S; \lambda_1)$  e  $Y \sim \text{Poisson}(S; \lambda_2)$ , então

$$\begin{aligned} z(B) &:= E[N_Z(B)] \\ &= E[N_X(B)] + E[N_Y(B)] \\ &= \lambda_1 z_X(B) + \lambda_2 z_Y(B) \\ &:= \int_B \lambda_1 dx + \int_B \lambda_2 dx \\ &= \int_B (\lambda_1 + \lambda_2) dx; \end{aligned}$$

de modo que, se  $Z$  é um processo de Poisson, sua intensidade deve ser  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

Para verificar sob que condições  $Z$  seria um processo de Poisson, podemos apelar para suas probabilidades vácuas e notar que  $N_Z(B) = 0$  se, e somente se,  $N_X(B) = 0$  e  $N_Y(B) = 0$ . Assim temos  $P(N_Z(B) = 0) = P(N_X(B) = 0; N_Y(B) = 0)$ ; e se supormos que  $X; Y$  são independentes encontramos que

$$P(N_Z(B) = 0) = P(N_X(B) = 0) P(N_Y(B) = 0) = e^{-\lambda_1 z_X(B)} e^{-\lambda_2 z_Y(B)} = e^{-z(B)};$$

mostrando que se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $Z$  é um processo de Poisson.

Essa ideia pode ser usada de maneira ainda mais geral, como enunciado no resultado abaixo.

**Proposição 3.10** Sejam  $X_i \sim \text{Poisson}(S; \lambda_i); i \in \mathbb{N}$  processos de Poisson independentes, e suponha que  $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$  é localmente integrável. Nestas condições, temos que  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$  é uma união disjunta quase certamente e,  $X \sim \text{Poisson}(S; \lambda)$ .

**Demonstração:** Vamos mostrar que a  $X_1 \cap X_2$  é uma união disjunta. Esse caso se estende de forma natural para o caso enumerável, dado que todos os processos são mutuamente disjuntos. Tomando  $B_n$  como a bola centrada na origem de raio  $n$ , podemos escrever a probabilidade de os processos não serem disjuntos como um limite no raio  $n$ :

$$P(X_1 \cap X_2 \neq \emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_1 \cap X_2 \cap B_n \neq \emptyset)$$

Agora, condicionamos ao número de pontos de  $X_1$  em  $B_n$ :

$$P(X_1 \setminus X_2 \in \emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} P(x_1^1; \dots; x_1^i \setminus X_2 \setminus B_n \in \emptyset | N(B_n) = i) P(N_1(B_n) = i) = 0,$$

visto que a probabilidade dentro do somatório é sempre nula.

A segunda parte do teorema segue do teorema 3.1. Sejam  $B \subseteq S$  limitado e  $\lambda_i(B) = \int_B \lambda_i(x) dx$ . As probabilidades vácuas de  $X$  são dadas por

$$\begin{aligned} P(X_B = \emptyset) &= \prod_{i=1}^{\infty} P(X_i \setminus B = \emptyset) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \exp(-\lambda_i(B)) \\ &= \exp(-\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(B)) \end{aligned}$$

Passemos agora para o chamado emagrecimento de processos de Poisson. Informalmente falando o emagrecimento de um processo pontual  $X$  consiste em selecionar cada ponto  $x$  do processo com probabilidade  $p(x) \in (0, 1)$ , independentemente dos demais, removendo os não selecionados.

Um modo mais formal de definir tal processo é através das chamadas processos pontuais marcados. Um processo pontual marcado é simplesmente um processo

$$X^0 = \{ (x; m_x) : x \in X \text{ e } m_x \in M \}$$

formado por pontos de um processo pontual  $X$  com marcas  $m_x$  (aleatórias ou não) em algum espaço  $M$ . Em geral, se  $X$  é um processo pontual em  $S$  e  $M$  é um espaço métrico,  $X^0$  pode ser visto como um processo pontual em  $S \times M$ .

Abaixo damos um exemplo de Processo de Poisson com marcas de Bernoulli. Tal processo será usado a seguir para melhor definir o emagrecimento de um processo de Poisson.

Definição 3.11 (Processo de Poisson marcado) Sejam  $X$  um processo de Poisson com função de intensidade  $\lambda$ ,  $p : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  uma função mensurável e  $m : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  de nida

por

$$m(x; u) = 1_{f u \leq p(x)g}.$$

Considere uma enumeração para os pontos de  $X$ , de forma que podemos escrever  $X = \{x_1; x_2; \dots; x_g\}$ . Definimos, então, uma sequência  $\{U_1; U_2; \dots; U_g\}$  de variáveis aleatórias iid independentes de  $X$ , tais que  $U_i \sim \text{Unif}[0; 1]$ . A partir de  $X$  e  $m$ , podemos definir o processo marcado  $X^0 \subset \mathbb{R}^d \times [0; 1]^g$  como

$$X^0 = \{(x_k; m(x_k; U_k)) : k = 1; 2; \dots; g\}. \quad (3.4)$$

Sejam  $p : S \rightarrow [0; 1]$  uma função e  $X$  um processo pontual em  $S$ . Definimos um novo processo pontual  $X_{\text{emag}} \subset X$  da seguinte maneira: cada ponto  $x$  de  $X$  entra em  $X_{\text{emag}}$  com probabilidade  $p(x)$ , independentemente dos outros pontos. Isso equivale a dizer que, para o processo marcado  $X^0$ , selecionamos os pontos com  $m(x_i; U_i) \leq p$ . Dizemos, então, que  $X_{\text{emag}}$  é um emagrecimento independente de  $X$  com probabilidade de retenção  $p$ . De maneira mais formal:

Definição 3.12 (Emagrecimento de um processo)  $X_{\text{emag}}$  é um emagrecimento de  $X$  com probabilidade de retenção  $p$  se, nas condições da definição 3.11,  $X_{\text{emag}}$  é um subconjunto de  $X$  satisfazendo

$$X_{\text{emag}} = \{x_k \in X : m(x_k; U_k) \leq p; k = 1; 2; \dots; g\}$$

Figura 3.1: Representação do emagrecimento de um processo de Poisson com probabilidade de retenção  $p = 0,7$ . O processo  $X$  é constituído por todos os pontos, e  $X_{\text{emag}}$ , apenas pelos pontos pretos.

