Trabalho de Conclusão de Curso - Bacharelado em Matemática

Superfícies de Riemann e o teorema de Riemann-Roch

Leonardo Bertucci dos Santos

Universidade Federal do ABC

Título: Superfícies de Riemann e o teorema de Riemann-Roch

Autor: Leonardo Bertucci dos Santos
Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Mariana Rodrigues da Silveira
Universidade Federal do ABC

Santo André, 02 de junho de 2021.

Conteúdo

1 Introdução **5**

2 Fundamentos de Geometria Diferencial **7**

2.1 Variedades Diferenciáveis 7

2.2 Grupo Fundamental 11

2.3 Campos tensoriais em uma variedade 16

3 Superfícies de Riemann **23**

3.1 Complexificação de espaços vetoriais 23

3.2 Teoria das funções holomorfas 24

3.3 Superfícies de Riemann 26

3.4 Teoria dos feixes e Cohomologia 30

3.5 Divisores 36

3.6 Teorema de Riemann-Roch 39

4 Conclusão **42**

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é resumir alguns tópicos essenciais de Geometria Diferencial e então provar alguns resultados na teoria de Superfícies de Riemann. Fazemos isso introduzindo conceitos de geometria complexa para concluirmos com uma apresentação do Teorema de Riemann-Roch, o qual pode ser usado na demostração da existência de funções meromórficas com restrições em seus zeros e pólos numa dada superfície de Riemann. Começamos esse trabalho apresentando algumas ideias fundamentais em geometria diferencial e grupos fundamentais, e então em superfícies de Riemann, onde estudamos divisores e cohomologia de feixes, temas do nosso último teorema.

Abstract

The main objective of this work is to survey some essential topics of Differential Geometry and to prove some results on the Riemann surfaces theory. We do so by introducing concepts of complex geometry in order to conclude with a presentation of the Riemann-Roch theorem, which could be used to prove the existence of meromorphic functions with restrictions to its zeros and poles in a given Riemann Surface. We begin this work by presenting some fundamental ideas on differential geometry and fundamental groups theory, and then on Riemann surfaces, where we approach divisors and sheaf cohomology, theme of our last theorem.

1 Introdução

Uma variedade é um espaço topológico que localmente se parece com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Uma variedade munida de uma estrutura diferenciável permite o estabelecimento dos diversos recursos de cálculo diferencial sobre esta variedade, permitindo uma generalização do cálculo tradicional para outros espaços. Variedades diferenciáveis são objeto central de estudo na geometria diferencial. De maneira análoga, podemos estender as ferramentas de cálculo e análise complexa para uma variedade munindo-a de uma estrutura conforme, obtendo o que chamamos então de variedade complexa. Em particular, as variedades complexas de dimensão (complexa) 1 são denominadas superfícies de Riemann.

A teoria das superfícies de Riemann é uma área que faz conexão com diversas outras áreas da matemática, em particular geometria diferencial, geometrica algébrica e topologia algébrica, e assim se mostra um excelente tema para expor um aluno ao final da graduação a campos mais avançados da matemática. No segundo capítulo abordamos noções básicas de geometria diferencial e topologia algébrica, ferramentas importantes para compreensão das superfícies de Riemann e resultados apresentados no tema. Para isso nos baseamos principalmente em [1], [2] e [4]. Tentamos, nesse capítulo, não apenas apresentar os conceitos necessários à demonstração do Teorema de Riemann-Roch, mas abordar também alguns tópicos que ofereçam ao leitor uma sólida base para projetos em áreas afins, como, por exemplo, varieadades de Kähler e espaços de Teichmüller.

No terceiro capítulo começamos com uma rápida apresentação do conteúdo necessário sobre funções de váriáveis complexas e complexificação de espaços vetoriais, usando [8] e [7], e introduzimos as superfícies de Riemann. Utilizamos a seguir a teoria dos feixes para construir grupos de cohomologia em uma superfície de Riemann e apresentamos o conceito de divisores para descrever zeros e pólos de funções meromorfas. Na última seção provamos efetivamente o teorema de Riemann-Roch, que pode ser usado para a prova da existência de funções meromorfas com zeros e pólos limitados por certos divisores em uma superfícies de Riemann. O conteúdo principal deste capítulo foi baseado majoritariamente em [6], utilizando [2] e [5] quando necessário.

2 Fundamentos de Geometria Diferencial

2.1 Variedades Diferenciáveis

O conceito de variedade diferenciável surge como uma generalização da ideia de superfície regular em $\mathbb{R}^3$, e permite estender os métodos de cálculo para outros espaços além do $\mathbb{R}^3$. É um conceito abstrato, que não necessita de um espaço ambiente como as superfícies regulares, e que levou quase um século para ser construído da forma que o conhecemos hoje e que apresentaremos aqui. As definições dessa primeira seção foram baseadas majoritariamente em [1].

Definição 1. Uma **variedade diferenciável** de dimensão n é um conjunto M munido de uma família de aplicações bijetivas $X_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to M$, onde U_α são abertos do $\mathbb{R}^n$, tais que

1. $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para todo par α, β, com $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $X_\alpha^{-1}(W)$ e $X_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ é maximal com relação às condições 1 e 2.

Se $p \in X_\alpha(U_\alpha)$, a aplicação X_α é chamada **parametrização** ou **carta** de M em p, e $X_\alpha(U_\alpha)$ é uma **vizinhança coordenada** de p. Um conjunto de cartas que satisfaz (1) é chamado **atlas** de M.

Uma família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ que satisfaz (1), (2) e (3) é chamada **estrutura diferenciável** em M.

Definição 2. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis de dimensões n e m, respectivamente. Dizemos que uma aplicação $\phi : M_1 \to M_2$ é **diferenciável** em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $Y : V \subseteq \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\phi(p)$ existe uma parametrização $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\phi(X(U)) \subseteq Y(V)$ e a aplicação

$$Y^{-1} \circ \phi \circ X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $X^{-1}(p)$.

Exemplo 1. ([1]) Uma superfície regular do $\mathbb{R}^3$ é uma variedade diferenciável.

Exemplo 2. (Variedade produto) Sejam M, N variedades diferenciáveis, com $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, Y_\beta)\}$ suas respectivas estruturas diferenciáveis. Considere o produto cartesiano $M \times N$ e a aplicação $Z_{\alpha\beta} : (U_\alpha \times V_\beta) \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to M \times N$ dada por

$$Z_{\alpha\beta}(p,q) = (X_\alpha(p), Y_\beta(q)).$$

Vejamos que $\{(U_\alpha \times V_\beta, Z_{\alpha\beta})\}$ é estrutura diferenciável em $M \times N$:

1. $\bigcup_{\alpha,\beta} Z_{\alpha\beta}(U_\alpha, V_\beta) = \bigcup_{\alpha,\beta}(X_\alpha(U_\alpha), Y_\beta(V_\beta)) = M \times N$.

2. Sejam $Z_{\alpha\beta}$ e $Z_{\gamma\delta}$ tais que $Z_{\alpha\beta}(U_\alpha, V_\beta) \cap Z_{\gamma\delta}(U_\gamma, V_\delta) = W_m \times W_n = W \neq \emptyset$. Então $Z_{\alpha\beta}^{-1}(W) = (X_\alpha^{-1}(W_m), Y_\beta^{-1}(W_n))$ é um aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$ (assim como $Z_{\gamma\delta}^{-1}(W)$). Para verificar que $Z_{\alpha\beta}^{-1} \circ Z_{\gamma\delta}$ é diferenciável basta ver que

$$(Z_{\alpha\beta}^{-1} \circ Z_{\gamma\delta})(p,q) = Z_{\alpha\beta}^{-1}(X_\gamma(p), Y_\delta(q)) = (X_\alpha^{-1} \circ X_\gamma(p), Y_\beta^{-1} \circ Y_\delta(q)),$$

de onde segue o resultado.

Definição 3. Seja M uma variedade diferenciável e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva (diferenciável) em M. Defina $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M em $\mathbb{R}$ diferenciáveis em p. Definimos o **vetor tangente à curva** α em $t = 0$ como a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Intuitivamente, se pensarmos no caso em que $M = \mathbb{R}^n$, estamos vendo $\alpha'(0)$ como um operador que leva a função f em sua derivada direcional no ponto p na direção de $\alpha'(0)$.

Um **vetor tangente** em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p é denotado T_pM.

Se adotarmos uma parametrização $X : U \to M$ em p, com $q = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, podemos escrever a função f e a curva α como:

$$f \circ X(q) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

$$X^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned}\alpha'(0)f &= \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\mid_{t=0} = \frac{d}{dt}f(x_1(t),\ldots,x_n(t))\mid_{t=0}\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)f.\end{aligned}$$

Assim, podemos expressar o vetor $\alpha'(0)$ na parametrização X por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0.$$

A partir da equação acima, o conjunto T_pM com as operações usuais de funções forma um espaço vetorial de dimensão n, e a escolha de uma parametrização $X : U \to M$ determina um base associada $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$ em T_PM. Também usaremos a notação $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 = \partial_i \mid_p$ para simplificação quando necessário, ou apenas ∂_i quando o ponto p não estiver fixado.

Podemos agora generalizar a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável para as aplicações entre variedades.

Proposição 1. *([1]) Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis e seja $\phi : M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M_1$tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Considere $\beta = \phi\circ\alpha$. A aplicação $d\phi_p : T_pM_1 \to T_{\phi(p)}M_2$ dada por $d\phi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α. Tal aplicação $d\phi_p$ é chamada **diferencial** de ϕ em p.*

Definição 4. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : M_1 \to M_2$ é um **difeomorfismo** se ela é diferenciável, bijetiva e possui inversa ϕ^{-1} diferenciável. ϕ é um **difeomorfismo local** em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\phi(p)$ tais que $\phi : U \to V$ é um difeomorfismo.

Exemplo 3. (Fibrado Tangente) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n com $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ uma estrutura diferencial maximal. Denotaremos por $(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $X_\alpha(U_\alpha)$. Considere o conjunto $TM = \{(p,v) : p \in M, v \in T_pM\}$ e a parametrização

$$Y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$$

dada por

$$Y_\alpha(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha,u_1,\ldots,u_n) = \left(X_\alpha(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right).$$

Então TM munido da estrutura diferenciável $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, Y_\alpha)\}$ (ver [1]) é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, a qual será chamada *fibrado tangente* de M. Geometricamente, estamos tomando como coordenadas de um ponto $(p,v) \in T_pM$ as coordenadas de p em M junto com as coordenadas de v na base associada de T_pM.

