

# Um passeio sobre a teoria de orbifolds

**André Magalhães de Sá Gomes**



Universidade Federal do ABC

**Título:** Um passeio sobre a teoria de orbifolds

**Autor:** André Magalhães de Sá Gomes

**Orientador:** Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

**Banca Examinadora:**

**Prof. Dr. Circulando de Souza**

Universidade Federal de ..

**Prof. Dr. Recirculando de Souza**

Universidade Federal de ..

Santo André, Abril de 2022.

1	Introdução	7
2	Preliminares	9
3	Fibrados	12
4	Orbifolds	18
5	Exemplos: a esfera, a coxinha e o quibe	28

Agradeço imensamente a minha família, aos meus amigos e a meus orientadores e mestres.

Este trabalho visa introduzir a noção de um orbifold, construir caminhos para a compreensão de uma teoria de geometrização de orbifolds por meio do estudo da geometria Riemanniana e da construção de um fibrado de referenciais, permitindo assim a possível futura compreensão por parte do leitor da redução de tal fibrado a  $G$ -estruturas em orbifolds. Além do mais, apresentamos uma família de exemplos não triviais de orbifolds advindos do famigerado Fibrado de Hopf.

**Palavras Chaves:** Orbifolds, Topologia, Geometria Riemanniana, Fibrados, Ação de Grupos

The aim of this work is to introduce the notion of an orbifold, to construct viable ways to the comprehension of an orbifold geometrization theory via the study of the Riemannian geometry and the construction of a frame bundle, viabilizing to the reader a future possible understanding of a reduction of such bundle to a  $G$ -structure on an orbifold. Furthermore, we present a new family of non-trivial examples of orbifolds that arises from the well known Hopf Fibration.

**Keywords:** Orbifolds, Topology, Riemannian Geometry, Bundles, Group Actions

A noção de um orbifold apareceu inicialmente nos trabalhos de Satake, [satake1956generalization] e [satake1957gauss] sob o nome de  $V$ -variedades ( $V$ -manifolds). O termo orbifold foi cunhado por Thurston em seu trabalho [thurston1979geometry], que definiu a noção de grupo fundamental e espaços de recobrimento para tais objetos, mostrando que a teoria usual de recobrimentos para variedades se estende de maneira muito natural a tal contexto.

Antes de darmos uma definição bem formalizada, *orbifolds* são uma generalização do conceito de variedades. Para todos os efeitos, todas as variedades consideradas no texto são reais. Um *orbifold* pode ser pensado ingenuamente como uma espaço geométrico que localmente se parece com um aberto de  $\mathbb{R}^n$  quocientado pela ação linear de um grupo finito. Veremos que tal conceito abrange não tão somente variedades, como variedades com bordo, quocientes de variedades por grupos finitos (como almofadas), espaços topológicos com *quinas* ou *bicos*, dentre outros.

Eles se tornaram então importantes objetos de estudo para a geometria. Justamente pelo seu grau de generalidade e por figurarem em tantas áreas da geometria e aplicações. A teoria clássica de geometria Riemanniana para variedades, bem como a teoria topológica no mesmo contexto, conforme mencionado anteriormente, vem sendo amplamente estudada e compreendida desde a metade do século passado.

De um ponto de vista mais clássico, por assim dizer, da geometria, ainda há bastante a se saber sobre orbifolds. Como por exemplo, assim como acontece com variedades, pouquíssimos exemplos de orbifolds de curvatura seccional positiva são conhecidos, apesar de serem conhecidas poucas restrições para que tais objetos existam. Em minha tese de doutorado abordei esse tema construindo um orbifold com curvatura seccional quase-positiva, isto é, um orbifold de curvatura não negativa que admite planos de curvatura nula apenas em um conjunto cujo complementar é um aberto denso. No mesmo trabalho construí um outro orbifold, também não conhecido pela literatura, mas as técnicas geométricas utilizadas para a construção de uma métrica de curvatura seccional quase-positiva no exemplo recém comentado se mostraram incapazes de fazer o mesmo para este último orbifold comentado, de

## 1 Introdução

modo que restringi minha análise apenas à topologia dele.

Todavia, minhas curiosidades acerca da geometria dos orbifolds vão além de encontrar novos exemplos de curvatura seccional positiva ou mesmo de apenas estudá-los a partir de sua curvatura. Por isso, nesse trabalho eu viso dar um passo na direção de estudar quais geometria clássicas, no sentido de  $G$ -estruturas, que são reduções do fibrado de referenciais para subgrupos do Grupo Linear Geral que nos dão geometrias clássicas como a riemanniana, a de Kahler, variedades orientáveis e tantas outras, são possíveis de serem transportadas para o contexto de orbifolds. Assim sendo, neste texto faremos a construção do fibrado de referenciais de um *orbifold*, o que nos permite em pensar em suas reduções e, conseqüentemente, em  $G$ -estruturas.

E, por completude, o primeiro capítulo deste trabalho é constituído por preliminares, dando uma breve revisão sobre ações de grupos e fibrados.

Já no último capítulo mostramos alguns exemplos clássicos de orbifolds, que são construídos a partir de uma leve modificação no famigerado Fibrado de Hopf.

A bibliografia principal desse trabalho é [moe], por seu detalhamento estrutural. O esqueleto deste texto segue a ordem lá estabelecida, descrevendo as mesmas estruturas. Todavia, aqui o leitor poderá encontrar alguns exemplos e interpretações pragmáticas e demonstrações mais detalhadas por parte deste que vos escreve.



## Ações de Grupos

Seja  $G$  um grupo de Lie e considere  $X$  um espaço topológico. Dizemos que o grupo  $G$  age a esquerda de  $X$  quando  $\phi : G \times X \rightarrow X$  dada por  $\phi(g, x) = gx$  cumpre as seguintes condições:

- $\phi(1, x) = x$
- $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$  para todo  $g, h \in G$  e  $x \in X$

Analogamente, definimos a ação a direita, basta trocarmos  $gx$  por  $xg$ .

**Definição 2.1** *Sejam  $x \in X$ . Definimos a órbita do elemento  $x$  associada a ação acima como*

$$G \cdot x = \{gx \in X : g \in G\}$$

**Observação:** Dizemos que a ação de  $G$  em  $X$  é transitiva quando  $X$  for uma órbita de  $G$ . Em outras palavras, a ideia de transitividade é que dado  $x \in X$ , existe  $g \in G$  que consegue mapear qualquer elemento  $y \in X$ .

**Definição 2.2** *Definimos o conjunto dos elementos que fixam um  $x \in X$  como*

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

*chamado de subgrupo de isotropia de  $G$ .*

**Observação:** Note que  $G_x$  é um subgrupo do grupo  $G$ . De fato, sejam  $y, z$  elementos de  $G_x$ , temos que  $(yz)x = y(zx) = yx = x$ , logo  $yz \in G_x$ . Além  $yx = x \leftrightarrow y^{-1}yx = y^{-1}x \leftrightarrow y^{-1}x = x$ , logo  $y^{-1} \in G_x$  e  $G_x \leq G$ .

**Proposição 2.3** *Dados  $x, y \in X$ , suponha que  $y = gx$  onde  $g \in G$ . Então,  $G_x, G_y$  são conjugados entre si.*

## 2 Preliminares

**Demonstração:** Considere  $h \in G_y$ , temos que  $hy = y$ . Por hipótese,  $y = gx$ , segue que

$$hy = y \leftrightarrow h(gx) = gx \leftrightarrow g^{-1}h(gx) = x \leftrightarrow (g^{-1}hg)x = x \leftrightarrow h(gxg^{-1}) = (gxg^{-1})$$

Portanto,  $h \in G_y$  se, e somente se  $h \in gG_xg^{-1}$ . Assim, os subgrupos de isotropia são conjugados. □

Com base nos resultados acima podemos enunciar o seguinte resultado:

**Proposição 2.4** *Suponha que a ação de  $G$  em  $X$  é transitiva e tome  $x \in X$ . Então  $G/G_x$  está em bijeção com  $X$*  **Demonstração:** *A demonstração desse resultado pode ser encontrada no livro (San Martin)* □

Sabemos para uma ação transitiva os subgrupos de isotropia são conjugados entre si. Então, se mudarmos a escolha de  $x$  não mudaremos substancialmente o espaço quociente  $G/G_x$ .