Valendo-nos novamente da caracterização por probabilidades vácuas, vamos provar que o emagrecimento de um processo de Poisson é também um processo de Poisson.

Proposição 3.13 Sob as condições da definição acima e de modo  $\lambda_{\text{emag}}(x) = p(x) \lambda(x)$ , os processos pontuais  $X_{\text{emag}}$  e  $X \setminus X_{\text{emag}}$  são processos de Poisson independentes, com respectivas funções de intensidade  $\lambda_{\text{emag}}$  e  $\lambda - \lambda_{\text{emag}}$ .

Demonstração: Vamos começar escrevendo os eventos vácuos do processo  $X_{\text{emag}}$ . Sendo  $B \in \mathcal{B}^0$ , note que

$$\{X_{\text{emag}} \setminus B = \emptyset\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{N(B) = n; m(x_k; U_k) = 0; \forall k = 1, \dots, n; x_k \in X \setminus B\}$$

Para calcular as probabilidades vácuas podemos condicionar ao total de pontos de  $X$  em  $B$ , encontrando que

$$P(X_{\text{emag}} \setminus B = \emptyset) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_{\text{emag}} \setminus B = \emptyset | N(B) = n) P(N(B) = n)$$



O primeiro fator da multiplicação equivale a:

$$\begin{aligned}
 P(X_{\text{emag}} \setminus B = \emptyset | N(B) = n) &= P(m(X_k; U_k) = 0; k = 1; \dots; n) \\
 &= [P(m(X_1; U_1) = 0)]^n \\
 &= [P(U_1 > p(X_1))]^n \\
 &= \int_B P(U_1 > p(x)) \frac{p(x)}{N(B)} dx \\
 &= \frac{1}{N(B)^n} \int_B (1 - p(x)) p(x) dx
 \end{aligned}$$

Como

$$P(N(B) = 0) = \frac{\exp(-N(B)) N(B)^n}{n!};$$

então

$$\begin{aligned}
 P(X_{\text{emag}} \setminus B = \emptyset) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-N(B)) N(B)^n}{n!} \int_B (1 - p(x)) p(x) dx^n \\
 &= \exp(-N(B)) \exp\left(\int_B (1 - p(x)) p(x) dx\right) \\
 &= \exp(-N(B)) \exp\left(\int_B p(x) dx\right) \\
 &= \exp\left(\int_B p(x) dx - N(B)\right),
 \end{aligned}$$

que é a probabilidade vácuca de um processo de Poisson com intensidade  $p(x)$ . A independência de  $X_{\text{emag}}$  e  $X_{N(B)}$  é consequência da independência dos  $X_k$ ,  $k = 1; 2; \dots$

Uma das utilidades dessa propriedade é que ela nos permite abordar de forma diferente os processos não homogêneos. O resultado abaixo estabelece que é possível escrever um processo não homogêneo como o emagrecimento de um processo homogêneo.

**Corolário 3.14** Seja  $X \sim \text{Poisson}(R^d; \lambda)$ , com  $\lambda$  limitada por  $c < 1$ . Então,  $X$  é o emagrecimento de um processo de Poisson homogêneo em  $R^d$  com intensidade  $c$ , utilizando a probabilidade de retenção  $p(x) = \lambda(x)/c$ .

**Demonstração:** É consequência direta da proposição 3.13, com alteração das notações. Note que a condição de  $\lambda(x) < c$  é necessária para garantir que  $p$  é uma probabilidade e o processo emagrecido está contido no original.

### 3.3 Construção do Processo de Poisson

Nesta seção, vamos nos basear no trabalho de Ferrari e Galvez ([3]) para apresentar a construção do processo de Poisson estacionário em  $\mathbb{R}^d$  a partir de uma partição do espaço em blocos. Em seguida, vamos introduzir uma forma de obter o processo não homogêneo por meio da projeção de um processo homogêneo em  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

#### 3.3.1 Construção do processo de Poisson homogêneo via partição em blocos

Iniciamos particionando  $\mathbb{R}^d$  em blocos retangulares  $B_i$  tais que

$$\begin{cases} B_i = A_i^1 \times \dots \times A_i^d \\ \mathbb{R}^d = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \end{cases}$$

onde todos os  $A_i^j$  são intervalos limitados.

Dada agora uma função  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0; 1)$  localmente integrável e  $\lambda(B) = \int_B \lambda(x) dx$ , vamos definir para cada  $i \in \mathbb{N}$  uma variável aleatória  $Y_i \sim \text{poi}(\lambda(B_i))$  e uma família  $f(U_i^k; k = 1, \dots, Y_i)$  de variáveis iid com densidade  $f(U_i^k) = \lambda(B_i)$  em  $B_i$ . Faça agora

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{f(U_i^k : k = 1, \dots, Y_i)\}. \quad (3.5)$$

Em outras palavras, para cada retângulo  $B_i$  da partição sorteamos o total  $Y_i$  de pontos presentes naquele retângulo. Em seguida preenchemos  $B_i$  com um processo Binomial com a intensidade adequada.

Tal construção se vale diretamente da definição 1.3, explorando a relação direta entre processos de Poisson e processos Binomiais.

**Proposição 3.15** O processo  $X$  definido em 3.5 é um processo de Poisson com função de intensidade  $\lambda$ .

Demonstração: Sejam  $C \in \mathcal{B}_0$  e  $N(C) = \#(X \cap C)$ . A probabilidade vácuua para  $C$  é:

$$\begin{aligned}
 P(N(C) = 0) &= \prod_{i \in \mathbb{N}} P(N(C \cap B_i) = 0) \\
 &= \prod_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} P(N(C \cap B_i) = 0 | N(B_i) = j) P(N(B_i) = j) \\
 &= \prod_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(N(C \cap B_i))^j}{(N(B_i))^j} \frac{\exp(-N(B_i)) (N(B_i))^j}{j!} \\
 &= \prod_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-N(B_i)) \frac{(N(C \cap B_i))^j}{j!} \\
 &= \prod_{i \in \mathbb{N}} \exp(-N(B_i)) \exp(N(C \cap B_i)) \\
 &= \prod_{i \in \mathbb{N}} \exp(-N(B_i \setminus C)) \\
 &= \exp(-N(C))
 \end{aligned}$$

### 3.3.2 Construção do processo de Poisson não-homogêneo via projeção

A partir da projeção de um processo de Poisson com intensidade constante 1, somos capazes de construir um processo de Poisson não homogêneo com intensidade  $\lambda(x)$ . Para fazer isso, contudo, precisamos considerar o processo de origem em uma dimensão maior que a do processo que desejamos obter.