Definição 5. Dizemos que uma variedade diferenciável M é **orientável** se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ tal que:

1. Para todo par α,β, com $X_\alpha(U_\alpha)\cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $X_\beta \circ X_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Caso contrário, M é **não-orientável**.

Proposição 2. *O fibrado tangente TM de uma variedade diferenciável M é orientável.*

Demonstração. Considere $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ a estrutura diferenciável de M e $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, Y_\alpha)\}$ a estrutura diferenciável induzida em TM, como no *Exemplo 3*.

Se $X_\alpha(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha)$ e $X_\beta(x_1^\beta,\ldots,x_n^\beta)$ são coordenadas em M, com $X_\alpha(U_\alpha)\cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, escrevemos a mudança de coordenadas $h(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha) = X_\beta^{-1}\circ X_\alpha(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha) = (x_i^\beta(x_j^\alpha))$, $i,j = 1,\ldots,n$. Assim, temos o diferencial da mudança de coordenadas em M dado por

$$dh_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^\beta}{\partial x_1^\alpha}(p) & \frac{\partial x_1^\beta}{\partial x_2^\alpha}(p) & \cdots & \frac{\partial x_1^\beta}{\partial x_n^\alpha}(p) \\ \frac{\partial x_2^\beta}{\partial x_1^\alpha}(p) & \frac{\partial x_2^\beta}{\partial x_2^\alpha}(p) & \cdots & \frac{\partial x_2^\beta}{\partial x_n^\alpha}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^\beta}{\partial x_1^\alpha}(p) & \frac{\partial x_n^\beta}{\partial x_2^\alpha}(p) & \cdots & \frac{\partial x_n^\beta}{\partial x_n^\alpha}(p) \end{bmatrix}.$$

Note que dado $p \in W$, dh_p é a matriz de mudança de base entre as bases $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}\right)_0,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right)_0\right\}$ e $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\beta}\right)_0,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n^\beta}\right)_0\right\}$ do T_pM. Assim, denotando a mudança de coordenadas em TM por $H(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha,u_1,\ldots,u_n) = Y_\beta^{-1}\circ Y_\alpha(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha,u_1,\ldots,u_n)$ e considerando a aplicação $v \mapsto dh_p v$, temos que seu diferencial $dH_{(p,u)}$ é dado por

$$dH_{(p,u)} = \begin{bmatrix} dh_p & 0 \\ 0 & d(dh_p v)_{v_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dh_p & 0 \\ 0 & dh_p \end{bmatrix},$$

e concluímos que $\det(dH) = [\det(dh)]^2 > 0$. □

2.2 Grupo Fundamental

Nesta seção vamos introduzir o tema de grupo fundamental e espaços de recobrimento de uma variedade M. Definimos uma **curva** ou **caminho** em uma variedade M como uma aplicação contínua $g : [0,1] \to M$.

Definição 6. Seja M uma variedade diferenciável e $g_i : [0,1] \to M$, $i = 1,2$ curvas tais que

$$g_1(0) = g_2(0) = p_0,$$
$$g_1(1) = g_2(1) = p_1.$$

Dizemos que g_1 e g_2 são **homotópicas** se existe uma aplicação contínua $G : [0,1] \times [0,1] \to M$, denominada **homotopia**, tal que

$$G|_{\{0\}\times[0,1]} = p_0, \quad G|_{\{1\}\times[0,1]} = p_1,$$
$$G|_{[0,1]\times\{0\}} = g_1, \quad G|_{[0,1]\times\{1\}} = g_2.$$

Escrevemos $g_1 \approx g_2$.

A **classe de homotopia** de uma curva g é a classe de equivalência de todas as curvas homotópicas a g.

Exemplo 4. Duas curvas $g_1, g_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ com mesmos pontos iniciais e finais são homotópicas, via a homotopia:

$$G(t,s) = (1-s)g_1(t) + sg_2(t).$$

Exemplo 5. Se g_2 é uma reparametrização da curva g_1 por meio de $h(t)$, de modo que $g_2(t) = g_1(h(t))$, então $g_2 \approx g_1$. De fato, basta tomarmos

$$G(t,s) = g_1((1-s)t + s \cdot h(t)).$$

Definição 7. Sejam $g_1, g_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ curvas cujo ponto final de g_1 seja o ponto inicial de g_2, i.e., $g_1(1) = g_2(0)$. Definimos o produto $g_2 g_1 := g$ por

$$g(t) := \begin{cases} g_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Decorre da definição que se $g_1 \approx g_1'$ via G_1 e $g_2 \approx g_2'$ via G_2, implica que $g_2 g_1 \approx g_2' g_1'$, via a homotopia

$$G(t,s) = \begin{cases} G_1(2t,s), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G_2(2t-1,s), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Assim, a classe de homotopia de $g_1 g_2$ depende apenas das classes de g_1 e g_2, e podemos definir uma multiplicação de classes de homotopia do mesmo modo:

$$[g_1] \cdot [g_2] = [g_1 g_2].$$

Definição 8. Para cada $p_0 \in M$, definimos o **grupo fundamental** $\pi_1(M,p_0)$ como o grupo formado pelas classes de homotopia dos caminhos $g : [0,1] \to M$ com $g(0) = g(1) = p_0$, ou seja, dos caminhos fechados tendo p_0 como ponto inicial e final, munido da a operação de multiplicação de classes de homotopia.

Teorema 1. *$\pi_1(M,p_0)$ como definido acima é um grupo.*

Demonstração. Como todos os caminhos considerados possuem o mesmo ponto inicial e final, a multiplicação de classes de homotopia está bem definida em $\pi_1(M,p_0)$ e é claramente associativa. A classe de equivalência do caminho constante $g_0(t) = p_0$ é a identidade do grupo, pois dado uma clase $[g_1]$, $g_1 g_0$ nada mais é do que uma reparametrização de g_1, e portanto, $[g_1 g_0] = [g_1]$; denotaremos $[g_0] = 1$. Já o inverso de um caminho g é dado pelo mesmo caminho percorrido na direção contrária: $g^{-1}(t) := g(1-t)$. Uma homotopia entre g_0 e $g^{-1} \cdot g$ é dada por

$$G(t,s) = \begin{cases} g(2st), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g^{-1}(s(2t-1)) = g(1-s(2t-1)), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

e concluímos que

$$[g^{-1}] \cdot [g] = 1.$$

□

O Lema a seguir mostra que π_1 é independente do ponto p_0 de M em que é tomado. Denotaremos a partir de então o grupo fundamental de uma superfície M apenas por $\pi_1(M)$.

Lema 1. *Seja M uma variedade diferenciável conexa. Para quaisquer $p_0, p_1 \in M$, os grupos $\pi_1(M,p_0)$ e $\pi_1(M,p_1)$ são isomorfos.*

Demonstração. Considere o caminho γ tal que $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p_1$. Então a aplicação $\phi : \pi_1(M,p_1) \to \pi_1(M,p_0)$ que leva g em $\phi(g) = \gamma^{-1} g \gamma$ é um isomorfismo de grupos. □

Definição 9. Um caminho fechado $g : [0,1] \to M$ com $g(0) = g(1) = p_0$ que é homotópico ao caminho constante g_0 é dito **homotopicamente nulo**. Dizemos que M é **simplesmente conexa** se $\pi_1(M) = \{1\}$.

Proposição 3. *S^n é simplesmente conexa para $n \geq 2$.*

Demonstração. Seja $g(t)$ uma curva fechada em S^n tendo p_0 como ponto inicial e final e tal que $g([0,1]) \neq S^n$. Vejamos que $g(t)$ é homotópica ao caminho constante $g_0(t) = p_0$. Tome um ponto $p \in S^n$ fora da imagem de g e considere a projeção estereográfica $\pi : S^n \backslash \{p\} \to \mathbb{R}^n$. Então

$$G(t,s) = \pi^{-1}[(1-s) \cdot \pi(g(t)) + s\pi(p_0))]$$

é homotopia entre g e g_0, já que a projeção estereográfica é uma função contínua.

O caso em que $g(t)$ cobre a esfera toda é feito mostrando-se que qualquer curva em S^n é homotópica a uma curva que não cobre toda a esfera. Essa demonstração pode ser encontrada em detalhes em [3]. □

Definição 10. Sejam M e B variedades. Uma aplicação $\pi : M \to B$ é dita uma **cobertura** ou **recobrimento** se para todo $b \in B$ vale:

1. $\pi^{-1}(b)$ é uma união disjunta de pontos.

2. Existe uma vizinhança U de b em B tal que $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ é uma união disjunta de abertos, cada qual homeomorfo a U via π.

Nestas condições M é chamado **espaço de recobrimento** e B é chamado **espaço base**. Quando M é simplesmente conexo, o denominamos **recobrimento universal**.

Exemplo 6. A reta $\mathbb{R}$ é recobrimento universal de S^1, via a aplicação $\pi : \mathbb{R} \to S^1, \pi(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$. As condições 1 e 2 se verificam facilmente. Intuitivamente, pode-se pensar na reta como uma hélice circular se projetando sobre o círculo.

Veremos agora alguns resultados quem exibem as relações entre os grupos fundamentais de uma variedade e seus espaços de recobrimento.

Lema 2. *Seja $\pi : M \to B$ um recobrimento com $p_0 \in B$, $\tilde{p_0} \in \pi^{-1}(p_0)$, e $g : [0,1] \to B$ uma curva em B com $g(0) = p_0$. Então existe uma única curva $\tilde{g}$ em M com $\tilde{g}(0) = \tilde{p_0}$ tal que*

$$\pi \circ \tilde{g} = g.$$

*Tal curva $\tilde{g}$ é denominada um **levantamento** de g.*

Demonstração. Considere $T := \{t \in [0,1] : g|_{[0,t]}$ pode ser levantada para uma única curva $\tilde{g}|_{[0,t]}$ com $\tilde{g}(0) = \tilde{p_0}\}$. Temos que $T \neq \emptyset$, já que $0 \in T$.