Definiremos agora o que é uma ação contínua.

**Definição 2.5** *Seja  $G$  um grupo topológica e  $X$  um espaço topológico. Uma ação de  $G$  em  $X$  é dita contínua se a aplicação  $\phi : G \times X \rightarrow X$  dada por  $\phi(g, x) = gx$ , é contínua.*

**Proposição 2.6** *Suponha que a ação de  $G$  em  $X$  seja contínua e que  $X$  seja espaço topológico Hausdorff. Então, qualquer subgrupo de isotropia  $G_x$ ,  $x \in X$ , é fechado. **Demonstração:** Como a aplicação  $\phi$  é contínua, se fixamos  $x \in X$ , aplicação  $\phi_x$  também é contínua. Assim, o conjunto dado por*

$$G_x = \{g \in G : \phi(g, x) = x\} = \phi_x^{-1}$$

*é fechado. De fato, temos que  $x \in X$ , pois  $X$  é Hausdorff e a imagem inversa de um fechado por uma aplicação contínua é um subconjunto fechado do domínio.* □

# Topologia de espaços quocientes

Nesta seção definiremos espaços homogêneos e o provaremos um resultado bastante importante no decorrer do trabalho

**Definição 2.7** ([SanM], p.36). *Sejam  $Y$  um espaço topológico e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $Y$ . Denote por  $Y/\sim$  o conjunto das classes de equivalência de  $\sim$  e por  $\pi : Y \rightarrow Y/\sim$  a aplicação sobrejetora canônica, que cada  $y \in Y$  associa sua classe de equivalência. A **Topologia quociente** em  $Y/\sim$  é aquela em que um subconjunto  $A \subset Y/\sim$  é aberto se, e só se,  $\pi^{-1}(A)$  é aberto em  $Y$ . De forma equivalente,  $F \subset Y/\sim$  é fechado se, e só se,  $\pi^{-1}(F)$  é fechado em  $Y$ .*

A próxima proposição relaciona a continuidade, em relação a topologia quociente a funções que estão definidas em  $Y/\sim$

**Proposição 2.8** ([SanM], p.36) *Sejam  $Y$  e  $Z$  espaços topológicos em que  $Y$  é munido da relação de equivalência  $\sim$ . Então, uma aplicação  $f : Y/\sim \rightarrow Z$  é contínua se, e somente se,  $f \circ \pi : Y \rightarrow Z$  é contínua: **Demonstração:** Dada  $\pi$  a projeção canônica. Se  $f$  é contínua, a composição  $f \circ \pi$  também é contínua, pois  $\pi$  é contínua. Suponha agora que  $f \circ \pi$  seja contínua, tome  $A \subset Z$  um conjunto aberto, segue-se que,  $(f \circ \pi)^{-1}(A) = (\pi \circ f)^{-1}(A)$  é aberto em  $Y$ . Assim, segue-se da definição de topologia quociente que  $f^{-1}(A)$  é aberto em  $Y/\sim$ , como queríamos.  $\square$*

A partir de agora, vamos considerar um tipo especial de sequência de espaços.

**Definição 3.1** (Fibrado) *Sejam  $E, B$  e  $F$  espaços topológicos. Uma sequência*

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

é chamada de fibrado localmente trivial quando  $p : E \rightarrow B$  satisfaz as seguintes condições:

- $\forall b \in B$  existe uma vizinhança  $U$  de  $b$  tal que  $p^{-1}(U)$  é homeomorfo a  $U \times F$  via algum homeomorfismo

$$\varphi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$$

- $p \circ \varphi = \pi$  onde  $\pi : U \times F \rightarrow U$  é a projeção.

Em outras palavras o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi} & p^{-1}(U) \subset E \\ & \searrow \pi & \swarrow p \\ & & U \subset B \end{array}$$

Chamamos  $E$  é espaço total,  $B$  espaço base e  $F$  é a fibra, em outras palavras,  $E$  é o fibrado sobre  $B$  com fibra  $F$ . Segue-se da definição acima que  $p^{-1}(b) \cong F$ . No decorrer deste trabalho onde lê-se fibrado é na verdade o fibrado localmente trivial.

Apresentaremos exemplos sobre fibrados, mas antes tomamos e por isso introduziremos a seguinte teoria:

Seja o conjunto  $G_x$  formado pelos elementos de  $G$  que fixam  $x$  e esse grupo é chamado de isotropia e denotado por:

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

Claramente, o grupo de isotropia é um subgrupo de  $G$ .

### 3 Fibrados

**Exemplo 3.2** *Seja a ação*

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x_0) &\longmapsto gx_0 \end{aligned}$$

*contínua e transitiva de um grupo de Lie  $G$  em um espaço topológico  $X$ . Considere  $H \leq G$  tal que*

$$H = \{h \in G : hx_0 = x_0\}$$

**Afirmção 3.3**  *$H$  é um subgrupo fechado de  $G$ . De fato,*

*Como consequência de resultados anteriores, o fato de  $H \leq G$  ser fechado e  $G$  ser um grupo de Lie, decorre do Teorema de Cartan que  $H$  também é um grupo de Lie e  $G/H$  possui estrutura de variedade diferenciável.*

**Observação 3.4** *O subgrupo  $H$  é chamado de grupo de isotropia de  $G$ . No decorrer do trabalho, seguiremos a seguinte abordagem: Fixado um ponto  $x_0 \in X$ , nós chamaremos o grupo de isotropia de  $G$  como a isotropia de  $x_0$ .*

*Outro resultado importante é que com todas as hipóteses acima temos o seguinte homeomorfismo.*

$$G/H \longrightarrow G \cdot x$$

*onde  $G \cdot x$  é órbita da ação acima. Além disso,  $(H, 1) \dots (G, 1) \rightarrow (X, x_0)$  é um fibrado.*

*Agora, com o resultado do exemplo acima é possível estabelecer mais alguns exemplos:*

**Exemplo 3.5** *Seja a ação*

$$\begin{aligned} SO(3) \times S^2 &\longrightarrow S^2 \\ (A, x) &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

**Afirmção 3.6**  *$SO(3)$  age transitivamente em  $S^2$  **Demonstração:** Inicialmente, nós iremos mostrar que dado  $v \in S^2$  existe uma matriz  $A \in SO(3)$  tal que  $Ae_1 = v$ , onde  $e_1, e_2, e_3$  são vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^3$ .*

*Considere  $v$  um vetor sobre  $\mathbb{R}$  e complete  $v$  até obter uma base  $v, v_1, v_2$  de  $\mathbb{R}^3$ . Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt podemos obter uma base ortonormal de*

### 3 Fibrados

$v, u_1, u_2$  de  $\mathbb{R}^3$ . Note que a condição que  $A^T A = 1$  é o mesmo que pedir que as colunas de  $A$  formem uma base ortonormal. Portanto, se tomarmos  $v, u_1, u_2$  como colunas de  $A$ , temos que  $A \in O(3)$  e  $Ae_1 = v$ .