Vamos começar de nindo a projeção. Tome  $Y \sim \text{Poisson}(\mathbb{R}^{d+1}; 1)$  e  $M(C) = \#(Y \cap C)$  para  $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^{d+1})$ . Tome  $\lambda: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  localmente integrável. Dado  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , de na  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1})$  como

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq \lambda(x)\}$$

De na a projeção  $X$  como o processo pontual em  $\mathbb{R}^d$  tal que

$$N(B) = M(B);$$

para  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ . Ou seja,

$$X = \{x \in \mathbb{R}^d : M(\lambda \mathbb{1}_x) > 0\};$$

Uma preocupação que pode surgir ao de nir esse processo é a possibilidade de dois pontos de  $Y$  serem projetados em um único ponto de  $R^d$ . Provaremos a seguir que a probabilidade de ocorrência desse cenário é nula.

Proposição 3.16 A probabilidade de dois pontos de  $Y$  serem projetados em um mesmo ponto é zero.

Demonstração: Dado  $x \in R^{d+1}$ , escreva  $x = (x_1; x_2)$  com  $x_1 \in R^d$  e  $x_2 \in R$ . E para  $(x_1; x_2) = x \in R^{d+1}$  tal que  $0 \leq x_2 \leq (x_1)$ , de na

$$R_x = f(x_1; 0) + (x_1; (x_1)); \quad \in [0; 1]g:$$

Ou seja,  $R_x$  é o segmento de reta entre  $(x_1; 0)$  e  $(x_1; (x_1))$ .

Denote por  $\nu$  a medida de intensidade de  $Y$ .

É importante notar que como  $\nu(R_x) = 0$  (como  $Y$  é homogêneo,  $\nu$  é a medida de Lebesgue em  $R^{d+1}$ ), então

$$P(Y \cap R_x = \emptyset) = P(M(R_x) = 0) = e^{-\nu(R_x)} = 1: \quad (3.6)$$

Posto isso, para  $x \in R^{d+1}$ , de na  $h(x; Y) = 1_{fY \setminus R_x \neq \emptyset}g$ , e para  $B \in B_0(R^d)$  faça

$$L = \sum_{x \in Y \setminus B} h(x; Y \cap f x g):$$

Assim,  $L$  é o total de pontos em  $Y \setminus B$  que possuem um segundo ponto de  $Y$  projetado em um mesmo ponto de  $X$ .

Note agora que, por Slivnyak-Mecke,

$$\begin{aligned} E(L) &= E \sum_{x \in Y} h(x; Y \cap f x g) 1_{f x \in B} g \\ &= \int_B E h(x; Y) (x) dx \\ &= \int_B E 1_{fY \setminus R_x \neq \emptyset} (x) dx \\ &= 0 \text{ (por 3.6)}. \end{aligned}$$

Como  $L \geq 0$ , isso signi ca que  $P(L = 0) = 1$ , demonstrando o resultado.

Note que o processo  $X$  resultante da projeção é Poisson com função de intensidade  $\lambda$ , pois

$$\begin{aligned}
 P(N(B) = 0) &= P(M(B) = 0) \\
 &= \exp\left(-\int_B \lambda(x) dx\right) \\
 &= \exp(-\lambda(B)).
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.17 Nesta seção, utilizamos a projeção para obter um processo de Poisson não-homogêneo a partir de um homogêneo. Outro uso interessante de projeção de processos é o chamado acoplamento. Traremos uma definição informal desse conceito conforme motivado por Ferrari e Galvez [4].

Chamamos de acoplamento a construção simultânea de dois processos, em que ambos são criados em função do mesmo dispositivo aleatório. Por exemplo, imagine que você resolveu se poupar do peso de algumas decisões e aleatorizou suas escolhas de vestimenta. Mas você determinou como regra que só pode usar camisetas coloridas com calças pretas. Nesse caso, você pode estabelecer como  $p$  a probabilidade de você usar uma calça preta e escolher um outro número  $q$   $0 < q < p$ . Todo dia pela manhã, você sorteia um número  $x \in [0, 1]$ . Você usa calças pretas se  $x < p$  e camisetas coloridas se  $x < q$ .

Algo parecido pode ser feito com processos de Poisson. Sejam dois processos  $X_1$  e  $X_2$  com respectivas taxas  $\lambda_1(x)$  e  $\lambda_2(x)$  tais que  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Esses processos podem ser acoplados, de forma que, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X_2$  só possua um ponto em  $t$  se  $X_1$  também o tiver. Uma forma de fazer isso é construir ambos como projeções de processos bidimensionais de taxa 1, em que projetamos os pontos abaixo das curvas  $\lambda_1(x)$  e  $\lambda_2(x)$ . Ilustramos essa construção abaixo - note que todos os pontos de  $X_2$  (isto é, os pontos azuis) pertencem também a  $X_1$ .

Figura 3.2: Exemplo de processos unidimensionais acoplados utilizando projeção de processos bidimensionais.  $X_1$  é composto por todos os pontos projetados na abscissa, enquanto  $X_2$  é composto apenas pelos pontos azuis.

## 3.4 Processos de exclusão - construção via Processos de Poisson

Como vimos anteriormente, o processo de Poisson é o único processo pontual que possui independência entre disjuntos. Ou seja, podemos distribuir pontos no espaço de tal forma que nosso conhecimento sobre o processo em uma região não impacta seu comportamento em uma região disjunta. Nesta seção vamos nos beneficiar dessa propriedade, além das propriedades de emagrecimento e superposição de processos, para construir o chamado processo de exclusão em  $Z$ , seguindo o trabalho de Seppäläinen [5].

### 3.4.1 Processo de exclusão

Seja a malha  $T = Z^d$ . Interprete cada ponto de  $T$  como uma casa, que pode estar livre ou ocupada por uma única partícula. Seguindo alguma lei, para cada partícula há momentos do tempo em que esta tenta saltar para casas vizinhas, independentemente das demais partículas. Como uma casa comporta no máximo uma partícula por vez, quando uma partícula tenta saltar, essa tentativa só é bem sucedida se a casa de destino estiver vazia; caso contrário, o salto não ocorre. Independentemente do salto ter ocorrido ou não, a partícula volta a esperar pelo momento de salto seguinte.