Dado $t \in T$, existe uma vizinhança U de $g(t)$ tal que cada componente de $\pi^{-1}(U)$ é homeomorfa a U via π, como na definição de recobrimento. Denote $\tilde{U}$ a componente de $\pi^{-1}(U)$ que contém $\tilde{p_0}$. Existe então $\varepsilon > 0$ tal que $g([t, t+\varepsilon]) \subset U$, e assim, $\tilde{g}$ pode ser extendida unicamente para um levantamento de g em $[t, t+\varepsilon]$, já que $\pi : \tilde{U} \to U$ é um homeomorfismo. Deste modo, $(t+\varepsilon) \in T$, e temos que $[0, t+\varepsilon)$ é um aberto de $[0,1]$ contido em T que contém t. Provamos assim que T é aberto em $[0,1]$.

Para verificar que T é também fechado, considere uma sequência $(t_n) \subset T$, $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Considere uma vizinhança U de $g(t_0)$ como anteriormente. Como (t_n) converge para t_0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g([t_{n_0}, t_0]) \subset U$. Denote $\tilde{U}$ a componente de $\pi^{-1}(U)$ que contém $\tilde{g}(t_{n_0})$. $\tilde{g}$ pode então ser extendida para $[t_{n_0}, t_0]$, já que $\pi : \tilde{U} \to U$ é homeomorfismo. Logo $t_0 \in T$, e T é fechado em $[0,1]$. Portanto $T = [0,1]$. □

Corolário 1. *Seja $\pi : M \to B$ um recobrimento, $g : [0,1] \to B$ uma curva fechada com $g(0) = g(1) = p_0$ e $\tilde{g} : [0,1] \to M$ um levantamento de g. Suponha que g é homotópica à curva constante $g_0(t) = p_0$. Então $\tilde{g}$ é fechada e homotópica à curva constante em M.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema anterior. □

Proposição 4. *O grupo fundamental de S^1 é isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$.*

Intuitivamente, cada elemento de $\pi_1(S^1)$ será classificado pelo número de voltas que dá na circunferência. Vamos começar definindo uma função que consiga medir essa característica.

Seja $\gamma : [0,1] \to S^1$ uma curva em S^1. Considere um levantamento $\tilde{\gamma}$ de γ em $\mathbb{R}$ via o recobrimento universal $\pi(t) = e^{it}$, visto no exemplo anterior. Chamamos $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ de *função ângulo* do caminho γ. Escolhendo um t_0 tal que $\pi(t_0)$=$\gamma(0)$ e definindo uma função ângulo $\tilde{\gamma}$ com $\tilde{\gamma}(0) = t_0$, as outras funções ângulo $\hat{\gamma}$ para o caminho γ (que provém da escolha de outro ponto $t_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$) se relacionam com $\tilde{\gamma}$ por $\hat{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Se γ é uma curva fechada, para qualquer função ângulo $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ de γ o número

$$n(\gamma) = \frac{\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)}{2\pi}$$

é um inteiro que não depende da escolha de $\tilde{\gamma}$. $n(\gamma)$ é chamado *grau* do caminho γ, e mede o número de voltas que o ponto $\gamma(t)$ dá ao longo de S^1. Vamos verificar que a função n é um isomorfismo de grupos.

Lema. *Sejam γ_1 e γ_2 curvas em S^1 com mesmos pontos iniciais e finais.*

1. Se γ_1 e γ_2 são homotópicas via G, então $n(\gamma_1) = n(\gamma_2)$.

2. Se $n(\gamma_1) = n(\gamma_2)$, então γ_1 e γ_2 são homotópicas.

Demonstração. 1. Suponha que $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < 2$ para todo $t \in I$, i.e., os pontos $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ nunca são antípodas. Defina $\gamma_1(0) = e^{it_0} = \gamma_2(0)$, e considere $\tilde{\gamma_1}$ e $\tilde{\gamma_2}$ as respectivas funções ângulo com $\tilde{\gamma_1}(0) = \tilde{\gamma_2}(0) = t_0$.

Como $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ nunca são antípodas, temos que $|\tilde{\gamma_1}(t) - \tilde{\gamma_2}(t)| < \pi, \forall t$. Portanto, temos:

$$
\begin{aligned}
2\pi|n(\gamma_1) - n(\gamma_2)| &= |\tilde{\gamma_1}(1) - \tilde{\gamma_1}(0) - \tilde{\gamma_2}(1) + \tilde{\gamma_2}(0)| \\
&\leq |\tilde{\gamma_1}(1) - \tilde{\gamma_2}(1)| + |\tilde{\gamma_1}(0) - \tilde{\gamma_2}(0)| \\
&< \pi + \pi = 2\pi.
\end{aligned}
$$

Logo, $|n(\gamma_1) - n(\gamma_2)| < 1$ e $n(\gamma_1) = n(\gamma_2)$. Vejamos que podemos estender este caso para o caso geral:

Como G é uniformemente contínua (pois é contínua num compacto), temos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|s - s_0| < \delta$ implica $|G(t,s) - G(t,s_0)| < \varepsilon$, para todo $t \in I$.

Considere δ para o caso particular $\varepsilon = 2$.

Sejam $s_0 = 0 < \ldots < s_k = 1$ tais que $s_{i+1} - s_i < \delta$ e defina os caminhos fechados $g_i(t) = G(t, s_i), i = 0, \ldots, k$. Então $|g_i(t) - g_{i+1}(t)| < 2, \forall t \in I$. Recaíndo no caso que acabamos de provar, obtemos que $n(\gamma_1) = n(g_1) = n(g_2) = \ldots = n(g_{k-1}) = n(\gamma_2)$.

2. Considere as funções de ângulo $\tilde{\gamma_1}$ e $\tilde{\gamma_2}$ tais que $\tilde{\gamma_1}(0) = \tilde{\gamma_2}(0) = t_0$, onde $\gamma_1(0) = e^{it_0}$. Pela hipótese temos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\gamma_1}(1) - \tilde{\gamma_1}(0) &= \tilde{\gamma_2}(1) - \tilde{\gamma_2}(0) \\
\tilde{\gamma_1}(1) - t_0 &= \tilde{\gamma_2}(1) - t_0 \\
\tilde{\gamma_1}(1) &= \tilde{\gamma_2}(1).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\tilde{\gamma_1}$ e $\tilde{\gamma_2}$ possuem mesmo ponto inicial e final em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo, existe homotopia H entre $\tilde{\gamma_1}$ e $\tilde{\gamma_2}$, e $\pi \circ H$ é homotopia entre γ_1 e γ_2, onde π é o recobrimento universal de $\mathbb{R}$ em S^1. □

Demonstração. (Proposição 4) O Lema acima nos mostra que a aplicação $n : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ está bem definida e é injetiva. Para se verificar que é um homomorfismo, basta notar que $2\pi \cdot n(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \tilde{\gamma_2}(1) - \tilde{\gamma_1}(0) = 2\pi \cdot [n(\gamma_1) + n(\gamma_2)]$. A sobrejetividade de

n também é fácilmente demonstrada definindo-se, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a curva $\gamma_k(t) = (\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t))$; uma de suas funções de ângulo é dada por $\tilde{\gamma_k}(t) = 2k\pi t$, e temos portanto $n(\gamma_k) = [\tilde{\gamma_k}(1) - \tilde{\gamma_k}(0)]/2\pi = k$.

Concluímos que $\pi_1(S^1)$ é isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$. □

Lema 3. *([2]) Seja $\pi : M \to B$ um recobrimento e $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to B$ uma homotopia entre os caminhos $\gamma_0 := \Gamma(\cdot, 0)$ e $\gamma_1 := \Gamma(\cdot, 1)$ com ponto inicial p_0 e final p_1. Seja $\tilde{p_0} = \pi^{-1}(p_0)$. Então Γ pode ser levantada para uma homotopia $\tilde{\Gamma} : [0,1] \times [0,1] \to M$ com ponto inicial $\tilde{p_0}$, tal que $\pi \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma$.*

Demonstração. (Esboço) Pelo *Lema 2*, cada caminho $\Gamma(\cdot, s)$ pode ser levantado para um caminho $\tilde{\gamma_s}$ com ínicio $\tilde{p_0}$. Definimos então

$$\tilde{\Gamma}(t,s) := \tilde{\gamma_s}(t),$$

e termina-se a prova mostrando-se que $\tilde{\Gamma}$ é contínua. □

Lema 4. *Considere $\pi : M \to B$ um recobrimento, g uma curva em B e $\tilde{g}$ seu levantamento. Então $G_\pi := \{[g] : \tilde{g}$ é fechada$\}$ é um subgrupo de $\pi_1(B, p_0)$.*

Demonstração. Temos como resultado direto do *Corolário 1* que $[g_0] \in G_\pi$. Sabemos também que estando p_0 fixado, $(\widetilde{g_1 \cdot g_2}) = \tilde{g_1} \cdot \tilde{g_2}$, dada a unicidade do levantamento. Assim, se $[g_1]$ e $[g_2]$ estão em G_π, o mesmo ocorre com $[g_1 \cdot g_2]$. O mesmo raciocínio se aplica a $[g_1^{-1}]$. □

Com os resultados vistos, estamos prontos para exibir o importante teorema que se segue, o qual mostra que dada uma variedade B, os grupos fundamentais de seus espaços de recobrimento são sempre isomorfos à um subgrupo de $\pi_1(B)$. Em particular, o recobrimento universal é aquele associado ao subgrupo trivial de $\pi_1(B)$. Não colocaremos aqui sua demonstração.

Teorema 2. *([2]) $\pi_1(M)$ é isomorfo a G_π, e nós obtemos desta forma uma bijeção entre classes de conjugação de subgrupos de $\pi_1(B)$ e classes de equivalência de coberturas $\pi : M \to B$.*

2.3 Campos tensoriais em uma variedade

A ideia de campo tensorial busca generalizar os conceitos de campo escalar e vetorial sobre uma variedade. Sua principal característica é a multilinearidade, e nos dará uma ferramenta poderosa para trabalhar com novos objetos sobre variedades.

Traremos nesta secção uma série de definições sem nos estendermos muito nos resultados, com o objetivo de apresentar a derivada covariante e a álgebra exterior. O leitor que quiser mais informações pode encontrar sobre campos tensoriais em [4] e sobre produto exterior em [7].

Denote por $\mathcal{F}(M)$ o espaço das funções reais suaves (ou campos escalares) definidas sobre a variedade diferenciável M. Lembramos que uma função f é suave (ou C^∞) se possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens. A soma e o produto de funções suaves em M também é suave. Verificando-se as propriedades algébricas, podemos ver que $\mathcal{F}(M)$ forma um anel comutativo.