Temos que o determinante de  $A$  é igual a  $\pm 1$ . De fato,

$$(\det A)^2 = \det A^T \det A = \det(A^T A) = \det I = 1 \Leftrightarrow \det A = \pm 1$$

Para obter  $\det A = 1$  basta substituir  $v_i$  por  $-v_i$  se necessário, isto também implica que  $Ae_1 = v$ . Logo  $A \in SO(3)$  e ação é transitiva. □

**Afirmção 3.7** É um fibrado

$$SO(2) \rightarrow SO(3) \rightarrow S^2$$

**Demonstração:** Considere  $A \in SO(3)$  e  $e_1 \in S^2$ . Vamos determinar a isotropia de  $e_1 = (1, 0, 0)$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} A \cdot (1, 0, 0) = (1, 0, 0) &\Leftrightarrow 1^{\text{a}} \text{ coluna de } A = (1, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & U \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como  $A$  é uma matriz ortogonal da forma acima com  $\det(U) = 1$ . Como as linhas de  $A$  devem ser vetores unitários, temos que  $T = 0$ . Consequentemente,  $U \in SO(2)$ . Rigorosamente falando  $SO(2)$  não é um subgrupo de  $SO(3)$ . Assim, escrevemos o subgrupo  $SO(2)$  das matrizes da forma

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \quad \det(U)=1 \right\}$$

e temos que  $\frac{SO(3)}{SO(2)} \cong S^2$  e o fibrado dado por

$$SO(2) \cdots SO(3) \rightarrow S^2$$

□

**Exemplo 3.8** Considere o conjunto das matrizes complexas invertíveis

$$G(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}$$

### 3 Fibrados

Definimos a ação Seja a ação

$$\begin{aligned} G(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}P^1 &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ (A, x) &\mapsto Ax \end{aligned}$$

transitiva. Fixe um ponto base  $x_0 = (1 : 0) = \infty$ . Dado  $A \in G(2, \mathbb{C})$  e  $x_0 \in \mathbb{C}P^1$  segue-se que

$$Ax_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (1 : 0) = (a : c) = \frac{a}{c} \in \mathbb{C}P^1$$

Vamos determinar a isotropia de  $x_0$ , em outras palavras, determinar  $A \in G(2, \mathbb{C})$  tal que  $Ax_0 = x_0$ . Note que

$$\begin{aligned} Ax_0 = x_0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (1 : 0) = (1 : 0) \\ &\Leftrightarrow (a : c) = (1 : 0) = \infty \\ &\Leftrightarrow c = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{aligned}$$

Portanto, a isotropia de  $x_0$  é dada por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}; \quad a, b, d \in \mathbb{C}, \quad ad \neq 0 \right\} \approx \text{matrizes triângulares superiores}$$

Como a ação é transitiva sua órbita é dada por  $G(2, \mathbb{C})$  e temos o seguinte homeomorfismo

$$\frac{G(2, \mathbb{C})}{H} \cong \mathbb{C}P^1$$

e temos o fibrado

$$H \cdots G(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

Sabemos que  $SU(2)$  é um subgrupo de  $GL(2, \mathbb{C})$ . Logo,  $SU(2)$  também age em  $\mathbb{C}P^1$ . Esta ação é transitiva. De fato, considere  $A \in SU(2)$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$$

### 3 Fibrados

e a ação

$$\begin{aligned} SU(2) \times \mathbb{C}P^1 &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ (A, v) &\mapsto Av \end{aligned}$$

onde  $v = (z, w)$ . Assim, ação acima é dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \cdot (z, w) = \frac{az + bw}{\bar{a}w - \bar{b}z}$$

que também é conhecida como Transformação de Moebius, e claramente é transitiva. Agora vamos determinar a isotropia de  $x_0 = (1 : 0) = \infty$ . Seja  $A \in SU(2)$  e  $x_0 \in \mathbb{C}P^1$ , segue que

$$\begin{aligned} Ax_0 = x_0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot (1 : 0) = (1 : 0) \\ &\Leftrightarrow (a : b) = (1 : 0) = \infty \\ &\Leftrightarrow (a : 0) \quad \text{com } a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja, a isotropia de  $x_0$  é dado por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{C}, \quad |a| = 1 \right\} \approx SU(1) \cong U(1)$$

Portanto,

$$\frac{SU(2)}{U(1)} \cong \mathbb{C}P^1$$

e temos o fibrado

$$U(1) \cdots SU(2) \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

**Exemplo 3.9** Seja a ação de

$$\begin{aligned} SO(n+1) \times \mathbb{R}P^n &\longrightarrow \mathbb{R}P^n \\ (A, [x]) &\mapsto [Ax] \end{aligned}$$

Como  $A$  é linear, segue-se que,  $[Ax]$  não depende da escolha de  $x \in [x]$ . Esta ação é transitiva. Vamos determinar a isotropia de  $x_0 = (1 : \cdots : 0)$ , ou seja, determinar  $A$  tal



### 3 Fibrados

que  $[Ax_0] = [x_0]$ . Em outras palavras,

$$\begin{aligned} [Ax_0] = [x_0] &\Leftrightarrow 1^{\text{a}} \text{ coluna de } A = [1 : \dots : 0] \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}; \quad U \in O(n), \quad a = \pm 1 \quad \det(U) = 1 \end{aligned}$$

Logo, a isotropia de  $[x_0]$  é dada por  $O(n)$  e segue que

$$\frac{SO(n+1)}{O(n)} \cong \mathbb{R}P^n$$

e obtemos o fibrado

$$O(n) \cdots SO(n+1) \rightarrow \mathbb{R}P^n$$

Outro fato importante para construção de uma sequência exata longa de grupos de homotopia é a propriedade de levantamento de homotopias a partir de um espaço  $X$ , que definiremos abaixo.

**Definição 3.10** Dada a aplicação  $p : E \rightarrow B$  e um espaço topológico  $X$ . Se

- para qualquer homotopia  $f : X \times [0, 1] \rightarrow B$  e
- para qualquer aplicação  $\bar{f}_0 : X \rightarrow E$ , tal que  $f_0 = f | X \times \{0\}$  e  $(f_0 = p \circ \bar{f}_0)$

existir uma homotopia  $\bar{f} : X \times [0, 1] \rightarrow E$  levantamento de  $f$ , ou seja,  $f = p \circ \bar{f}$  e também satisfaz  $\bar{f}_0 = \bar{f} | X \times \{0\}$ , dizemos que  $p$  tem a propriedade de levantamento de homotopia a partir de  $X$ .

Dizemos que uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  que satisfaz a condição acima a partir de todo disco  $D^k$  é uma fibração Hurewicz.

**Proposição 3.11** Um fibrado (localmente trivial) é uma fibração de Hurewicz.

Antes de definirmos formalmente o conceito de *orbifold*, fixemos alguma linguagem básica.

No que se segue  $\text{Dif}(M)$  é o grupo de difeomorfismos de uma variedade  $M$ . Para um subgrupo  $G < \text{Dif}(M)$ , denotamos o subgrupo de isotropia de um ponto  $x \in M$  por  $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ . Além disso, para cada  $g \in G$  fixe

$$\Sigma_g = \{x \in M : gx = x\} \quad \text{e} \quad \Sigma_G := \{x \in M : G_x \neq \{1\}\}.$$

Note que  $\Sigma_G = \bigcup_{1 \neq g \in G} \Sigma_g$  e que  $M \setminus \Sigma_G = \{x \in M : G_x = \{1\}\}$  é  $G$ -estável.

Um subconjunto  $S \subset M$  será dito  **$G$ -estável** se for conexo e se para cada  $g \in G$  temos que  $gS = S$  ou  $gS \cap S = \emptyset$ . O **grupo de isotropia** de  $S$  é  $G_S := \{g \in G : gS = S\}$ .

Note que os conjuntos  $G$ -estáveis, por serem conexos, são exatamente as componentes dos subconjuntos  **$G$ -invariantes** de  $M$ , isto é, subconjuntos  $S$  tais que  $G \cdot S \subset S$ . Com efeito, se  $S$  é a componente de um conjunto  $G$ -invariante, como imagem de um subconjunto conexo por uma função contínua entre espaços Hausdorff é conexa, se  $gS \cap S \neq \emptyset$ ,  $gS \subset S$ . Como o mesmo vale para  $g^{-1}$ , então  $gS = S$ . Por outro lado, claramente  $S$  é a componente de  $G(S) = \{gs : g \in G, s \in S\}$ , que é  $G$ -invariante.

**Lema 4.1** *Se  $G < \text{Dif}(M)$  é finito, o conjunto dos subconjuntos  $G$ -estáveis forma uma base para a topologia de  $M$ . Mais além, para cada  $x \in M$  existe um subconjunto  $G$ -estável de  $M$ ,  $S$ , tal que  $G_x = G_S$ .*

**Demonstração:** Se  $G < \text{Dif}(M)$  é finito, podemos sempre escolher uma métrica riemanniana  $G$ -invariante em  $M$ . Outro resultado clássico de geometria riemanniana nos garante que a exponencial associada nos é um difeomorfismo local, no sentido de que existe um  $\epsilon > 0$  t.q.  $(\exp)_x$  leva  $B(0, \epsilon) \subset T_x M$  a uma vizinhança  $x \in W \subset M$  difeomorficamente. Além disso, como a métrica é  $G$ -invariante, para cada  $g \in G_x$ ,  $(dg)_x$  é uma transformação ortogonal e  $\exp_x \circ (dg)_x = g \circ \exp_x$ ; em particular, se  $(dg)_x = \text{id}$ , então  $g|_W = \text{id}$ . Portanto,  $(dg)_x B(0, \epsilon) = B(0, \epsilon)$ , de modo que  $gW = W$ .