A lei que rege o momento dos saltos pode ser determinística ou aleatória. Um caso particular muito interessante é quando a lei do processo é aleatória para toda partícula e mantém a propriedade de Markov, ou seja, o movimento das partículas do processo não é influenciado pelo histórico. Como os momentos de salto são marcados por pontos distribuídos ao longo do tempo, sabemos (teorema 3.3) que o único processo pontual simples que permite essa característica de perda de memória é o processo de Poisson.

### 3.4.2 Construção gráfica

Vamos construir graficamente o processo de exclusão em uma dimensão (isto é,  $T = Z$ ) de duas formas diferentes. Como comentado, estamos assumindo que para cada  $n \in Z$ , a casa  $n$  está a qualquer momento ocupada por no máximo uma partícula. Além disso, para o processo unidimensional, vamos assumir que uma partícula pode saltar apenas uma unidade por vez, seja para a esquerda ou para a direita. Vamos chamar de  $O$  o estado de origem do processo de exclusão.

No eixo horizontal, representamos  $T = Z$ . Para cada  $n \in Z$ , criamos um eixo vertical  $t$  orientado para cima, representando o tempo. A configuração de origem é, portanto, posicionada em  $t = 0$ . Abaixo, representamos um exemplo em que  $O$  é o estado em que todas as casas negativas estão ocupadas, e as demais, vazias.

Figura 3.3: Exemplo de configuração inicial para o processo de exclusão em  $Z$ . A configuração  $O$  está representada no eixo horizontal, em que as partículas são representadas pelos círculos azuis, e cada semirreta tracejada representa o tempo para a respectiva casa.

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , vamos definir um processo de Poisson  $X_n$  homogêneo em  $\mathbb{R}^+$  com taxa  $\lambda > 0$ . Esse processo representa todas as tentativas de salto realizadas por partículas posicionadas em  $n$  (se  $n$  estiver vazia, nada acontece), e são independentes entre si.

A cada momento de  $t$  em que algum dos processos  $X_n$  possuir um ponto, faremos um sorteio. Uma tentativa de salto para a direita ocorre com probabilidade  $p$ , e para a esquerda, com  $1 - p$ . Feito o sorteio, representamos o resultado com uma seta. Por exemplo, se em  $t_0$  houve um ponto em  $X_{n_0}$ , ligaremos o ponto  $(n_0; t_0)$  a  $(n_0 + 1; t_0)$  ou  $(n_0 - 1; t_0)$ , dependendo do resultado do sorteio.

Figura 3.4: Exemplo de configuração dos momentos de tentativa de salto para o processo de exclusão. Os pontos dos processos  $X_n$  marcam a origem de cada vetor, e seu sentido indica o direcionamento das tentativas de salto.

Ao início do processo, todas as partículas se movem para cima com velocidade  $v > 0$ . Sempre que uma partícula, durante seu movimento, encontrar uma seta direcionada a uma casa vazia, essa partícula se moverá instantaneamente para a casa indicada. Desse modo, cada uma das partículas descreve um movimento vertical ao longo dos eixos temporais, ocasionalmente trocando de eixo.



Figura 3.5: Evolução da figura anterior, com destaque para as tentativas de salto bem-sucedidas, bem como o estado do processo em um momento arbitrário  $t^0$ .

### Construções Alternativas

As diversas propriedades dos Processos de Poisson nos permitem construir tais processos de diversas formas diferentes, dependendo do que pretendemos estudar.

Na construção apresentamos os pontos de cada processo eram classificados independentemente em instantes de salto para a direita ou para a esquerda. Isso corresponde a um emagrecimento do processo de Poisson.

Assim, outra forma de fazer essa construção é criar diretamente para cada posição  $x$ , dois processos de Poisson independentes  $X_n^d$  e  $X_n^e$ , que representam as tentativas de salto para a direita e esquerda, respectivamente. Por conveniência, vamos chamar as respectivas taxas desses processos de  $p$  e  $(1-p)$ , com  $0 < p < 1$ . A construção se dá de forma muito parecida, com exceção de que a direção dos saltos já está determinada. Ao início do processo, as partículas iniciam seu movimento no sentido de  $t$ , e tentativas de salto ocorrem sempre que uma partícula encontrar um ponto de qualquer um dos processos  $X_n^d$  e  $X_n^e$ .

É interessante observar que as construções acima foram feitas em uma dimensão por simplicidade. A construção do processo em  $Z^d$ , com  $d \geq 2$ , segue passos análogos.

Os processos de Poisson podem ser utilizados como base para outros mais complexos, o que pode ser útil por permitir representações mais ricas da realidade. Dedicaremos este capítulo a introduzir os processos de Cox, que se comportam, em termos simples, como processos de Poisson com intensidade aleatória. Vamos explorar propriedades básicas desses processos e alguns dos principais casos particulares. Concluiremos apresentando dois problemas reais que podem ser modelados utilizando processos de Cox.

## 4.1 Definição e propriedades

De maneira simples, podemos pensar em um processo de Cox em  $S$  como um processo de Poisson com intensidade dada por um campo aleatório  $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$ .

Antes de seguir para a definição formal de tal processo, vamos construir um exemplo simples de processo de Cox.

**Exemplo 4.1** Iniciamos com uma distribuição aleatória de bolas em  $\mathbb{R}^d$ . Podemos pensar, por exemplo, que cada bola possui raio unitário, com centros dados por um processo de Poisson  $Y$  de intensidade  $\lambda$ . Em seguida, definimos uma sequência de processos de Poisson independentes e de intensidade 1, restritos a cada bola e chamamos de  $X$  a união de todos esses processos.

Definamos agora

$$Z(x) = N_Y(B_1(x));$$

onde  $B_1(x)$  é a bola unitária centrada em  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $N_Y$  é a função de contagem do processo  $Y$ .

Pela proposição 3.10, condicionado a uma distribuição de bolas específica,  $X$  é um processo de Poisson. Porém, como as bolas são distribuídas aleatoriamente, podemos

ver o processo  $X$  como uma espécie de processo de Poisson com intensidade aleatória  $Z$ . Diremos então que  $X$  é processo de Cox dirigido por  $Z$ .