Definição 11. Um **campo vetorial** V sobre uma variedade M é uma função que atribui a cada ponto $p \in M$ um vetor tangente $V_p \in T_pM$.

Se V é um campo vetorial e $f \in \mathcal{F}(M)$, então Vf denota a função real em M dada por $(Vf)(p) = V_pf$. Dizemos que V é suave se Vf é suave para toda $f \in \mathcal{F}(M)$. Definimos a soma de campos vetoriais e seu produto por uma função real da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
(fV)_p &= f(p)V_p \\
(V+W)_p &= V_p + W_p
\end{aligned}
$$

para todo $p \in M$. Tais operações também preservam a diferenciabilidade, fazendo assim do conjunto $\chi(M)$ de todos os campos vetoriais suaves sobre M um módulo sobre $\mathcal{F}(M)$.

Um elemento θ de $\chi^*(M)$ é denominado **1-forma**, e é uma função que atribui a cada ponto $p \in M$ um elemento θ_p do espaço $T_p(M)^*$, o dual do espaço tangente $T_p(M)$, também chamado de *espaço cotangente*.

Definição 12. Dada uma função $f \in \mathcal{F}(M)$, definimos o **diferencial de** f como a 1-forma df tal que $(df)(v) = v(f)$, para todo $v \in T_pM$.

Dado um sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n) = X^{-1}(p)$ em $U \in M$, as 1-formas $(dx^1, \ldots, dx^n)$ formam a base dual à base de vetores coordenados $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ de $\chi(M)$, já que $dx^i(\partial_j) = \partial_j(x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$.

Definição 13. Seja V módulo sobre um anel $\mathbb{K}$. Para inteiros $r \geq 0, s \geq 0$ não ambos nulos, um **tensor do tipo (r,s)** ou **(r,s)-tensor** sobre V é uma função multilinear

$$
A : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{K}.
$$

O conjunto $\mathcal{T}_r^s$ de todos os (r,s)-tensores sobre V forma novamente um módulo sobre

$\mathbb{K}$ com as operações usuais. Em termos do produto tensorial, escrevemos $\mathcal{T}_r^s = V^{\otimes^r} \otimes (V^*)^{\otimes^s}$. Note que se $A \in \mathcal{T}_r^s = V^{\otimes^r} \otimes (V^*)^{\otimes^s}$, A possui como domínio $(V^*)^r \times V^s$.

Um **campo tensorial** A em uma variedade M é um tensor sobre o $\mathcal{F}(M)$-módulo $\chi(M)$. Vejamos alguns exemplos:

1. Uma 1-forma, pertencendo ao espaço dual $\chi^*(M)$, é um $(0,1)$-tensor. Portanto, $\mathcal{T}_0^1 = \chi^*(M)$.

2. Se $V \in \chi(M)$ é um campo vetorial, definimos $V(\theta) = \theta(V)$, para todo $\theta \in \chi^*(M)$. Deste modo, temos $\mathcal{T}_1^0 = \chi(M)$.

3. Uma transformação $\mathcal{F}(M)$-multilinear $A : \chi(M)^s \to \chi(M)$ pode ser interpretada como um $(1,s)$-tensor, dado o isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^s(\chi(M)) &\to Hom(\chi(M)^s; \chi(M)) \\ V \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s &\mapsto (V \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s)(X_1, \cdots, X_s) = \theta^1(X_1) \cdots \theta^s(X_s) V. \end{aligned}$$

Tensores do tipo $(0,s)$ são ditos **covariantes**, enquanto tensores do tipo $(r,0)$, com $r \geq 1$, são ditos **contravariantes**. Um (r,s)-tensor que possui r e s diferentes de zero é chamado **misto**.

Definição 14. A **contração de tensores** é uma função $\mathcal{F}(M)$-linear definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_k^l : \mathcal{T}_p^q \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1} \\ &\left(\bigotimes_{i=1}^{p} V_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{q} \theta^j\right) \mapsto \left(\theta^l(V_k)\right) \left(\bigotimes_{i=1, i\neq k}^{p} V_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1, j\neq l}^{q} \theta^j\right). \end{aligned}$$

Em outras palavras, escolhendo-se um índice contravariante k e um covariante l, esta operação "contrai" um (p,q)-tensor em um $(p-1,q-1)$-tensor aplicando a 1-forma na posição l ao campo vetorial na posição k.

Definição 15. Uma **derivação de tensores** $\mathcal{D}$ em uma variedade diferenciável M é um conjunto de funções $\mathbb{R}$-lineares

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_r^s : \mathcal{T}_r^s \to \mathcal{T}_r^s$$

tais que para quaisquer dois tensores A e B valem:

1. $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$;

2. $\mathcal{D}(\mathcal{C}A) = \mathcal{C}(\mathcal{D}A)$, para qualquer contração $\mathcal{C}$.

Proposição 5. *([4], Regra do produto para derivação de tensores) Se $\mathcal{D}$ é uma derivação de tensores em M e $A \in \mathcal{T}_r^s$, então*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)] = (\mathcal{D}A)(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)\\ + \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\dots,\mathcal{D}\theta^i,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)\\ + \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,\mathcal{D}X_j,\dots,X_s).\end{aligned}$$

Essa proposição nos dá uma forma de calcular $\mathcal{D}$ em tensores arbitrários em função de $\mathcal{D}$ aplicada apenas em funções e campos vetoriais, dado que a aplicação de $\mathcal{D}$ em 1-formas também segue diretamente:

$$(\mathcal{D}\theta)(X) = \mathcal{D}(\theta X) - \theta(\mathcal{D}X).$$

Um tipo particular de $(0,2)$-tensor terá papel fundamental no que estudaremos a partir de agora, o **tensor métrico** g: um $(0,2)$-campo tensorial que atribui a cada ponto de M um produto interno $g_p = \langle \cdot,\cdot \rangle_p$ (forma bilinear simétrica e positiva-definida) no espaço tangente T_pM.

Definição 16. Uma **variedade Riemanniana** é uma variedade diferenciável M munida de um tensor métrico g.

Se $(x^1,\dots,x^n)$ é um sistema de coordenadas em $U \subseteq M$, as componentes do tensor g em U são $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$. A rigor, uma variedade Riemanniana é um par ordenado (M,g), mas em geral a denotaremos apenas pelo nome da variedade diferenciável M. A noção de equivalência entre duas variedades Riemanniana é dada a seguir:

Definição 17. Um difeomorfismo $f : M \to N$ entre duas variedades Riemannianas é dito uma **isometria** quando

$$\langle u,v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M,\ u,v \in T_pM\ .$$

Definição 18. Uma **conexão** em uma variedade Riemanniana M é uma função $D : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (D1) $D_V W$ é $\mathcal{F}(M)$-linear em V;

- (D2) $D_V W$ é $\mathbb{R}$-linear em W;
- (D3) $D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$, para $f \in \mathcal{F}(M)$.

Chamamos $D_V W$ de **derivada covariante** de W com relação a V **via a conexão** D

Se $V, W \in \chi(M)$ são dois campos vetoriais em M, definimos um novo campo vetorial $[V, W] = VW - WV$, chamado *colchete de Lie* de V e W.

Teorema 3. *([4]) Se M é uma variedade Riemanniana, existe uma única conexão D tal que, para quaisquer $V, W, X \in \chi(M)$:*

- (D4) $[V, W] = D_V W - D_W V$;
- (D5) $X\langle V, W\rangle = \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$.

D é chamada a **conexão de Levi-Civita** de M.

Definição 19. Seja V um campo vetorial em uma variedade Riemanniana M. A **derivada covariante** D_V é a única derivação de tensores em M tal que

$$D_V f = Vf, \text{ para } f \in \mathcal{F}(M),$$

e $D_V W$ é a derivada covariante via a conexão de Levi-Civita para $W \in \chi(M)$.

Seja A um tensor covariante ou contravariante de tipo 2 ou maior. Dizemos que A é **simétrico** se a transposição de dois dos seus argumentos não muda seu valor. A é **anti-simétrico** (ou **alternado**) se essa transposição inverte o seu sinal. Funções, 1-formas e campos vetoriais são considerados ambos simétricos e anti-simétricos por convenção.

Definição 20. Se α e β são 1-formas em M, definimos o **produto exterior** entre α e β por

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha) = Alt(\alpha \otimes \beta).$$

O operador Alt recebe o nome de **alternador**, pois leva um $(0,2)$-tensor em um $(0,2)$-tensor alternado. O conjunto desses funcionais bilineares alternados será denotado por $\bigwedge^2(M) = \chi^*(M) \wedge \chi^*(M)$. Denotamos também $\bigwedge^1(M) = \chi^*(M)$ e $\bigwedge^0(M) = \mathcal{F}(M)$. Generalizando esta ideia, denotamos por $\bigwedge^k(M)$ o espaço dos $(0,k)$-campos tensoriais alternados em M e definimos o produto exterior de k covetores por:

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(V_1, \cdots, V_k) = \frac{1}{k!} \det \begin{pmatrix} \alpha_1(V_1) & \cdots & \alpha_1(V_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(V_1) & \cdots & \alpha_k(V_k) \end{pmatrix}.$$

$\bigwedge^k(M)$ é também denominado a k-**ésima potência exterior de** $\chi^*(M)$ e seus elementos são chamados k-**formas** ou k-**covetores**. O produto exterior satisfaz as seguintes propriedades:

- $(\alpha+\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge\gamma + \beta\wedge\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in \chi^*(M)$;
- $\alpha\wedge\beta = -\beta\wedge\alpha$;
- $\alpha\wedge\alpha = 0$;
- $\dim\bigwedge^k(M) = \binom{n}{k} = \dim\bigwedge^{n-k}(M)$, onde n é a dimensão de M.

Se $(x^1,\ldots,x^n)$ é um sistema de coordenadas em $U\subseteq M$, uma base para $\bigwedge^k(M)$ pode ser construída a partir de uma base $\{dx^1,\cdots,dx^n\}$ de $\chi^*(M)$, tomando-se cada combinação dos n elementos k a k.