## 4 Orbifolds

Suponha agora que  $g \notin G_x$ . Então, como  $\exp_x \circ (dg)_x = g \circ \exp_{(gx)}$  e como  $M$  é Hausdorff, temos que  $gW \cap W = \emptyset$ , diminuindo  $W$  se necessário.  $\square$

Antes de partimos para a teoria de orbifolds propriamente dita, lancemos mão dos dois seguintes lemas, que nos serão úteis futuramente.

**Lema 4.2** *Sejam  $M$  uma variedade conexa e  $G$  um subgrupo finito de  $\text{Dif}(M)$ . Então  $\Sigma_G$  é fechado de interior vazio e a diferencial  $d_x : G_x \rightarrow \text{Aut}(T_x M)$  é injetiva para cada  $x \in M$ ; com  $d_x g = dG_x := (dg)_x$  para qualquer  $g \in G_x$ .*

**Demonstração:** Tome  $g \in G_x$  t.q.  $(dg)_x = \text{id}$ . Defina  $Z = \{y \in M : gy = y, (dg)_y = \text{id}\}$ . Claramente  $x \in Z$ , portanto  $Z$  é não-vazio. Como a ação de  $G$  é suave, fica claro que  $Z$  é fechado. Pelo argumento do lema 4.1,  $Z$  também é aberto. Portanto  $Z = M$ , dado que  $M$  é conexo. Portanto,  $g = \text{id}$ . Logo  $d_x$  é injetiva.

Agora, seja  $g \in G \setminus \{\text{id}\}$  e suponha que  $x$  é ponto interior de  $\Sigma_g$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  em  $\Sigma_g$ . Deste modo, para todo  $y \in V$ ,  $g \in G_y$ , i.e.,  $gy = y$ . Em particular,  $(dg)_x = \text{id}$ . O que implica que  $g = \text{id}$ . Absurdo. Portanto,  $\Sigma_g$  tem interior vazio. Consequentemente,  $\Sigma_G = \bigcup_{1 \neq g \in G} \Sigma_g$  também.  $\square$

Note que, como corolário, deste lema temos que qualquer difeomorfismo de ordem finita que fixa um conjunto aberto em uma variedade conexa é a identidade.

**Lema 4.3** *Sejam  $M$  uma variedade conexa e  $G$  um subgrupo finito de  $\text{Dif}(M)$ . Para cada mapa suave  $f : V \rightarrow M$  definido num aberto  $V$  conexo e não-vazio de  $M$  satisfazendo  $f(x) \in G(x)$ , para cada  $x \in V$ , existe um único  $g \in G$  tal que  $f = g|_V$ .*

**Demonstração:** Pelo Lema 4.2 temos que  $A = M \setminus \Sigma_G$  é um aberto denso  $G$ -invariante de  $M$  e a projeção  $\pi : A \rightarrow A/G$  é um  $G$ -fibrado principal, pois  $G$  é um subgrupo finito de isometrias, o que implica que sua ação é livre e própria (ou propriamente descontínua). Portanto,  $A \cap V$  é um aberto denso de  $V$ . Seja  $C$  uma componente de  $A \cap V$ . Note que para cada  $x \in C$ ,  $G_x = \{\text{id}\}$ . Como  $f(x) \in G(x)$ , então  $G_{f(x)} = \{\text{id}\}$ ; i.e.,  $f(x) \in A$ . Portanto, por hipótese,  $\pi \circ f|_C(x) = \pi|_C$ . Assim,  $f_C = g(x)$ , para uma aplicação suave  $g : C \rightarrow G$ . Temos que, como  $G$  é discreto, seu espaço tangente é trivial. Portanto,  $g_* : TA \rightarrow TG$  é nula. Assim,  $g$  é localmente constante. Como  $C$  é conexo, existe um único  $g_C \in G$  t.q.  $f|_C = g|_C$ . Em particular,  $(df)_x = (dg|_C)_x$  para todo  $x \in \overline{C}$ .

Note que o argumento do Lema 4.1 nos garante que para cada  $y \in \Sigma_G \cap V$  a ação de  $G_y$  é linear, e portanto, nessa carta,  $\Sigma_G$  é união finita de subespaços vetoriais. Em particular, há um número finito de componente de  $A \cap V$  intersectando esta carta, e  $y$  está no bordo de todos eles. Mas, se  $C$  e  $C'$  são duas componentes de  $A \cap V$  t.q.

## 4 Orbifolds

$y \in \overline{C} \cap \overline{C'}$ , temos que  $(dg_C)_y = df_y = (dg_{C'})_y$  e, portanto, pelo Lema 4.2,  $g_C = g_{C'}$ . Como  $V$  é conexo,  $f$  coincide com um único  $g$  em todo  $V$ .  $\square$

**Definição 4.4** *Seja  $Q$  um espaço topológico. Uma **carta de orbifold** de dimensão  $n \geq 0$  em  $Q$  é uma tripla  $(U, G, \phi)$ , em que  $U$  é um subconjunto conexo de  $\mathbb{R}^n$ ,  $G$  é um subgrupo finito de  $\text{Dif}(U)$  e  $\phi : U \rightarrow Q$  é uma aplicação aberta que induz um homeomorfismo de  $U/G \rightarrow \phi(U)$ .*

*Note que toda a informação topológica necessária é dada pela ação de  $G$  em  $U$ . Por isso, alguns autores chamam o par  $(U, G)$ , ou mesmo o espaço  $U/G$ , com certo abuso de linguagem, de **modelo local** de  $Q$ .*

O leitor, a esta altura, conhecendo a definição de uma variedade, já deve ter uma intuição do que virá a ser um *orbifold*. Isto é, ingenuamente, um *orbifold* será definido via um atlas de cartas de orbifold, com algumas restrições de *colagem* das cartas. Assim como no caso de variedades, veremos pela definição a seguir, que uma única carta já nos define uma estrutura de orbifold. O exemplo a seguir já nos sugere um fato verdadeiro, que variedades com bordo são orbifolds. O mesmo vale para as câmaras de Weil, caso o leitor esteja familiarizado com o conceito.

**Exemplo 4.5** *Seja  $\mathbb{R}^n$  e  $H$  um hiperplano. Considere  $g$  a reflexão em  $H$  e  $G = \{e, g\}$ , que é claramente um subgrupo discreto de difeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $Q \subset \mathbb{R}^n$  um semiespaço de bordo  $H$  com a topologia quociente relativa à reflexão. Claramente  $\pi|_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo sobre sua imagem. Defina  $\phi = (\pi_Q)^{-1} \circ \pi$ . Deste modo  $(\mathbb{R}^n, G, \phi)$  é uma carta de orbifold.*

**Definição 4.6** *Um **mergulho** entre cartas de orbifolds é uma aplicação  $\lambda : (V, H, \psi) \rightarrow (U, G, \phi)$  entre cartas de orbifolds sobre um mesmo espaço topológico subjacente,  $Q$ , tal que  $\lambda : V \rightarrow U$  é um mergulho que satisfaz  $\phi \circ \lambda = \psi$ .*

Fica claro da definição acima que se  $(U, G, \phi)$  é uma carta de orbifold sobre  $Q$  e  $S \subset U$  é  $G$ -estável, a tripla  $(S, G_S, \phi_S)$  é também uma carta de orbifold tal que a inclusão é um mergulho. Neste caso,  $(S, G_S, \phi_S)$  é dita **restrição** de  $(U, G, \phi)$ .

Para formalizarmos a noção ingênua de colagem das cartas de um orbifold, precisaremos lançar mão de algumas propriedades de mergulhos entre cartas de orbifolds.