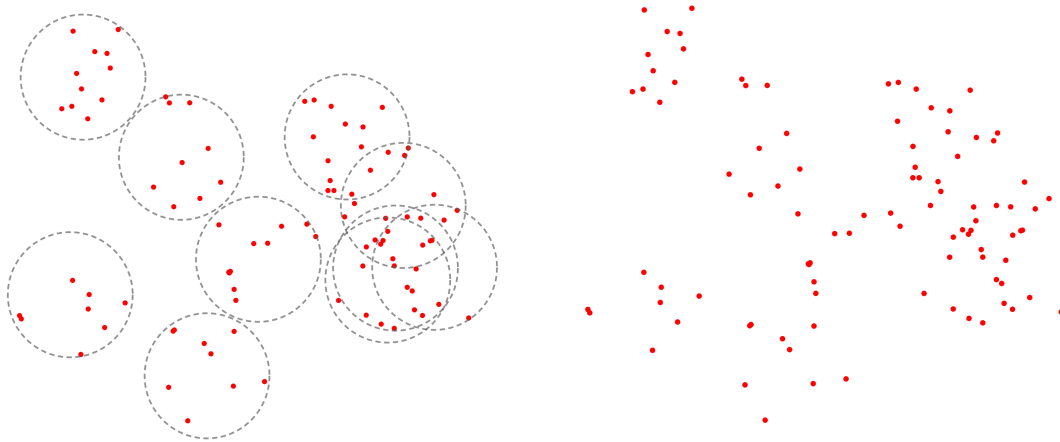


Figura 4.1: Exemplo de processo de Cox. À esquerda, uma realização do processo aleatório de distribuição de bolas (tracejadas em cinza), sobreposto dos processos de Poisson definidos em cada bola (em vermelho). À direita, a distribuição resultante dessa realização do processo.

Mais formalmente:

**Definição 4.2 (Processo de Cox)** Seja  $Z = fZ(x); x \in S_g$  um campo aleatório tal que  $Z(\cdot)$  é integrável com probabilidade 1. Se a distribuição condicional de  $X|Z$  for a de um processo de Poisson com função de intensidade  $Z$ , chamamos  $X$  de processo de Cox dirigido por  $Z$ .

Note que como  $Z$  é positivo, o teorema de Fubini nos garante que

$$\begin{aligned} E[N(A)] &= E[E[N(A)|Z]] \\ &= E \int_A Z(x) dx \\ &= \int_A E[Z(x)] dx: \end{aligned}$$

Segue assim que a função de intensidade desse processo será dada pelo valor esperado de  $Z(\cdot)$  avaliado em cada ponto, isto é,

$$\lambda(x) = E[Z(x)]. \tag{4.1}$$

A seguir, vamos caracterizar o processo de Cox calculando suas probabilidades vácuas.

**Proposição 4.3** *As probabilidades vácuas do Processo de Cox são dadas por*

$$P(N(B) = 0) = E \exp \left( - \int_B Z(x) dx \right) ; B \text{ limitado.} \quad (4.2)$$

**Demonstração:** Para provar esse resultado, condicionamos à intensidade aleatória  $Z$  e nos utilizamos do fato de  $X_j|Z$  ser Poisson.

Para  $B$  limitado e definindo  $p_z$  como a probabilidade vácua de  $X_j|Z$ , temos então:

$$\begin{aligned} P(N(B) = 0) &= E(P(N(B) = 0|Z)) \\ &= E \left( \prod_{x \in B} p_z(x) \right) \\ &= E \exp \left( - \int_B Z(x) dx \right) \end{aligned}$$

É importante destacar que, embora o processo de Cox seja uma extensão do processo de Poisson, ele não carrega todas as suas propriedades. Em particular, o processo de Cox não possui a propriedade de independência entre disjuntos (e tampouco poderia, conforme mostrado no teorema 3.3). Intuitivamente, faz sentido que a quantidade de pontos em um local adicione informação sobre  $Z$  e, por consequência, sobre o comportamento do processo em outros locais. Formalmente, podemos mostrar isso calculando a covariância da quantidade de pontos de  $X$  entre conjuntos disjuntos.

**Proposição 4.4** *Se  $A, B \subset S$  com  $\text{Var}(N(A)); \text{Var}(N(B)) < 1$ , então a covariância entre  $N(A)$  e  $N(B)$  é dada por*

$$\text{Cov}(N(A); N(B)) = \int_A \int_B \text{Cov}(Z(x); Z(y)) dx dy + P(A \cap B). \quad (4.3)$$

**Demonstração:** Vamos começar calculando  $E(N(A)N(B))$ . Para isso lembre que  $X_j|Z$  é um processo de Poisson de intensidade  $Z$ . Segue então do corolário 1.5 e do teorema de

Fubini que

$$\begin{aligned}
 E(N(A)N(B)) &= E[E(N(A)N(B))|Z] \\
 &= E \int_{Z^{A \setminus B}} Z(x) dx + E(N(A)|Z)E(N(B)|Z) \\
 &= E \int_{A \setminus B} Z(x) dx + \int_{Z^A} Z(x) dx \int_{Z^B} Z(y) dy \\
 &= (A \setminus B) + E \int_{Z^A} \int_{Z^B} Z(x)Z(y) dx dy \\
 &= (A \setminus B) + \int_{A \setminus B} E[Z(x)Z(y)] dx dy \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Agora, substituimos 4.4 na fórmula da covariância:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(N(A); N(B)) &= E(N(A)N(B)) - E(N(A))E(N(B)) \\
 &= (A \setminus B) + \int_{A \setminus B} E[Z(x)Z(y)] dx dy - \int_A E[Z(x)] dx \int_B E[Z(y)] dy \\
 &= \int_{A \setminus B} \text{Cov}(Z(x); Z(y)) dx dy + (A \setminus B)
 \end{aligned}$$

### 4.1.1 Emagrecimento de processos de Cox

A natureza aleatória do campo que dirige um processo de Cox faz com que tais processos não compartilhem todas as propriedades de um processo de Poisson. Já discutimos, por exemplo, que tais processos não possuem a propriedade de independência em conjuntos disjuntos.

No entanto, algumas propriedades do processo de Poisson são herdadas pelo processo de Cox. É o caso do emagrecimento, que discutiremos abaixo.