Exemplo 7. Considere M uma variedade de dimensão 3. Uma base para cada $\bigwedge^k(M)$ é dada localmente por:

$\bigwedge^0(M)$: $\{1\}$;

$\bigwedge^1(M)$: $\{dx^1, dx^2, dx^3\}$;

$\bigwedge^2(M)$: $\{dx^1\wedge dx^2, dx^1\wedge dx^3, dx^2\wedge dx^3\}$;

$\bigwedge^3(M)$: $\{dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\}$.

Lema 5. *O produto exterior de m covetores se anula sempre que $m > n$, onde n é a dimensão de M.*

Demonstração. Considere o produto $\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_{n+1}$. Como $dim\chi^*(M) = n$, temos no máximo n 1-formas linearmente independentes. Considere $\alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i$. Então

$$\begin{aligned}\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_{n+1} &= \alpha_1\wedge\cdots\wedge\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i\\ &= (-1)^{n-1}\alpha_1\wedge\alpha_1\wedge\cdots\wedge\sum_{i=2}^n a_i\alpha_i\\ &= 0.\end{aligned}$$

Definimos a **álgebra exterior** de M como o conjunto $\bigwedge(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M}\bigwedge^k(M)$ munido da operação de produto exterior $\wedge$.

Quando a variedade M está munida de um tensor métrico g, podemos estendê-lo para o espaço $\bigwedge(M)$ definindo $G : \bigwedge^k(M) \times \bigwedge^k(M) \to \mathbb{R}$ por:

$$G(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k) = \det \begin{pmatrix} g^{-1}(\alpha_1, \beta_1) & \cdots & g^{-1}(\alpha_1, \beta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{-1}(\alpha_k, \beta_1) & \cdots & g^{-1}(\alpha_k, \beta_k) \end{pmatrix},$$

onde α_i, β_j são 1-formas e dados $\phi_k \in \bigwedge^k(M)$ e $\psi_m \in \bigwedge^m(M)$ com $k \neq m$,

$$G(\phi_k, \psi_m) = 0.$$

□

A partir de tal extensão G do tensor métrico obtemos de forma natural um isomorfismo entre os espaços $\bigwedge^k(M)$ e $\bigwedge^{n-k}(M)$ que já conhecíamos ter a mesma dimensão. O **isomorfismo de Hodge** é dado pelo operador $\star : \bigwedge^k(M) \to \bigwedge^{n-k}(M)$ definido pela fórmula:

$$\phi \wedge \star\psi = G(\phi, \psi)\omega,$$

para todo $\phi, \psi \in \bigwedge^k(M)$ e onde ω é um n-covetor unitário (também conhecido por elemento de volume).

Definição 21. Definimos a **derivada exterior** como o operador d que atua sobre formas e funções em M definido da seguinte forma:

- Se f é uma 0-forma, sua derivada exterior é o diferencial usual de f, $df = \sum \partial_i(f)dx^i$.
- Se $\alpha = \alpha^i dx^i$ é uma 1-forma, então $d\alpha = \sum d\alpha_i \wedge dx^i$.
- Para outras formas quaisquer, $d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^p(\phi \wedge d\psi)$, onde ϕ é uma p-forma.

Se $f \in \mathcal{F}(M)$, temos que $d(df) = (f_{xy} - f_{yx})dx \wedge dy = 0$. De forma mais geral temos que $d(d\phi) = 0$ para qualquer k-forma ϕ. Escrevemos então que $d^2 = 0$.

3.1 Complexificação de espaços vetoriais

Nesta seção veremos como construir um espaço vetorial complexo a partir de um espaço vetorial real. Nos baseamos principalmente em [7].

Seja V um espaço vetorial real. Podemos construir um espaço vetorial complexo $V^{\mathbb{C}}$ a partir de V, denominado **complexificação de** V, tomando o produto tensorial

$$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

e definindo a multiplicação por números complexos como

$$z(v \otimes z') = v \otimes (zz').$$

Proposição 6. *Se V possui uma base $\{e_i\}$, então $V^{\mathbb{C}}$ possui uma base correspondente $\{e_i \otimes 1\}$ sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja $w \in V^{\mathbb{C}}$. Uma base natural de $V^{\mathbb{C}}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ é $\{e_j \otimes 1, e_j \otimes i\}$. Então:

$$\begin{aligned} w &= \sum (\alpha_j e_j \otimes 1 + \beta_j e_j \otimes i), \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}; \\ &= \sum (\alpha_j e_j \otimes 1 + i\beta_j e_j \otimes 1) \\ &= \sum (\alpha_j + i\beta_j) e_j \otimes 1. \end{aligned}$$

□

Portanto, segue diretamente da proposição que a dimensão complexa de $V^{\mathbb{C}}$ é igual à dimensão real de V, e este último está naturalmente imerso em $V^{\mathbb{C}}$ por meio da aplicação $v \mapsto v \otimes 1$.

Definição 22. Uma **estrutura complexa** em um espaço vetorial real V é um endomorfismo $J : V \to V$ tal que $J^2 = -id$.

Uma estrutura complexa permite munir o próprio V de uma estrutra de espaço vetorial complexo. Se $v \in V$, basta definir $(a+ib)v = av + b \cdot J(v)$. Por outro lado, se W é um espaço vetorial complexo, podemos definir uma estrutura complexa no espaço real subjacente definindo $J(w) = iw$, para todo $w \in W$. Note que um espaço vetorial admite uma estrutura complexa se e somente se sua dimensão real for par.

Se V está munido de uma estrutura complexa J, podemos estender J para $V^{\mathbb{C}}$ por linearidade. Basta fazer

$$J(v \otimes z) = J(v) \otimes z.$$

É fácil ver que deste modo os autovalores de J serão $\pm i$, já que $J^2(v) = \lambda^2 v = -v$. Denotaremos os autoespaços associados por $V^{1,0} = \{v \in V^{\mathbb{C}} : J(v) = iv\}$ e $V^{0,1} = \{v \in V^{\mathbb{C}} : J(v) = -iv\}$. Assim, podemos escrever

$$V^{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}.$$

A conjugação complexa intercambia os espaços $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$, e os operadores de projeção são respectivamente $\mathcal{P}^{\pm} = \frac{1}{2}(Id \mp i \cdot J)$.

3.2 Teoria das funções holomorfas

Exibimos aqui alguns resultados fundamentais de análise complexa que serão usados no trabalho, baseados na referência [8].

Definição 23. Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ um aberto do plano complexo. Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é dita **holomorfa** ou **complexo-diferenciável** no ponto z_0 se o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Dizemos que f é holomorfa em U se for holomorfa em todos os pontos de U e f' é chamada **derivada complexa** de f.

Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pode ser vista como uma função de duas variáveis reais e pode ser escrita na forma $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, onde u e v são funções reais definidas em U. As funções u e v são chamadas respectivamente de parte real e parte imaginária de f. Nesse sentido, podemos falar sobre as derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ de f.

Proposição 7. *Suponha $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa com derivadas parciais contínuas em todos os pontos de U. Então f é holomorfa se e somente se satisfaz as*

equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Defina agora os operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ e } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

As equações de Cauchy-Riemann são equivalentes a:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Proposição 8. *Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é holomorfa se e somente se cada ponto $z_0 \in U$ possui uma vizinhança $V \subseteq U$ na qual f pode ser escrita como uma série de potências $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Então sua derivada complexa pode ser escrita como $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$.*

Uma função que pode ser representada por uma série de potências em uma vizinhança de determinado ponto é dita **analítica** naquela região. A proposição acima no diz que no caso complexo as noções de função analítica e função holoforma são equivalentes, o que não acontece no caso real. Também concluímos que uma função holomorfa f possui derivada complexa de todas as ordens as quais, por sua vez, também são holomorfas.

Definição 24. Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é dito uma **singularidade isolada** de uma função f se existe uma vizinhança U de z_0 na qual f está definida e é holomorfa, exceto no próprio z_0. Existem 3 tipos de singularidades isoladas:

1. Se f pode ser extendida para uma função holomorfa em U, z_0 é uma **singularidade removível**;

2. **Polo** se a função f pode ser escrita em $U\backslash\{z_0\}$ como a série (chamada série de Laurent):

   $$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

   com $a_{-m} \neq 0$. Dizemos que z_0 é **polo de ordem** m, e o coeficiente a_{-1} recebe o nome de **resíduo** de f em z_0.

3. **Singularidade essencial** se nenhuma das alternativas anteriores for satisfeita.

Teorema 4. *Uma singularidade isolada z_0 de $f(z)$ é removível se e somente se $f(z)$ for limitada numa vizinhança de z_0.*

Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é dito um **zero** de uma função f se $f(z_0) = 0$. Sabemos que uma função holomorfa possui derivadas de todas as ordens $f^{(n)}(z)$, $n \in \mathbb{N}$, em z_0. Se $f(z_0) = 0$ e existe um inteiro m tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ e cada derivada de ordem menor do que m se anula em z_0, então dizemos que f possui um **zero de ordem m** em z_0. Uma caracterização de zeros de ordem m é dada a seguir:

Teorema 5. *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então f possui um zero de ordem m em z_0 se e somente se existe uma vizinhança V de z_0 e uma função holomorfa $g : V \to \mathbb{C}$ com $g(z_0) \neq 0$ tal que*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

em V.

Teorema 6. *[6] Considere $f : U \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in U$. Seja m a ordem do zero que a função $f - f(z_0)$ possui em z_0. Então existe vizinhança $V \subset U$ de z_0, um número $r > 0$ e uma função holomorfa $g : V \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = g(z)^m$ em U. A função g satisfaz $|g(z)| < r$ e $g'(z) \neq 0$ em todo V.*

Definição 25. Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é **meromorfa** em U se é holomorfa em todo U exceto em um subcojunto discreto de singularidades isoladas do tipo pólo.

Teorema 7. *(Princípio do máximo) Se $f : U \to \mathbb{C}$ é holomorfa e não-constante, então $|f|$ não possui máximo em U. Se U é limitado e f pode ser extendida para $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$, então $|f|$ atinge seu máximo na fronteira de U.*

Teorema 8. *(Liouville) Uma função holomorfa em todo $\mathbb{C}$ e limitada é constante.*

3.3 Superfícies de Riemann

No Capítulo 1 definimos variedades diferenciáveis e vimos algumas de suas características. Se enfraquecermos aquela definição, não exigindo que as mudanças de cartas $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ sejam diferenciáveis, obtemos a definição de uma **variedade** de dimensão n: um espaço topológico no qual cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Utilizamos para essa seção [6], [2] e [5].