**Proposição 4.7** *1. Dado um mergulho  $\lambda : (V, H, \psi) \rightarrow (U, G, \phi)$  entre cartas de orbifold sobre  $Q$ , tem-se que  $\lambda(V)$  é um subconjunto aberto  $G$ -estável de  $U$  e existe um único isomorfismo  $\bar{\lambda} : H \rightarrow G_{\lambda(V)}$  t.q.  $\lambda(hx) = \bar{\lambda}(h)\lambda(x)$ .*

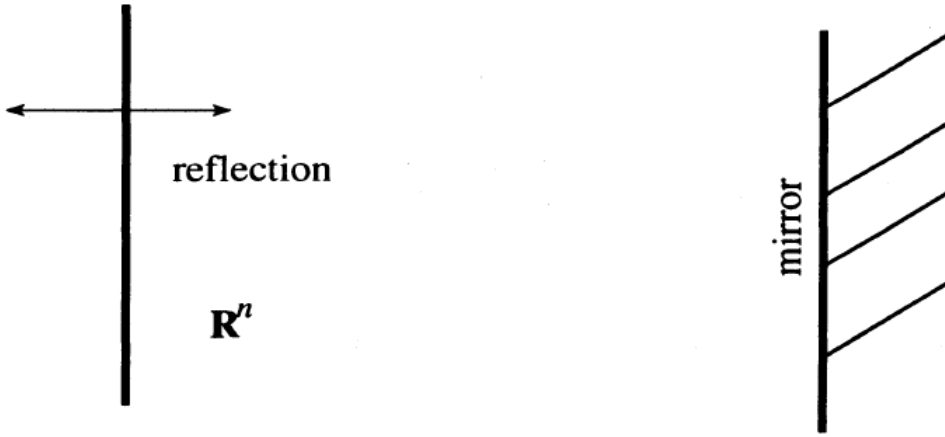


Figura 4.1: Carta de orbifold definida em um bordo

2. A composta de quaisquer dois mergulhos entre cartas de orbifolds é também uma carta de orbifold.
3. Para cada carta de orbifold  $(U, G, \phi)$ , qualquer difeomorfismo  $g \in G$  é um mergulho de  $(U, G, \phi)$  sobre si mesmo, e  $\bar{g}(g') = gg'g^{-1}$ .
4. Se  $\lambda, \mu : (V, H, \psi) \rightarrow (U, G, \phi)$  são mergulhos entre duas cartas de manifolds, existe um único  $g \in G$  com  $\lambda = g \circ \mu$ .

**Demonstração:** (i) Tome  $h \in H$ . Note que, para cada  $x \in \lambda(V)$ ,  $\phi(\lambda \circ h \circ \lambda^{-1}(x)) = \psi(h\lambda^{-1}(x)) = \psi(\lambda^{-1}(x))$ ; dado que  $\psi$  induz um homeomorfismo  $U/G \rightarrow \psi(V)$ . Por outro lado,  $\phi(x) = \phi(\lambda(\lambda^{-1}(x))) = \psi(\lambda^{-1}(x))$ . Portanto,  $\lambda \circ h \circ \lambda^{-1}$  é um difeomorfismo que leva fibra em fibra. Pelo Lema 4.3, existe um único  $\bar{\lambda}(h) \in G$  que estende esse difeomorfismo a  $U$ . Portanto, temos que para todos  $h, h' \in H$  e para todo  $x \in V$ ,  $\overline{\lambda(hh')} \lambda(x) = \bar{\lambda}(h)\bar{\lambda}(h')\lambda(x)$ . Logo,  $((\overline{\lambda(hh')})^{-1}\bar{\lambda}(h)\bar{\lambda}(h'))\lambda(x) = \lambda(x)$ . Assim, pelo corolário do Lema 4.2,  $\bar{\lambda}$  é um homomorfismo (claramente injetivo).

Agora, fixe  $g \in G$ .

Se existe  $h \in H$  t.q.  $g = \bar{\lambda}(h)$ , então, para cada  $x \in V$ ,  $g\lambda(x) = \bar{\lambda}(h)\lambda(x) = \lambda(hx)$ . Por outro lado, como  $G < \text{Dif}(U)$ , existe  $y \in U$  t.q.  $\bar{\lambda}(h)y = \lambda(x)$ . Ou seja,  $y = \bar{\lambda}(h^{-1})\lambda(x) = \lambda(h^{-1}x)$ . Logo, neste caso,  $g\lambda(V) = \lambda(V)$ .

Em contrapartida, suponha que  $g\lambda(V) \cap \lambda(V) \neq \emptyset$ . Defina  $A = U \setminus \Sigma_G$  que, pelo Lema 4.3 é um aberto denso  $G$ -invariante. Portanto,  $A \cap g\lambda(V) \cap \lambda(V) \neq \emptyset$ . Então existe  $x \in A \cap V$  t.q.  $g^{-1}x \in V$ . Mais ainda, existe  $h \in H$  t.q.  $h\lambda^{-1}(g^{-1}x) = \lambda^{-1}(x)$ , de

## 4 Orbifolds

modo que  $\bar{\lambda}(h)g^{-1}x = x$ . Como  $x \notin \Sigma_G$ ,  $\bar{\lambda}(h) = g$ .

Os itens (ii) e (iii) seguem diretamente das definições.

(iv) Temos que  $\psi = \phi \circ \lambda = \phi \circ \mu$ . Portanto,  $\lambda$  e  $\mu$  mandam elementos numa mesma órbita. O resultado segue do Lema 4.3.  $\square$

Como o nome sugere, as cartas de orbifold devem ser capazes de definir um atlas sobre um espaço topológico subjacente. E assim como em variedades, esse atlas precisa de condições de *colagem*, ou, mais precisamente, de compatibilidade entre as cartas.

**Definição 4.8** Dizemos que duas cartas de orbifold  $(U, G, \phi)$  e  $(V, H, \psi)$  de dimensão  $n > 0$  em  $Q$  são **compatíveis** se para cada  $z \in \phi(U) \cap \psi(V)$  existe uma carta de orbifold  $(W, K, \theta)$  em  $Q$  com  $z \in \theta(W)$  e mergulhos entre cartas de orbifold  $\lambda : (W, K, \theta) \rightarrow (U, G, \phi)$  e  $\mu : (W, K, \theta) \rightarrow (V, H, \psi)$ .

Um **atlas de orbifold** de dimensão  $n$  de um espaço topológico  $Q$  é um conjunto

$$\mathcal{A} = \{(U_i, G_i, \phi_i)\}_{i \in I}$$

de cartas de orbifold sobre  $Q$  duas-a-duas compatíveis t.q.  $Q = \bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i)$ . Dois atlas de orbifold são **equivalentes** se sua união for também um atlas de orbifold.

Um **orbifold** de dimensão  $n$  é um par  $(Q, \mathcal{A})$ , com  $Q$  um espaço topológico segundo-contável e Hausdorff e  $\mathcal{A}$  uma atlas de orbifold de dimensão  $n$  de  $Q$  maximal.

Cometeremos o abuso de chamar o espaço subjacente  $Q$  de orbifold. Além disso, todo atlas de orbifold de um espaço Hausdorff segundo-contável  $Q$  está contido em um único atlas maximal  $\mathcal{A}$ , que será dito atlas de orbifold do orbifold  $Q$ , assim como qualquer um de seus subatlas. Além disso, suas cartas serão ditas cartas de orbifold do orbifold  $Q$ .

Portanto o Exemplo 5 nos define uma estrutura de orbifold sobre o semiespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Note ainda que as cartas de uma variedade podem ser vistas como cartas de um orbifold com ação do grupo trivial. Além disso, as condições de compatibilidade do atlas da variedade, nesse caso, fazem com o que suas cartas satisfaçam as condições de compatibilidade de cartas de orbifold. Com isso em mente e com o Exemplo 5, temos que tanto variedades diferenciáveis quanto variedades com bordo são exemplos de orbifolds. Mais ainda, não é difícil notar que se no Exemplo 5 tivéssemos considerado o grupo  $G$  como o grupo de reflexões em um número finito de hiperplanos, teríamos uma estrutura de orbifold sobre uma *câmara de Weyl*, caso o leitor esteja familiarizado com o conceito.

## 4 Orbifolds

Mais ainda, se  $G$  é um grupo finito que age propriamente sobre uma variedade  $M$ , então o quociente  $M/G$  é Hausdorff e segundo-contável, que tem uma estrutura canônica de orbifold dada pela ação de  $G$  nas cartas da variedade  $M$  que têm pontos com isotropia não trivial e pela ação do grupo trivial nas outras cartas.