Seja  $X$  um processo de Cox dirigido por  $Z$ , e seja

$$f(x) : x \in Sg \quad [0;1] \tag{4.5}$$

um campo aleatório independente de  $(X; Z)$ . Vamos definir  $X_{\text{emag}}$  como o processo pontual obtido do emagrecimento independente dos pontos de  $X$ , com probabilidade de retenção  $f$ .

Note que a definição de processo de Cox e a proposição 3.13 nos garante que, condi-

onado ao campo  $Z$ , o emagrecimento de  $Y := X|Z$  com probabilidade de retenção  $\lambda$  é um processo de Poisson com função de intensidade  $\lambda(x) = \lambda(x)Z(x)$ . Portanto,  $X_{\text{emag}}$  é um processo de Cox dirigido por  $Z_{\text{emag}}(x) = \lambda(x)Z(x)$ .

Mais formalmente, usando a notação acima, veja que

$$\begin{aligned} P(X_{\text{emag}} \setminus A = \emptyset) &= E[P(X_{\text{emag}} \setminus A = \emptyset | Z)] \\ &= E[P(Y_{\text{emag}} \setminus A = \emptyset | Z)] \\ &= E \exp \int_A \lambda(x)Z(x) dx \end{aligned}$$

que é a probabilidade vácuca de um processo de Cox dirigido pelo campo  $Z$ .

## 4.2 Casos particulares

A seguir passaremos rapidamente por alguns casos particulares de um processo de Cox.

Tais processos são frequentemente encontrados na literatura como processos isolados, e estudados separadamente. Aqui iremos apenas descrevê-los, sem se preocupar com um estudo mais aprofundado.

### 4.2.1 Processo de Poisson Misto

Chamaremos de *processo de Poisson misto* um processo de Cox dirigido por um campo aleatório  $Z$  constante. Ou seja, para todo ponto  $x \in S$ ,  $Z(x)$  é dado por uma mesma variável aleatória positiva  $Z_0$ .

Como  $X|Z$  é um processo de Poisson homogêneo com intensidade dada pela realização de  $Z_0$ , segue que o processo de Cox  $X$  é, por si só, homogêneo. Ou seja,  $X + b$  tem a mesma lei de  $X$  para todo  $b \in S$ .

### 4.2.2 Processo de Neyman-Scott

Seja  $C$  um processo de Poisson homogêneo em  $\mathbb{R}^d$  com intensidade  $\lambda > 0$ . Sejam  $\lambda > 0$  e  $k$  um núcleo, isto é, uma função definida em  $\mathbb{R}^d$  tal que, fixado um  $c \in \mathbb{R}^d$ ,  $x \mapsto k(x - c)$  é função de densidade. Para cada ponto  $c \in C$ , vamos definir um novo processo de Poisson

$X_c$  independente dos demais, com função de intensidade  $\lambda_c(x) = k(x - c)$ .

O processo

$$X = \sum_{c \in C} X_c \quad (4.6)$$

é um caso particular dos chamados *processos de Neyman-Scott*. Os processos  $X_c$  são chamados de *clusters* do processo, com centro em  $c \in C$ .

**Proposição 4.5** *O processo definido pela equação 4.6 é um processo de Cox em  $\mathbb{R}^d$  dirigido por*

$$Z(x) = \sum_{c \in C} k(x - c) \quad (4.7)$$

**Demonstração:** Primeiro note que

$$\begin{aligned} E[Z(x)] &= E \left[ \sum_{c \in C} k(x - c) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k(x - c) \lambda_c dc \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k(x - c) Z(c) dc \end{aligned}$$

Isso mostra que, com probabilidade 1,  $Z$  é localmente integrável.

Observe agora que  $X|Z$  é superposição de processos de Poisson independentes. Logo, pela proposição 3.10,  $X|Z$  é um processo de Poisson com intensidade  $Z$ .

**Observação 4.6** *Aqui, tratamos dos processos de Neyman-Scott que também são processos de Cox. O caso mais geral não prevê que os processos  $X_c, c \in C$ , sejam Poisson.*

### 4.2.3 Processos tipo *Shot Noise*

Claramente, os processos de Neyman-Scott podem ser generalizados de diversas formas. Podemos, por exemplo, considerar os centros dos clusters dados por um processo  $C$  não estacionário. Podemos ainda considerar que os clusters  $X_c$  possuem uma intensidade  $\lambda_c := \lambda(c)$  dependente da posição do centro, talvez até aleatória. É possível também considerar núcleos  $k(c; x)$  não estacionários.

Os processos de Cox tipo Shot Noise são uma generalização dos processos de Neyman-Scott que incorporam tais considerações.

Para isso, tomamos  $\Lambda$  como um processo de Poisson em  $\mathbb{R}^d \setminus (0; 1)$  com função de intensidade localmente integrável  $\lambda(c; \cdot)$ . Além disso, generalizamos a noção de núcleo, definindo-o como uma função  $k(\cdot; \cdot)$  em  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , tal que  $k(c; \cdot)$  é uma função de densidade para todo  $c \in \mathbb{R}^d$ .

**Definição 4.7** *Sejam  $\Lambda$  um processo de Poisson em  $\mathbb{R}^d \setminus (0; 1)$  com função de intensidade  $\lambda$  e  $k$  um núcleo definido em  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . Um processo de Cox  $X$  definido em  $\mathbb{R}^d$  é do tipo Shot Noise (SNCP) se for dirigido por*

$$Z(x) = \sum_{(c; \cdot) \in \Lambda} k(c; x) \quad (4.8)$$

Seguindo a mesma ideia dos processos de Neyman-Scott, para construir um SNCP, dado um núcleo  $k(\cdot; \cdot)$ , tomamos processos de Poisson independentes  $X_{c_i}$  com função de intensidade  $\lambda(c_i; \cdot)$ . O processo  $X$  é definido então pela superposição destes processos. Ou seja

$$X := \left[ \bigcup_{(c; \cdot) \in \Lambda} X_{c_i} \right]$$

Note agora que

$$\begin{aligned} E[Z(x)] &= E \left[ \sum_{(c; \cdot) \in \Lambda} k(c; x) \right] \\ &= \int_{(0;1) \times \mathbb{R}^d} k(c; x) \lambda(c; \cdot) dcd ; \end{aligned}$$

de modo que para que  $Z$  seja localmente integrável precisamos que

$$\int_{(0;1) \times \mathbb{R}^d} k(c; x) \lambda(c; \cdot) dcd < \infty, \quad (4.9)$$

seja finita e localmente integrável.