Uma variedade de dimensão 2 é chamada *superfície*.

Definição 26. Um atlas em uma superfície M com cartas $Z_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{C} \to M$ é chamado **conforme** se as mudanças de coordenadas

$$Z_\beta^{-1} \circ Z_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

são holomorfas, sempre que $Z_\alpha(U_\alpha) \cap Z_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$.

Uma **estrutura conforme** é um atlas conforme maximal. Uma **superfície de Riemann** é uma superfície munida de uma estrutura conforme. A partir desta seção usaremos a letra M para indicar uma superfície de Riemann. Note que uma superfície de Riemann é sempre uma variedade diferenciável, já que uma função holomorfa é sempre suave quando vista como uma função real.

Definição 27. Uma aplicação $h : M_1 \to M_2$ entre superfícies de Riemann é **holomorfa** se dadas parametrizações $Z_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{C} \to M_1$, $Z_\beta : U_\beta \subseteq \mathbb{C} \to M_2$ a aplicação

$$Z_\beta^{-1} \circ h \circ Z_\alpha$$

é holomorfa onde estiver definida. Se h também possui derivada h' não nula em todos os pontos, dizemos que ela é **conforme**.

Exemplo 8. (Esfera de Riemann) Considere a esfera

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

com cartas $Z_1(z) = \left(\frac{2Re(z)}{|z|^2+1}, \frac{2Im(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$ e $Z_2(z) = \left(\frac{2Re(z)}{|z|^2+1}, \frac{-2Im(z)}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}\right)$ geradas pela projeção estereográfica. Como $Z_1^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$, em $S^2 \backslash \{(1,0,0),(0,0,1)\}$ temos que

$$(Z_1^{-1} \circ Z_2)(z) = \frac{1}{z},$$

de modo que a mudança de coordenadas é holomorfa.

Um outro modelo para esse exemplo é o plano complexo estendido: se considerarmos a aplicação Z_1^{-1} sobre toda esfera S^2 e não apenas $S^2 \backslash \{(0,0,1)\}$, temos uma aplicação bijetiva entre S^2 e $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Compondo com as cartas dadas acima, temos então um atlas para o novo modelo:

$$Id : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ e}$$
$$Z_1^{-1} \circ Z_2 : \mathbb{C} \to (\mathbb{C}\backslash\{0\}) \cup \{\infty\}$$
$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

A projeção estereográfica $Z_1^{-1} : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é uma aplicação conforme. Denotaremos a esfera de Riemann por $\bar{\mathbb{C}}$.

Teorema 9. *Seja $f : M_1 \to M_2$ uma aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann. Seja $p \in M_1$ e $q = f(p)$. Então existem coordenadas locais (U,Z) e (V,W) em M_1 e M_2 respectivamente, onde U e V são abertos de $\mathbb{C}$ contendo a origem, tais que:*

1. $p \in Z(U)$, $p = Z(0)$; $q \in W(V)$, $q = W(0)$;

2. $f \circ Z(U) \subseteq W(V)$;

3. A função $W^{-1} \circ f \circ Z$ é da forma $\xi \mapsto \xi^n$ para algum inteiro n.

Demonstração. Faremos um pequeno abuso de notação em identificar U com o aberto $Z(U)$ em alguns momentos (e V com $W(V)$) para deixá-la menos carregada. As condições (1) e (2) acima são facilmente alcançáveis: Dada uma coordenada local qualquer em torno de p (ou q), basta fazer uma translação do domínio por um fator constante para que p seja imagem de 0, e basta tomar um aberto suficientemente pequeno U para que $f(U) \subseteq V$. Sejam então (U,Z) e (V,W) coordenadas locais em M_1 e M_2 respectivamente, satisfazendo as condições (1) e (2).

Seja n a ordem de $0 \in U$ como zero de $W^{-1} \circ f \circ Z$. Pelo *Teorema* 6 podemos escrever $W^{-1} \circ f \circ Z(\xi) = g(\xi)^n$ em U, para g uma função holomorfa. Mas então podemos tomar uma carta $Z' = Z \circ g^{-1}$ de U em M_1 de modo que $W^{-1} \circ f \circ (Z \circ g^{-1})(\xi) = g(g^{-1}(\xi))^n = \xi^n$, de onde segue o resultado. Note que g^{-1} está bem definida dado que $g'(z) \neq 0$. □

O inteiro n do teorema acima é chamado **número de ramificação** da função f em p. Temos que para qualquer ponto $q' \in V\backslash\{q\}$, o número de pontos em $f^{-1}(q') \cap U$ é igual a n. Assim, contando multiplicidades, temos que todo ponto em $f(U)$ possui n pré-imagens em U. Portanto, um ponto qualquer $q_0 \in M_2$ possui n pré-imagens para cada p_0 tal que $f(p_0) = q$, contadas com multiplicidade. De fato, quando M_1 e M_2 são compactas, esse número é finito e não depende do ponto q_0, sendo denominado **grau** da função f [6].

Definição 28. Uma **função meromorfa** em uma superfície de Riemann M é uma aplicação holomorfa não constante $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$ de M na esfera de Riemann. Os pontos $f^{-1}(\infty)$ são chamados os **pólos** de f.

Proposição 9. *Seja M uma superfície de Riemann compacta. Se $f : M \to \mathbb{C}$ é holomorfa, então f é constante.*

Demonstração. Como M é compacta, $|f|$ atinge seu máximo em um ponto p_0 de M. Seja $Z : U \subseteq \mathbb{C} \to M$ uma carta em torno de p_0. Temos que $f \circ Z : U \to \mathbb{C}$ é holomorfa e atinge seu máximo em $Z^{-1}(p_0)$, sendo portanto constante pelo princípio do máximo (*Teorema 7)*. □

Definição 29. Seja M uma superfície de Riemann e $p \in M$. Definimos o **espaço tangente complexificado** de M em p por $T_p^{\mathbb{C}}M := (T_pM)^{\mathbb{C}}$. Seus elementos podem ser vistos como derivações sobre o espaço das funções complexas C^∞(vistas como funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$) definidas em M.

Denotaremos simplesmente por T_pM o espaço tangente complexificado $T_p^{\mathbb{C}}M$ daqui em diante.

Sabemos pela *Proposição 6* que $\{\partial x, \partial y\}$ também é uma base para o espaço vetorial complexo T_pM. No entanto, utilizaremos como padrão para o espaço tangente complexificado a base formada pelos operadores $\partial z = \frac{1}{2}(\partial x - i\partial y)$ e $\partial \overline{z} = \frac{1}{2}(\partial x + i\partial y)$ já introduzidos, que irá nos facilitar o trabalho com funções holomorfas em M, dado que as equações de Cauchy-Riemann para uma função f podem ser resumidas em $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. A construção de campos vetoriais e tensoriais sobre M superfície de Riemann se dá de forma análoga ao caso real que vimos na seção 1.3.

Uma 1-forma em uma superfície de Riemann será escrita então como $\alpha = f dz + g d\overline{z}$, e uma 2-forma $\phi = f dz \wedge d\overline{z}$. Uma 1-forma α é dita **holomorfa** se pode ser escrita localmente como $\alpha = df$, onde f é uma função holomorfa.

Proposição 10. *Uma 1-forma α é holomorfa se e somente se pode ser escrita como $\alpha = u dz$, onde u é uma função holomorfa.*

Demonstração. Se $\alpha = df$ onde f é holomorfa, então $\partial\overline{z}(f) = 0$. Logo $\alpha = df = f_z dz$. Para a volta, considere $\alpha = u dz$ em um sistema de coordenadas (U, Z), onde u é uma função holomorfa. A função $u \circ Z$ é holomorfa e portanto possui uma primitiva holomorfa em U ([8]). Isto é, existe uma função g definida em U tal que $g' = u \circ Z$. Logo, definindo em $Z(U)$ a função $f = g \circ Z^{-1}$, temos que f é holomorfa e satisfaz $\alpha = df$. □

Uma 1-forma é dita **meromorfa** se pode ser escrita localmente como $\alpha = f(z)dz$, onde f é uma função meromorfa. O conjunto de pólos da função f também são ditos pólos de α.

Definição 30. Uma **métrica Riemanniana conforme** em uma superfície de Riemann M é um $(0,2)$-campo tensorial sobre M dada em coordenadas locais por

$$\lambda^2(z)dz \otimes d\overline{z},\ \lambda(z) > 0.$$

O comprimento de uma curva γ em M é dado por

$$l(\gamma) := \int_\gamma \lambda(z)|dz|,$$

e a área de um subconjunto mensurável B de M é dada por

$$A(b) := \int_B \lambda^2(z)\frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z}.$$

3.4 Teoria dos feixes e Cohomologia

Introduziremos aqui a teoria de Cohomologia de feixes, principal ferramenta que utilizaremos para contruir os resultados das duas próximas seções. Mais detalhes sobre o tema podem ser encontrados em [6] e [9].

Definição 31. Um **pré-feixe** de grupos abelianos $\mathfrak{F}$ em uma superfície de Riemann M é a atribuição de um grupo abeliano, $\mathfrak{F}(U)$, para cada aberto U de M, junto com uma coleção de homomorfismos de grupo $\rho_V^U : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$, para cada par de abertos U, V com $V \subset U$, satisfazendo as condições:

1. ρ_U^U é a identidade;
2. se $W \subset V \subset U$ são abertos então $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$.

As aplicações ρ_V^U são chamadas **homomorfismos de restrição**. Se $f \in \mathfrak{F}(U)$ e $V \subset U$, escreveremos $f|_V$ para $\rho_V^U(f)$.

Um exemplo de pré-feixe é dado por $\mathcal{C}$, o conjunto das funções complexas contínuas, onde os homomorfismos de restrição são as restrições usuais dos domínios das funções. $\mathcal{C}(U)$ denota o espaço das funções contínuas definidas em U. Outros exemplos de pré-feixe são dados pelos conjuntos das funções suaves, holomorfas e meromorfas, munidos do mesmo homomorfismo de restrição.

Definição 32. Um pré-feixe $\mathcal{F}$ é dito um **feixe** se para cada aberto U de M e cada coleção de abertos $\{U_j\}_{j\in J}$ tal que $\bigcup_j U_j = U$, as seguintes condições são satisfeitas:

1. Se f e g são elementos de $\mathcal{F}(U)$ tais que $f|_{U_j} = g|_{U_j}$ para todo $j \in J$, então $f = g$;

2. Se $f_j \in \mathcal{F}(U_j)$ e $f_j|_{U_j\cap U_k} = f_k|_{U_j\cap U_k}$, então existe um elemento $f \in \mathcal{F}(U)$ com $f|U_j = f_j$, para cada $j \in J$.