**Proposição 4.9** *Para todo orbifold  $Q$  existe um atlas  $\mathcal{A}$  tal que  $U = \mathbb{R}^n$  e  $G$  é um subgrupo finito de  $O(n)$*

**Demonstração:** Tome  $q \in Q$  e seja  $(U, G, \phi)$  uma carta de orbifold em  $Q$  t.q.  $q = \phi(p)$  para algum  $p \in U$ . Fixe uma métrica  $G$ -invariante em  $U$ . Temos que a exponencial associada a essa métrica é um difeomorfismo de uma vizinhança aberta de zero em  $T_p U$  numa vizinhança do ponto  $p$ . Além disso,  $G$  age linearmente sobre  $T_p U$  preservando produto interno; i.e.,  $G$  é um subgrupo de  $O(n)$ , o grupo de isometrias deste produto interno. A aplicação exponencial nos dá a conjugação dessa ação com a ação de  $G$  na vizinhança normal.  $\square$

Como corolário da proposição acima temos que a vizinhança de um ponto em um orbifold é um cone no  $(n-1)$ -orbifold esférico  $S^{n-1}/G$ , uma vez que a ação de um subgrupo finito  $G < O(n)$  é determinada, a menos de conjugação, pelo quociente métrico  $S^{n-1}/G$ ; como mostra o Lema 1 do artigo [swartz2002matroids].

Além disso, como conhecemos os subgrupos finitos de  $O(1)$ , de  $O(2)$  e de  $SO(3)$ , é possível classificar os orbifolds de dimensões 1 e 2 e os *orbifolds orientáveis*, que viremos a definir mais à frente, de dimensão 3 – como feito em [WinNT].

Agora que temos os objetos da nossa categoria bem definidos, vamos à definição dos morfismos.

**Definição 4.10** *Sejam  $Q$  e  $Q'$  dois orbifolds. Uma **aplicação de orbifold** é uma aplicação contínua  $f : Q \rightarrow Q'$  tal que para cada  $z \in Q$  existem cartas de orbifold  $(U, G, \phi)$  e  $(V, H, \psi)$  de  $Q$  e de  $Q'$ , respectivamente, com  $z \in \phi(U)$ , e uma aplicação suave  $\tilde{f} : U \rightarrow V$  t.q.  $\psi \circ \tilde{f} = f \circ \phi$ . Neste caso,  $\tilde{f}$  é dito **levantamento local** de  $f$ .*

É direta a verificação de que aplicações de orbifold são fechadas para composição, que é associativa, e de que a identidade tem a identidade do aberto subjacente da carta de orbifold em cada ponto como levantamento local. Deste modo, podemos falar na Categoria de orbifolds. Dois orbifolds são ditos isomorfos se são isomorfos em nessa categoria. Além disso, mapas de orbifolds  $Q \rightarrow \mathbb{R}$ , com contradomínio real, são ditos **funções suaves** no orbifold  $Q$ .

Fica claro da definição que aplicações entre variedades (com bordo) são aplicações de orbifolds. Outro exemplo trivial é o de aplicações constantes.

## 4 Orbifolds

Nosso intuito agora é provar que é possível falar do grupo de isotropia de um ponto num orbifold; isto é, que o grupo do isotropia não depende (a menos de classe de conjugação em  $GL(n, \mathbb{R})$ ) da escolha do modelo local do orbifold ao redor do ponto, tampouco de seu representante no modelo. Para tal, seja  $Q$  um orbifold. Fixe  $z \in Q$ . Note que, para cada carta de orbifold  $(U, G, \phi)$  com  $z \in \phi(U)$ , existe um  $x \in U$  tal que  $\phi(x) = z$ . Pelo Lema 4.2  $d_x$  define uma representação fiel de  $G_x$  em  $GL(n, \mathbb{R})$ . Além disso, se  $y \in U$  é tal que  $\phi(y) = z$ , então, como a aplicação  $\phi$  induz um homeomorfismo  $U/G \rightarrow \phi(U)$ , por definição de carta de orbifold, existe  $g \in G$  tal que  $y = gx$ . Neste caso,  $G_y = G_{gx} = gG_xg^{-1}$ . Deste modo,  $d_y$  e  $d_x$  estão na mesma classe de conjugação de  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Agora suponha que  $\lambda : (V, H, \psi) \rightarrow (U, G, \phi)$  é um mergulho entre cartas de orbifold tal que existe  $w \in V$  tal que  $\lambda(w) = x$ . Para cada  $h \in H_w$ ,  $\bar{\lambda}(h)x = \bar{\lambda}(h)\lambda(w) = \lambda(hw) = \lambda(w) = x$ , de modo que  $\lambda(h) \in G_x$ . Por outro lado, seja  $g \in G_x$ . Como  $\bar{\lambda} : H \rightarrow G$  é isomorfismo, existe  $h \in H$  tal que  $\bar{\lambda}(h) = g$ . Deste modo,  $\lambda(hw) = gx = x = \lambda(w)$ . Como  $\lambda$  é mergulho,  $hw = w$ . Assim,  $H_w = G_x$ .

Mais além, fixe  $h \in H_w$ . Note que,

$$(d\lambda)_w dh_w (d\lambda)_w^{-1} = (d\lambda)_w dh_w (d\lambda^{-1})_x = d(\lambda \circ h \circ \lambda^{-1})_x$$

Além disso,  $\lambda \circ h \circ \lambda^{-1}(x) = x$ , portanto,  $\lambda \circ h \circ \lambda^{-1} \in G_x$ . Deste modo,

$$(d\lambda)_w dH_w (d\lambda)_w^{-1} = dG_x.$$

Portanto, a classe de conjugação de  $dG_x$  depende apenas de  $z$ , como afirmado acima.

Assim, podemos definir o **grupo de isotropia** do ponto  $z$ , denotado por

$$\text{Iso}_z(Q),$$

como um subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  determinado a menos de conjugação.

Defina o **lócus singular** de  $Q$  por

$$\Sigma_Q = \{z \in Q : \text{Iso}_z(Q) \neq 1\}.$$

Seja  $(U, G, \phi)$  uma carta de orbifold de  $Q$ . Tome  $z \in \Sigma_Q \cap \phi(U)$ . Então existe  $x \in U$  t.q.  $\phi(x) = z$ , como  $\text{Iso}_z(Q)$  é, a menos de conjugação, o subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  determinado por  $dG_x$ , temos que  $G_x \neq 1$ . Portanto,  $z \in \phi(\Sigma_G)$ . Simetricamente,  $\phi(\Sigma_G) \subset \Sigma_Q \cap \phi(U)$ . Portanto,  $\Sigma_Q \cap \phi(U) = \phi(\Sigma_G)$ . Assim,  $\Sigma_Q$  é fechado, por ter complementar aberto, e de medida nula, por ser união enumerável de conjuntos de



medida nula.

### Métricas riemannianas e fibrados de referenciais em orbifolds

O objetivo dessa seção é estender o conceito de métricas riemannianas para orbifolds e construir o *fibrado de referenciais*, preparando o terreno para que o leitor possa vir futuramente a estudar teoria de  $G$ -estruturas neste contexto.

**Definição 4.11** *Seja  $Q$  um orbifold de atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, G_i, \phi_i)\}_i$ . Uma **métrica riemanniana** no orbifold  $Q$  é uma coleção  $\rho = (\rho_i)_i$  de métricas riemannianas  $\rho_i$  em  $U_i$ , tais que qualquer mergulho entre cartas de orbifolds  $\lambda : (U_i, G_i, \phi_i) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$  é uma isometria enquanto aplicação  $(U_i, \rho_i) \rightarrow (U_j, \rho_j)$ .*

**Proposição 4.12** *Todo orbifold admite métrica riemanniana.*

**Demonstração:** Sejam  $\{(U_i, G_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  um atlas de  $Q$  que cuja cobertura  $\phi_i(U_i)$  de  $Q$  é localmente finita (lembrando que  $Q$  é paracompacto) e  $\alpha_i : \phi(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$  uma partição da unidade subordinada a essa cobertura suave; i.e.  $\alpha_i \circ \phi_i$  é suave para todo  $i$  (a construção de tal partição é feita de maneira análoga à feita para variedades). Escolha para cada  $i \in I$  uma métrica riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle^{(i)}$  em  $U_i$ .