É interessante notar que o processo de centros de clusters, dado por

$$C := \{c \in \mathbb{R}^d : (c; \cdot) \in \Lambda\}$$

não é necessariamente localmente finito, e portanto pode não ser um processo pontual como definimos neste trabalho.



## 4.3 Aplicação de processos de Cox

Nesta seção, introduziremos a aplicação de processos de Cox na modelagem de um problema real, como proposto por Lando [6].

Muito de nosso sistema financeiro atual é baseado em crédito, e a salubridade desse sistema depende de nossa capacidade de mensurar o risco das operações. Em outros termos, as instituições concedentes de crédito precisam estimar potenciais perdas decorrentes de eventual inadimplência de seus clientes (também denominada *default*). É muito comum que essa avaliação se dê por meio de scores de crédito, que atribuem ao tomador de crédito uma nota representativa de sua qualidade como pagador. Os modelos de score de crédito tipicamente se alimentam do histórico do cliente e de outras variáveis capazes de explicar sua capacidade pagadora (para uma empresa, por exemplo, podemos considerar seu faturamento médio) e são posteriormente associados a políticas de crédito para definição das regras de concessão.

Alternativamente, a abordagem de Lando visa estimar o momento no tempo em que o cliente deixaria de honrar sua dívida. O modelo se alimenta do que chamaremos de *variáveis de estado*, que são variáveis que contextualizam a capacidade pagadora do cliente. Além do que já discutimos, podemos pensar, por exemplo, na taxa de juros ou na inflação. Mais à frente, discutiremos também a aplicação dessa ideia na construção de uma generalização de cadeia de Markov. Nela, o cliente pode ser classificado dentre  $K$  categorias, indicadoras de sua qualidade como pagador, e pode transitar entre elas antes do momento de *default*.

### 4.3.1 Modelagem do momento de *default*

O modelo a seguir visa modelar de maneira simples o momento de *default*, tendo como base um processo de Cox em  $\mathbb{R}^+$ . Mais especificamente o instante de ocorrência do primeiro ponto em um processo de Cox. A razão para isso ficará clara mais adiante, quando descrevermos o modelo com scores de crédito.

Para isso vamos considerar primeiro um processo estocástico  $V : \mathbb{R}^d$ , representando as variáveis de estado, e  $V_s$  a configuração de  $V$  em um momento de tempo  $s$ . Sejam também  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0; 1)$  contínua e

$$\lambda(t) = \int_0^t \lambda(V_s) ds. \quad (4.10)$$

Defina agora um processo de Cox  $X$  dirigido por  $(V_s)$ . Antes de definir o momento de *default*, vamos antes tratar de alguns resultados preliminares.

Seja  $\tilde{X}$  o processo pontual dado pela imagem de  $X$  por  $\Lambda$ . Ou seja,

$$\tilde{X} = \Lambda(X)$$

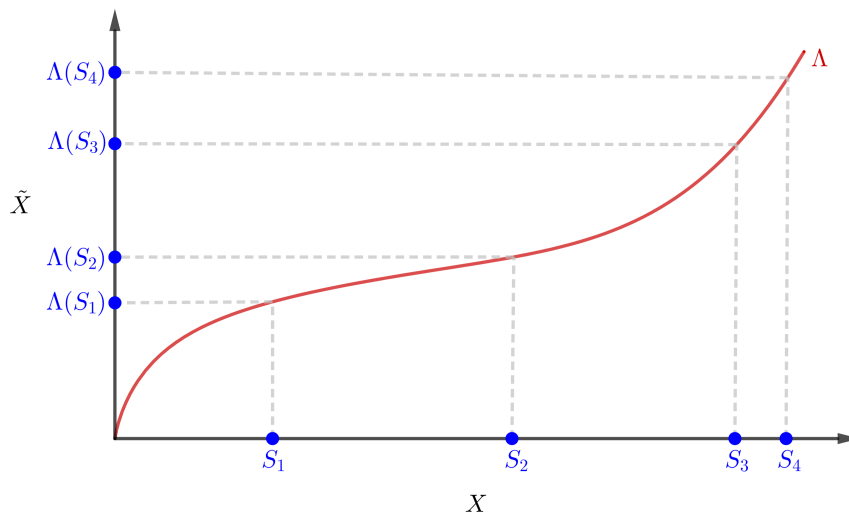


Figura 4.2: Representação da projeção dos pontos de  $X$  pela função  $\Lambda$ .

Tomando  $B \subseteq \mathbb{R}$  e fazendo a mudança de variável  $t = \Lambda(s)$  encontramos que

$$\begin{aligned} P(X \cap B = \emptyset) &= P(X \cap \Lambda^{-1}(B) = \emptyset) \\ &= E \exp \int_{\Lambda^{-1}(B)} (V_s) ds \\ &= \exp \int_B 1 dt ; \end{aligned}$$

mostrando que  $\tilde{X}$  é um processo de Poisson de intensidade 1.

A tomada da imagem por  $\Lambda$  atua, portanto, como um processo de homogeneização de  $X$ , levando o processo de Cox  $X$  em um processo de Poisson  $\tilde{X}$  unitário.

A construção recíproca também é válida. Ou seja, se  $\tilde{X}$  é um processo de Poisson unitário, então o processo  $X = \Lambda^{-1}(\tilde{X})$  é um processo de Cox dirigido por  $(V_s)$ . A verificação pode ser feita de modo análogo ao apresentado acima.

Como a função  $\Lambda$  pode não ser estritamente crescente, tomamos  $\Lambda^{-1}$  como a inversa

generalizada de . Ou seja,

$$T = \inf_{t > 0} \int_0^t \lambda_s ds > 0$$

A construção acima nos permite descrever de maneira mais clara a distância entre pontos de um processo de Cox.

Como provamos na proposição 1.11, as distâncias entre pontos consecutivos de  $X$  são exponenciais unitárias *iid*. De fato, se  $X = f(S_1; S_2; \dots; g)$ , então  $X = f(S_1; (S_2); \dots; g$  e portanto, fazendo  $S_0 = 0$ , temos para  $k \geq 0$  que  $(S_{k+1}) - (S_k) \sim \text{Exp}(1)$ , independentes.