Os exemplos de pré-feixe dados acima são também feixes. Se $U = \emptyset$, temos que U é coberto por uma união vazia de abertos. Assim, a condição 1 implica, por vacuidade, que todos os elementos de $\mathcal{F}(U)$ são iguais. Ou seja, $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.

Definição 33. Seja $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ uma cobertura aberta de uma superfície de Riemann M e $\mathcal{F}$ um feixe em M. Definimos o n-**ésimo grupo de cocadeia** $C^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$, para n natural, por

$$C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{(j_0,\dots,j_n)\in J^{n+1}} \mathcal{F}(U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_n}),$$

onde o produtório acima denota o produto direto entre os grupos $\mathcal{F}(U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_n})$.

Observe que não há problema se todos os índices j_i forem iguais, nem se a intersecção $U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_n}$ for vazia, como já vimos que $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$. Para $n = 0, 1$, os grupos de cocadeia são escritos então:

$$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{j\in J} \mathcal{F}(U_j),$$
$$C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{(j,k)\in J^2} \mathcal{F}(U_j \cap U_k).$$

Um elemento de $C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ é uma sequência na forma $(f_j)_{j\in J}$, onde $f_j \in \mathcal{F}(U_j)$. Denotaremos $(f_j)_{j\in J}$ simplesmente por (f_j). Do mesmo modo, $(f_{jk})_{(j,k)\in J^2} = (f_{jk})$ é um elemento de $C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, onde $f_{jk} \in \mathcal{F}(U_j \cap U_k)$. Os elementos de $C^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ são chamados n-**cocadeias**.

Definimos os **operadores de cofronteira,** $\delta^n : C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$, para $n = 0, 1$ do seguinte modo:

$$\delta^0((f_j)) = (g_{jk}), \text{ onde } g_{jk} = f_k - f_j \text{ em } U_j \cap U_k;$$
$$\delta^1((f_{jk})) = (g_{jkl}), \text{ onde } g_{jkl} = f_{jk} - f_{jl} + f_{kl} \text{ em } U_j \cap U_k \cap U_l;$$

onde (f_j) é uma 0-cocadeia e (f_{jk}) uma 1-codadeia. Observe que $\delta^1 \circ \delta^0 = 0$, já que $\delta^1((f_k - f_j)) = (f_k - f_j) - (f_l - f_j) + (f_l - f_k) = 0$. Note também que δ^0 e δ^1 são homomorfismos de grupo, dado que $\delta^0((f_j+g_j)) = (f_k+g_k-f_j-g_j) = (f_k-f_j)+(g_k-g_j) = \delta^0((f_j))+\delta^0((g_j))$; o caso para δ^1 se dá de forma análoga.

A imagem de $\delta^0 : C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e o kernel de $\delta^1 : C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{U},\mathcal{F})$ formam subgrupos de $C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e são denominados respectivamente **grupo de cofronteiras** e **grupo de cociclos**, denotados $\mathrm{Im}\delta^0$ e $\ker\delta^1$. Uma 1-cocadeia é uma cofronteira se $f_{jk} = f_k - f_j$ para alguma 0-cocadeia (f_j). Uma 1-cocadeia (f_{jk}) é um cociclo se satisfaz $f_{jl} = f_{jk} + f_{kl}$ em $\mathcal{F}(U_j \cap U_k \cap U_l)$. Em particular $f_{jk} = -f_{kj}$. Temos então, a partir dos operadores de cofronteira, uma sequência de homomorfismos de grupo nos grupos de cocadeia dada por:

$$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}). \tag{3.1}$$

Temos que $\mathrm{Im}\delta^0 \subseteq \ker\delta^1$, já que $\delta^1 \circ \delta^0 = 0$. No entanto não vale necessariamente que $\mathrm{Im}\delta^0 = \ker\delta^1$, isto é, não podemos afirmar que a sequência acima é exata. Para "medir" a quebra da exatidão nessa sequência podemos considerar o quociente:

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \frac{\ker\delta^1}{\mathrm{Im}\delta^0},$$

chamado **1º grupo de cohomologia** de M (com respeito a cobertura $\mathcal{U}$ e com coeficientes em $\mathcal{F}$). O quociente acima está bem definido dado que o subgrupo de um grupo abeliano é sempre normal. Note que (1) é exata se e somente se $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$.

Temos como objetivo, no entanto, construir um grupo de cohomologia que não dependa da cobertura $\mathcal{U}$. Para isso, sejam $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ e $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ duas coberturas de M sendo que $\mathcal{V}$ é **mais fina** do que $\mathcal{U}$, isto é, para cada $\alpha \in A$ existe $j \in J$ tal que $V_\alpha \subseteq U_j$. Considere uma função $\phi : A \to J$ tal que $V_\alpha \subset U_{\phi(\alpha)}$. Quando composta com os homomorfismos de restrição, ϕ induz uma aplicação nos grupos de cocadeia:

$$\begin{aligned} \phi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) &\to C^1(\mathcal{V},\mathcal{F}) \\ (f_{jk}) &\mapsto (g_{\alpha\beta}) = (f_{\phi(\alpha)\phi(\beta)}|_{V_\alpha\cap V_\beta}), \end{aligned}$$

e consequentemente também no grupo de cohomologia, denotado do mesmo modo por $\phi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Definimos então uma relação de equivalência $\sim$ no conjunto $\bigsqcup H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, a união disjunta dos grupos de cohomologia em M onde $\mathcal{U}$ varia sobre todas as coberturas possíveis de M, de modo que se $\xi \in H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e $\eta \in H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ então $\xi \sim \eta$ se e somente se $\phi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}(\xi) = \phi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(\eta)$ em $H^1(\mathcal{W},\mathcal{F})$, para uma cobertura $\mathcal{W}$ mais fina do que $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. Observe que tal construção não irá depender da escolha da função ϕ tomada inicialmente. Podemos definir assim o conjunto quociente:

$$H^1(M,\digamma) := \left(\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U},\digamma)\right)/\sim.$$

Se $[\xi]$ e $[\eta]$ são elementos de $H^1(M,\digamma)$, com representantes $\xi \in H^1(\mathcal{U},\digamma)$ e $\eta \in H^1(\mathcal{V},\digamma)$, definimos a operação de grupo por $[\xi]+[\eta] = [\phi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}(\xi)+\phi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(\eta)]$; ou seja, passamos ambos ξ e η para uma cobertura mais fina em comum e utilizamos a soma de $H^1(\mathcal{W},\digamma)$. O conjunto $H^1(M,\digamma)$ munido de tal operação é chamado o **1º grupo de cohomologia de** M (com coeficientes em $\digamma$). Essa construção pode ser vista com mais detalhes em [6].

Podemos construir o 0-**ésimo grupo de cohomologia de** M de foma análoga. Considere a sequência de grupos:

$$0 \xrightarrow{Id} C^0(\mathcal{U},\digamma) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U},\digamma).$$

A imagem do primeiro homomorfismo é o grupo trivial, logo $H^0(M,\digamma)$ será dado diretamente pelo kernel de $\delta^0 : C^0(\mathcal{U},\digamma) \to C^1(\mathcal{U},\digamma)$. Se uma cocadeia (f_j) satisfaz $\delta^0((f_j)) = 0$, então $f_j = f_k$ em $U_j \cap U_k$. Da definição de feixe temos que existe $f \in \digamma(M)$ tal que $f|_{U_J} = f_j$. Portanto $\ker\delta^0$ pode ser identificado com $\digamma(M)$, para qualquer cobertura $\mathcal{U}$ de M. Definimos então o 0-ésimo grupo de cohomologia de M (com coeficientes em $\digamma$) por

$$H^0(M,\digamma) = \ker\delta^0 = \digamma(M).$$

Sejam $\digamma$ e $\mathcal{G}$ feixes de grupos abelianos em uma superfície de Riemann M. Definimos um **homomorfismo de feixe** $\alpha : \digamma \to \mathcal{G}$ como uma coleção de homomorfismos de grupo $\alpha_U : \digamma(U) \to \mathcal{G}(U)$, para cada aberto U de M, tal que α_U é compatível com os homomorfismos de restrição. Isto é, se $V \subset U$ são abertos de M, então $\alpha_V \circ \rho^U_V = \mu^U_V \circ \alpha_U$, onde ρ e μ denotam os homomorfismos de restrição em $\digamma$ e $\mathcal{G}$, respectivamente. Se $\digamma$ e $\mathcal{G}$ possuírem mais estrutura além da de grupo, as aplicações α_U deverão ser compatíveis com essa estrutura também. Poderemos ignorar o subíndice de α_U quando o aberto em questão estiver em contexto.

Um exemplo de homomorfismo de feixe é a derivada exterior d, que leva uma função f do feixe das funções suaves em M em uma 1-forma df no feixe das 1-formas em M.

Dados feixes $\digamma, \mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sobre M, definimos uma **sequência de feixes** $\digamma \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ quando $\alpha : \digamma \to \mathcal{G}$ e $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ forem homomorfismos. Ignoraremos a escrita da função quando α for um homomorfismo trivial. Dizemos que a sequência $\digamma \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta}$

$\mathcal{H}$ é **exata** quando satisfaz as seguintes condições:

1. $\beta_U \circ \alpha_U = 0$;

2. Se $g \in \mathcal{G}(U)$ é tal que $\beta_U(g) = 0$, então existe uma cobertura aberta $\{U_j\}_{j\in J}$ de U e elementos $f_j \in \digamma(U_j)$ tal que $\alpha_{U_j}(f_j) = g|_{U_j}$.