Fixe  $x \in U_i$ . Então existe um número finito de índices  $j \in I$  t.q.  $\phi_i(x) \in \phi_j(U_j)$ . Deste modo, podemos escolher um subconjunto  $G_i$ -estável  $S \subset U_i$  e mergulhos de cartas de orbifold  $\lambda_j : (S, (G_i)_S, \phi_i|_S) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$  que garantem a compatibilidade entre as cartas  $(U_i, G_i, \phi_i)$  e  $(U_j, G_j, \phi_j)$ . Para cada par  $u, v \in T_x(U_i)$  defina a métrica  $\rho_i$  em  $U_i$  como a seguinte combinação convexa de médias:

$$(\rho_i)_x(u, v) = \sum_{j \in I} \alpha_j(\phi_i(x)) \sum_{g \in G_j} \langle d(g \circ \lambda_j)_x(u), d(g \circ \lambda_j)_x(v) \rangle_{g\lambda_j(x)}^{(j)}$$

Note que, pela Proposição 4.7 (iv), as médias

$$\sum_{g \in G_j} \langle d(g \circ \lambda_j)_x(u), d(g \circ \lambda_j)_x(v) \rangle_{g\lambda_j(x)}^{(j)}$$

independem da escolha de  $S$  e dos mergulhos  $\lambda_j$ . Portanto,  $(\rho_i)_x$  também não depende de tais escolhas.

A verificação de que  $(\rho_i)_{i \in I}$  define de fato uma métrica riemanniana sobre  $Q$  é direta a partir das definições.  $\square$

É importante termos o cuidado de não confundirmos um orbifold com uma métrica riemanniana com um **orbifold riemanniano**, que é dado pelo quociente de uma

## 4 Orbifolds

variedade riemanniana por um subgrupo finito  $G < \text{Iso}(M)$  de isometrias. Note que pela construção acima a métrica de  $M$  induz naturalmente uma métrica sobre o orbifold  $M/G$  – todavia tal métrica não é única.

O restante deste texto será voltado para a definição do *fibrado de referenciais* de um orbifold, no qual pode-se definir canonicamente as ações  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  e de  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ ; neste último caso a partir da complexificação do fibrado tangente. Mas além, assim como no caso de variedades, as métricas riemannianas nos garantem uma redução do grupo de estruturas, i.e., uma  $G$ -estrutura no orbifold, com  $G$  sendo  $SO(n)$  no caso orientável e  $U(n)$  no caso não orientável, mas a partir da complexificação do fibrado tangente e, conseqüentemente, do fibrado de referenciais. As demonstrações destes fatos podem ser encontradas no fim da seção 2.4 de [mo], uma vez que elas dependem das teorias de foliações e de holonomia, que fogem ao escopo deste trabalho.

O fibrado de referenciais de uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  será denotado por  $F(M)$ . Tal fibrado tem como fibras  $F_x(M)$  a variedade formada por todas as bases ordenadas de  $T_x M$ , ou, equivalentemente, dos isomorfismos  $e : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ . Deste modo, a ação de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  sobre  $F(M)$  via  $e \cdot A = e \circ A$  define um fibrado principal de base  $M$ .

Agora, fixado um orbifold  $Q$ , para cada carta de orbifold  $(U_i, G_i, \phi_i)$  em seu atlas temos que  $F(U_i)$  é trivial, dado que  $U_i \subset \mathbb{R}^n$ . Podemos levantar a ação de  $G_i$  a  $F(U_i)$  via composição com a derivada; i.e.,  $ge := (dg)_x e$  para cada referencial  $e \in F_x(U_i)$ . Essa ação claramente comuta com a ação à direita de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , uma vez que  $(dg_x \circ e) \circ A = dg_x \circ (e \circ A)$ , e, se  $g \cdot e = e$ , para algum  $e \in F_x(M)$ , então  $dg_x e : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ , de modo que  $gx = x$ . Assim, seguindo a argumentação do primeiro parágrafo do Lema 4.2, tal ação é livre. Portanto,  $F(U_i)/G_i$  é variedade com uma ação à direita de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ .

Seja  $\pi : F(U_i) \rightarrow U_i$  a submersão canônica do fibrado de referenciais, i.e.,  $\pi(e) = x$  se  $e \in F_x(U_i)$ , de modo que  $\pi(eA) = \pi(e)$  se  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Podemos definir então  $p_i : F(U_i)/G_i \rightarrow Q$  via  $p_i(G_i(e)) = \phi_i(\pi(e))$ ; que está bem definida pois  $\phi(x) = \phi(gx)$  para qualquer  $g \in G_i$ . Além disso, para cada  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ,  $p_i(G(e)A) = p_i(G(eA)) = \phi_i(\pi(eA)) = \phi_i(\pi(e)) = p_i(G(e))$ . Portanto,  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  age ao longo das fibras de  $p_i$ .

Fixe agora  $\lambda : (U_i, G_i, \phi_i) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$  um mergulho entre cartas de orbifold. Defina então o mergulho  $\tilde{\lambda} : F(U_i) \rightarrow F(U_j)$  via  $\tilde{\lambda}(e) = d\lambda \circ e$ . Ademais, para cada  $g \in G_i$  e para cada  $e \in F_x(U_i)$ ,

$$\tilde{\lambda}(ge) = d\lambda_{gx} dg_x e = d(\lambda \circ g \circ \lambda^{-1})_{\lambda(x)} \circ d\lambda_x \circ e = d(\bar{\lambda}(g))_{\lambda(x)} \circ \tilde{\lambda}(e) = \bar{\lambda}(g)\tilde{\lambda}(e).$$

## 4 Orbifolds

De modo que  $\tilde{\lambda}$  define a aplicação  $\lambda_* : F(U_i)/G_i \rightarrow F(U_j)/G_j$ , que é um mergulho suave aberto, uma vez que  $\lambda(U_j)$  é  $G_j$ -estável. Mais ainda, se  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_*(G_i(e) \cdot A) &= \lambda_*(G_i(e \cdot A)) = G_j(\tilde{\lambda}(e \cdot A)) = G_j(d\lambda \circ (e \circ A)) \\ &= G_j((d\lambda \circ e) \circ A) = G_j((d\lambda \circ e)) \cdot A = \lambda_*(G_i(e)) \cdot A. \end{aligned}$$

Isto é, o mergulho  $\lambda_*$  comuta com a ação de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  e  $p_j \circ \lambda_* = p_i$ . Além disso, uma demonstração direta mostra que  $g_* = \text{id}$ . Isto implica que, pelo item (iv) da Proposição 4.7, para quaisquer dois mergulhos entre cartas de orbifold  $\lambda, \mu : (U_i, G_i, \phi_i) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$  temos que  $\lambda_* = \mu_*$ .

Deste modo, temos que  $\langle F(U_i)/G_i, \lambda_*^{ij} \rangle$ , com  $\lambda^{ij} : (U_i, G_i, \phi_i) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$  um mergulho de cartas de orbifolds, é um sistema dirigido filtrado (*filtered directed system*). Definimos então o **fibrado de referenciais** do orbifold  $Q$  como o colimite deste sistema direto, i.e.,

$$F(Q) = \varinjlim \{F(U_i)/G_i, \lambda_*^{ij}\}.$$

Deste modo,  $F(Q)$  é uma variedade, tal que cada  $F(U_i)/G$  é uma subvariedade imersa e as aplicações  $p_i$  induzem uma aplicação aberta  $p : F(Q) \rightarrow Q$ , sobre a qual a ação de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  é transitiva ao longo das fibras. Em particular,  $F(Q)/\text{GL}(n, \mathbb{R}) \cong Q$ . Além disso, para cada  $\eta \in F(Q)$  temos que  $\text{GL}(n, \mathbb{R})_\eta \cong \text{Iso}_{p(\eta)}(Q)$ , de modo que os grupos de isotropia desta ação são todos finitos.