Em particular,  $T = (S_1)$  é exponencial de parâmetro 1, e

$$S_1 = T = \inf_{t > 0} \int_0^t (V_s) ds > 0$$

Como o processo  $X$  visa apenas posicionar o *default* no tempo, definimos o momento de *default* por

$$T = \inf_{t > 0} \int_0^t (V_s) ds > 0, \quad (4.11)$$

onde  $T$  é uma exponencial unitária, independente de  $V_s$ .

Essa representação do problema é interessante por dois motivos. Primeiramente, pelo uso das variáveis de estado, o que abre oportunidade para incorporação de novas informações na modelagem. Além disso, a visão do tempo de *default* fornece uma nova ótica sobre o problema, que frequentemente se baseia no cálculo de probabilidade de *default* sobre uma janela de tempo fixa. Contudo, trata-se de uma forma de estimação relativamente simples, visto que considera apenas os estados "não *default*" e "*default*", sem categorias intermediárias. Na realidade de negócio, é usualmente interessante a divisão em várias categorias, ou *ratings*, que permitem um melhor aferimento do risco. Na próxima seção, exploraremos uma construção que utiliza essa abordagem.

### 4.3.2 Processo de *ratings* de crédito e tempo de *default*

Vamos considerar um sistema com  $K$  *ratings*, sendo 1 o melhor, isto é, o que representa baixíssimo risco de inadimplência. Os *ratings* 2 a  $K - 1$  representam riscos crescentes, e  $K$  caracteriza o *default*. Partimos da premissa de que são possíveis variações no risco de um tomador sem que haja inadimplência; adicionalmente, os casos de *default* podem

ser precedidos de um comportamento de crescimento de risco.

Em [7], Lando et.al. propõe que representemos o problema como uma cadeia de Markov a tempo contínuo  $Z_t$ , com espaço de estados  $S = \{1; 2; \dots; K\}$ , em que os estados são os *ratings*, e taxas de transição  $(\lambda_{ij})$ , com  $i, j \in S, i \neq j$ . O *default* é estado de absorção da cadeia, ou seja,  $\lambda_{ki} = 0 \forall i \in K$ .

Na construção clássica as transições do processo serão guiadas por processos de Poisson  $X_{ij}$ , que marcam os momentos de salto do processo do *rating*  $i$  ao  $j$ :

$$X_{ij} \sim \text{Poisson}(\lambda_{ik} t) \quad (4.12)$$

com todos os  $X_{ij}$  independentes entre si.

Já em [6], Lando propõe a generalização de tais processos, incluindo nas transições uma dependência das variáveis de estado, representada pelo processo  $V_s$ .

Para isso podemos substituir processos  $X_{ij}$  da construção clássica por processos de Cox para marcar as transições de categoria, de forma que nos possibilite incorporar as variáveis de estado. As probabilidades de transição do processo serão guiadas por uma sequência de processos  $\lambda_{ij}(V_s), i, j \in \{1; \dots; K\}, i \neq j$ , que carregam a informação das variáveis de estado.

Dados procesos de Poisson unitários  $X_{ij}$  independentes, defina

$$X_{ij} = \sum_{ij}^1(X_{ij});$$

onde

$$\sum_{ij}^1(X_{ij})(t) = \int_0^t \lambda_{ij}(V_s) ds;$$

Como vimos anteriormente,  $X_{ij}$  é um processo de Cox dirigido por  $\lambda_{ij}(V_s)$ .

Agora, seguindo as mesmas ideias da construção clássica, construímos um processo de riscos  $K_t$  usando os pontos de  $X_{ij}$  para marcar os momentos de transições do *rating*  $i$  ao  $j$ . Mais uma vez, definiremos as taxas de modo que  $K_t$  seja absorvida em  $K$ . Nesse contexto, o momento de *default* é o tempo de absorção de  $K_t$ .

Vale lembrar que, se por um lado o uso dos processos de Cox nos permite incorporar as variáveis de estado, por outro, perdemos propriedades interessantes dos processos de Poisson, como a independência. Mais explicitamente, a propriedade markoviana de  $K_t$  é perdida em função do uso do processo de estados  $V_s$ , que pode carregar informa-

ção passada. Se os processos  $ij$  não fossem aleatórios (isto é, se o processo  $V_s$  fosse determinístico), o que teríamos seria uma cadeia de Markov não homogênea no tempo.

Com o uso das variáveis de estado, somos capazes de incorporar informação externa que permite uma modelagem mais fiel do problema. Já a representação como generalização de uma cadeia de Markov traz profundidade a nossa representação ao estabelecer o *default* como estágio final em um conjunto de *ratings*. De fato, observe que o tempo de *default* introduzido na primeira parte, dado apenas pelo primeiro ponto de um processo de Cox, pode ser visto como o tempo de absorção da cadeia  $K_t$  com apenas duas categorias de risco.

## Referências Bibliográficas

- [1] BILLINGSLEY, P.; *Probability and Measure*, Wiley, 1995.
- [2] MØLLER, J., WAAGEPETERSEN, R. P.; *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [3] FERRARI, P. A., GALVES, A.; *Construction of Stochastic Processes, Coupling and Regeneration*, XIII Escuela Venezolana de Matemática, 2000.
- [4] FERRARI, P. A., GALVES, A.; *Acoplamento em Processos Estocásticos*, SBM - IMPA, 1997.
- [5] SEPPÄLÄINEN, T; *Translation Invariant Exclusion Processes*, disponível em <http://www.math.wisc.edu/~seppalai/excl-book/ajo.pdf> (acesso em 15/05/2022).
- [6] LANDO, D.; *On Cox processes and credit risky securities*, Review of Derivatives Research, v.2, n.2, p.99-120, 1998.
- [7] JARROW, R., LANDO, D. e S.,TURNBULL; *A markov model for the term structure of credit risk spreads*, Review of Financial Studies, v.10, n.2, p.481-523, 1997.
- [8] JANSON, S. *Random coverings in several dimensions*, Acta Mathematica, 156(1):83–118, 1986.
- [9] JANSON, S. *Maximal spacings in several dimensions*, The Annals of Probability, 15(1):274–280, 1987.
- [10] DALEY, D.J., VERE-JONES, D. *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume I: Elementary Theory and Methods*, Springer-Verlag, 2006.
- [11] DALEY, D.J., VERE-JONES, D. *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume II: General Theory and Structure*, Springer-Verlag, 2007.