## A esfera

Sejam  $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$  o círculo unitário e  $S^3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = 1\}$  a esfera tridimensional. Temos que  $S^1$  age sobre  $S^3$  por multiplicação à esquerda em suas coordenadas:

$$e^{i\theta} \cdot (x, y) = (e^{i\theta}x, e^{i\theta}y).$$

Tome  $(x, y) \in S^3$ . E tome  $e^{i\theta}$  na isotropia  $S^1_{(x,y)}$ , isto é,

$$e^{i\theta} \cdot (x, y) = (x, y).$$

Então, pela forma como a ação foi definida,  $e^{i\theta}x = x$  e  $e^{i\theta}y = y$ . Como  $|x|^2 + |y|^2 = 1$ ,  $x \neq 0$  ou  $y \neq 0$ , donde concluímos que  $e^{i\theta} = 1$ . Logo,  $(x, y)$  tem isotropia trivial, isto é,  $S^1_{(x,y)} = \{1\}$ .

Como é bem sabido na teoria de ações, se  $G \curvearrowright M$  é uma ação própria do grupo  $G$  na variedade  $M$ , então a órbita de um ponto  $m \in M$ ,  $G \cdot m = \{g \cdot m : g \in G\}$  é difeomorfa ao quociente  $G/G_m$ , com  $G_m$  denotando a isotropia do ponto  $m$ . Como  $S^1$  é compacto, temos que a ação  $S^1 \curvearrowright S^3$  recém definida é própria. Deste modo, como as isotropias de cada ponto de  $S^3$  são triviais, temos que as órbitas desta ação são círculos.

Voltemos brevemente nossa atenção à ação  $S^1 \curvearrowright \mathbb{C}$  dada pelo produto,

$$e^{i\theta} \cdot z = e^{i\theta}z.$$

Lembre que todo número complexo pode ser escrito na sua forma polar  $z = |z|e^{i\theta_0}$  com  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . Deste modo,  $e^{-i\theta_0}z = |z|$ . Ou seja, toda órbita desta ação intersecta a semireta  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$  exatamente uma vez.

Deste modo, fica evidente que cada órbita da ação  $S^1 \curvearrowright S^3$  intersecta a calota esférica  $S^2_+ = \{(x, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ : |x|^2 + r^2 = 1\}$  uma única vez, exceto pela órbita dos pontos da forma  $(z, 0)$  com  $z \in S^1$ , cuja órbita é formada pela equador  $\{(z, 0) \in \mathbb{C}^2 :$

5 Exemplos: a esfera, a coxinha e o quibe

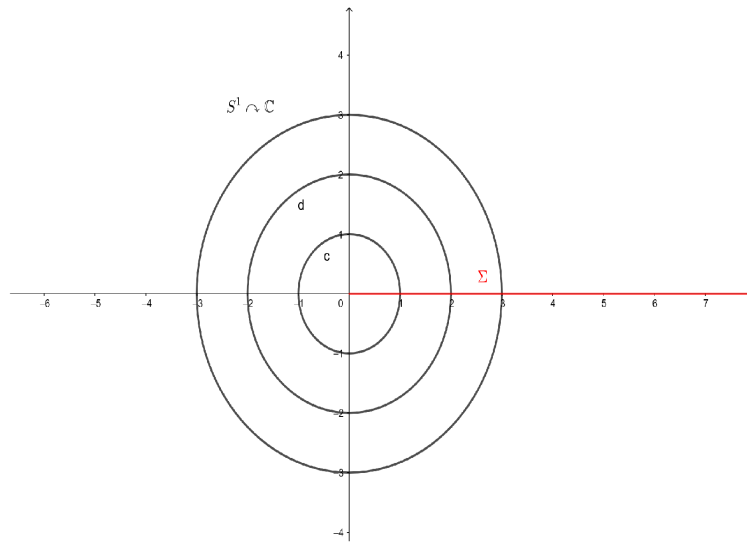


Figura 5.1: Ação  $S^1 \curvearrowright \mathbb{C}$

$|z| = 1\}$ . De modo que este equador se projeta em um único ponto no quociente  $S^3/S^1$ . Fica claro então que tal quociente é homeomorfo à esfera  $S^2$ .

## A coxinha

Façamos uma leve alteração na ação  $S^1 \curvearrowright S^3$  recém definida. Fixe  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  e defina agora, para  $e^{i2\pi\theta} \in S^1$  e  $(x, y) \in S^3$ ,

$$e^{i2\pi\theta} \cdot (x, y) = (e^{i2\pi n\theta} x, e^{i2\pi\theta} y).$$

Analogamente ao caso anterior, se  $y \neq 0$ ,  $S^1_{(x,y)} = \{1\}$ . Agora,

$$e^{i2\pi\theta} \cdot (e^{i2\pi\alpha}, 0) = (e^{i2\pi\alpha}, 0)$$

se, e somente se,

$$e^{i2\pi n\theta} = 1,$$

de modo que  $e^{i\theta}$  é uma raiz  $n$ -ésima da unidade. Deste modo,

$$S^1_{(x,0)} = \{e^{i2\pi/m} : m = 0, 1, \dots, n-1\} \cong \mathbb{Z}_n.$$

Temos novamente que todas as órbitas desta ação  $S^1 \curvearrowright S^3$  intersectam o hemisfério superior  $S^2_+$ , tal qual o exemplo anterior, com o polo norte sendo a órbita dos pontos da forma  $(x, 0)$ . Deste modo, o quociente  $S^3/S^1$  é homeomorfo à esfera, mas com o grupo de isotropia  $S_N$  do polo norte  $N$  sendo o grupo de raízes da unidade  $\mathbb{Z}_n$ . Deste modo,  $S^3/S^1$  é um orbifold em que o ponto  $N$  admite um modelo local dado pelo cone  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^n$ . A figura abaixo representa tal modelo local e foi retirada de [<https://doi.org/10.48550/arxiv.1909.08699>], com  $H$  representando as raízes cúbicas da unidade e  $\tilde{U}$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$ :

5 Exemplos: a esfera, a coxinha e o quibe

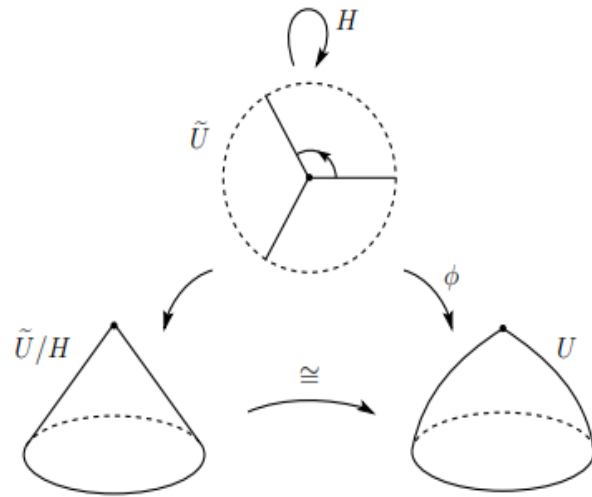


Figura 5.2: Modelo local  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^3$

Assim, o quociente dessa ação é a coxinha ou a gota, representada na Figura 5.3.



Figura 5.3: Gota

# O quibe

Fixemos agora  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  com  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . E definamos agora a ação  $S^1 \curvearrowright S^3$  dada por

$$e^{i2\pi\theta} \cdot (x, y) = (e^{i2n\pi\theta} x, e^{i2m\pi\theta} y).$$

Fica evidente que quando  $x, y \neq 0$ ,  $S^1_{(x,y)} = 1$ .

Seguindo o raciocínio do caso anterior, temos que  $S^1_{(x,0)} = \mathbb{Z}_n$  e  $S^1_{(0,y)} = \mathbb{Z}_m$ . Além disso, a órbita de um ponto da forma  $(0, y)$  é o hemisfério superior  $S^2_+$  fixado anteriormente, que era projetado no polo sul da esfera. Ou seja, o espaço quociente desta ação é um orbifold homeomorfo a esfera cujos pontos singulares são o polo norte  $N$  e o polo sul  $S$ , com  $S^1_N = \mathbb{Z}_n$  e  $S^1_S = \mathbb{Z}_m$ . Deste modo, os modelos locais dos dois polos deste orbifold são cones. Sendo assim, o quociente dessa ação é o quibe representado na imagem abaixo.



Figura 5.4: Quibe