Lema 6. *Se $0 \to \digamma \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ é uma sequência exata, então para todo aberto U de M o homomorfismo $\alpha_U : \digamma(U) \to \mathcal{G}(U)$ é injetivo.*

Demonstração. Seja $f \in \digamma(U)$ tal que $\alpha(f) = 0$. Da definição de sequência exata, existe cobertura $\{U_j\}$ de M tal que $f_{U_j} = 0$. Pela definição de feixe isso implica que $f = 0$. □

Lema 7. *Se $0 \to \digamma \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ é uma sequência exata, então para todo aberto U de M a sequência $0 \to \digamma(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$ é exata.*

Demonstração. A condição 1 da definição de sequência exata equivale a $\alpha_U(\digamma(U)) \subseteq \ker(\beta_U)$. Para mostrar o outro lado, seja $g \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\beta(g) = 0$. Então existe cobertura $\{U_j\}$ de U e elementos $f_j \in \digamma(U_j)$ tais que $\alpha(f_j) = g|_{U_j}$. Em $U_j \cap U_k$ temos que $\alpha(f_j - f_k) = g - g = 0$. Logo, como α é injetiva pelo lema anterior, $f_j = f_k$ em $U_j \cap U_k$, e pela definição de feixe existe f tal que $f|_{U_j} = f_j$. Portanto $\alpha(f) = g$. □

Um homomorfismo de feixe $\alpha : \digamma \to \mathcal{G}$ induz naturalmente uma aplicação entre seus grupos de cohomologia. Para H^0 é simples, já que $H^0(M,\digamma) = \digamma(M)$, definimos $\alpha^0 = \alpha_M : H^0(M,\digamma) \to H^0(M,\mathcal{G})$. Para H^1, se $[(f_{jk})] \in H^1(M,\digamma)$, definimos $\alpha^1([(f_{jk})]) = [(\alpha(f_{jk}))] \in H^1(M,\mathcal{G})$. Não é díficil verificar que α^1 está bem definido desta forma, não dependendo da escolha de um representante de $[(f_{jk})]$.

Considere agora uma sequência de feixes exata $0 \to \digamma \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$. Pelo que foi construído acima, obtemos duas sequências nos grupos de cohomologia:

$$0 \to H^0(M,\digamma) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(M,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(M,\mathcal{H}), \text{ e}$$
$$H^1(M,\digamma) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(M,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(M,\mathcal{H}).$$

Para conectá-las, gostaríamos de contruir um homomorfismo $\delta^* : H^0(M,\mathcal{H}) \to H^1(M,\digamma)$. Para isso, considere um elemento $h \in H^0(M,\mathcal{H}) = \mathcal{H}(M)$. Como a sequência $0 \to \digamma \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ é exata e h é mapeado no zero, temos da definição de sequência exata que existe uma cobertura aberta $\{U_j\}_{j\in J}$ de M e elementos $g_j \in \mathcal{G}(M)$ tal que $\beta(g_j) = h|_{U_j}$. Na intersecção $U_j \cap U_k$ temos que $\beta(g_j - g_k) = \beta(g_j) - \beta(g_k) =$

$h|_{U_j\cap U_k} - h|_{U_j\cap U_k} = 0$. Pelo Lema 7 temos que a sequência $0 \to \mathcal{F}(U_j \cap U_k) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U_j \cap U_k) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(U_j \cap U_k)$ é exata, e então existe $f_{jk} \in \mathcal{F}(U_j \cap U_k)$ com $\alpha(f_{jk}) = g_j - g_k$. Para ver que a 1-cocadeia (f_{jk}) é um cociclo, note que

$$\alpha(f_{jk} - f_{jl} + f_{kl}) = g_j - g_k - g_j + g_l + g_k - g_l = 0.$$

Como α é injetiva pelo Lema 6, então $f_{jk} - f_{jl} + f_{kl} = 0$, e $\delta^1((f_{jk})) = (f_{jk} - f_{jl} + f_{kl}) = (0)$. Definimos portanto $\delta^*(h) = [(f_{jk})] \in H^1(M, \mathcal{F})$.

Teorema 10. *Seja* $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ *uma sequência exata. Então a sequência*

$$0 \to H^0(M,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(M,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(M,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(M,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(M,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(M,\mathcal{H})$$

é exata.

Demonstração. A sequência $0 \to H^0(M,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(M,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(M,\mathcal{H})$ é exata pelo Lema 7. Vamos verificar cada um dos homomorfismos seguintes: □

$\mathrm{Im}(\beta^0) \subseteq \ker(\delta^*)$: Seja $h = \beta^0(g)$, $g \in \mathcal{G}(M)$, e vamos rever a construção de $\delta^*(h)$. Se $\{U_j\}_{j\in J}$ é cobertura de M, temos que $\beta(g|_{U_j} - g|_{U_k}) = 0$ em $U_j \cap U_k$. Logo, existe $f_{jk} \in \mathcal{F}(U_j \cap U_k)$ tal que $\alpha(f_{jk}) = g|_{U_j} - g|_{U_k} = 0$. Como α é injetiva pelo Lema 6, $f_{jk} = 0$, e portanto $\delta^*(h) = [(0)]$.

$\ker(\delta^*) \subseteq \mathrm{Im}(\beta^0)$: Seja $h \in \mathcal{H}(M)$ tal que $\delta^*(h) = [(f_{jk})] = [(0)]$. Então f_{jk} é uma cofronteira, e $f_{jk} = f_j - f_k$, para alguma 0-cocadeia (f_j). Seja g_j como na construção de $\delta^*(h)$, onde $\beta(g_j) = h|_{U_j}$ e $\alpha(f_{jk}) = g_j - g_k$. Temos então que $g_j - \alpha(f_j) = g_k - \alpha(f_k)$ em $U_j \cap U_k$. Pela definição de feixe, existe $g \in \mathcal{G}(M)$ tal que $g|_{U_j} = g_j - \alpha(f_j)$. Portanto $\beta(g)|_{U_j} = \beta(g_j) - \beta(\alpha(f_j)) = \beta(g_j) = h|_{U_j}$, isto é, $\beta(g) = h$.

$\mathrm{Im}\delta^* \subseteq \ker(\alpha^1)$: Seja $[(f_{jk})] = \delta^*(h)$. Então

$$\alpha^1[(f_{jk})] = [(\alpha(f_{jk}))] = [(g_j - g_k)],$$

pela definição de δ^*. Mas $(g_j - g_k)$ é cofronteira, e portanto $[(g_j - g_k)] = [(0)]$.

$\ker(\alpha^1) \subseteq \mathrm{Im}(\delta^*)$: Seja $[(f_{jk})]$ tal que $\alpha^1([(f_{jk})]) = [(\alpha(f_{jk}))] = [(0)]$. Então $(\alpha(f_{jk}))$ é cofronteira, e existe $(g_j) \in C^0(M,\mathcal{G})$ tal que $\alpha(f_{jk}) = g_j - g_k$. Defina $h_j =$

$\beta(g_j)$. Então em $U_j \cap U_k$ temos:

$$\begin{aligned} h_j &= \beta(g_j) \\ &= \beta(\alpha(f_{jk}) + g_k) \\ &= \beta(g_k) \\ &= h_k. \end{aligned}$$

Portanto existe $h \in \mathcal{H}(M)$ tal que $h|_{U_j} = h_j$, e claramente $[(f_{jk})] = \delta^*(h)$.

$\mathrm{Im}(\alpha^1) \subseteq \ker(\beta^1)$: $\beta^1 \circ \alpha^1([(f_{jk})]) = [(\beta \circ \alpha(f_{jk}))] = [(0)]$, dado que a sequência $\mathcal{F}(U_j \cap U_k) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U_j \cap U_k) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(U_j \cap U_k)$ é exata.

$\ker(\beta^1) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha^1)$: Seja $[(g_{jk})]$ tal que $\beta^1([(g_{jk})]) = [(0)]$. Então existe 0-cocadeia (h_j) tal que $\beta(g_{jk}) = h_j - h_k$. Como a sequência $\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(M) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(M) \to 0$ é exata, existe g_j tal que $h_j = \beta(g_j)$. Logo temos que $\beta(g_{jk}) - \beta(g_j) + \beta(g_k) = \beta(g_{jk} - g_j + g_k) = 0$, e $g_{jk} - g_j + g_k \in \ker\beta = \mathrm{Im}\alpha$. Consequentemente, existe (f_{jk}) 1-cocadeia tal que $\alpha(f_{jk}) = g_{jk} - g_j + g_k$. Podemos ver que (f_{jk}) é um cociclo, pois $\alpha(f_{jk} - f_{jl} + f_{kl}) = g_{jk} - g_{jl} + g_{kl} - g_j + g_k + g_j - g_l - g_k + g_l = 0$, e da injetividade de α segue que $f_{jk} - f_{jl} + f_{kl} = 0$. Temos portanto:

$$\begin{aligned} \alpha^1([(f_{jk})]) &= [(\alpha(f_{jk}))] \\ &= [(g_{jk} - g_j + g_k)] \\ &= [(g_{jk})], \end{aligned}$$

o que completa a nossa demonstração.

Tal sequência é denominada **sequência longa** associada à sequência do enunciado.

3.5 Divisores

Nesta seção introduziremos o conceito de divisores em uma superfície de Riemann compacta como ferramenta para descrever zeros e pólos de funções meromorfas em M. A ideia será associar a cada pólo e zero de uma função meromorfa um inteiro que o indentifica, por meio de uma função que chamaremos divisor, e nos demais pontos de M essa função será zero. Associaremos então um feixe de espaços vetoriais de funções meromorfas para cada divisor, cujos grupos de cohomologia serão discutidos no Teorema de Riemann-Roch. Esta e a próxima seção foram baseadas em [6].

Definição 34. Um **divisor** D em uma superfície de Riemann compacta é uma soma formal do tipo

$$D = \sum_{j=1}^{m} n_j p_j,$$

onde $n_j \in \mathbb{Z}$, m é um inteiro não negativo e p_j são pontos de M.

O conjunto de divisores em M, $Div(M)$, forma um grupo abeliano com a operação natural de soma formal, possuindo $D = 0$ como elemento neutro. Para um ponto $p \in M$, denotamos $D(p)$ o valor de D em p, ou seja, $D(p) = n_j$ se $p = p_j$ para algum j, e $D(p) = 0$ caso contrário.

Se $f : M \to \bar{\mathbb{C}}$ é uma função meromorfa não identicamente nula, podemos atribuir a f um divisor $\operatorname{div}(f)$ considerando a ordem de seus pólos e zeros em M. Se p é um zero de f, $\operatorname{div}(f)(p)$ recebe a ordem do zero; se for um pólo, $\operatorname{div}(f)(p)$ recebe menos a ordem do pólo. Mais precisamente, se f é dada em uma coordenada local z por sua série de Laurent $f(z) = \sum_{j=n}^{\infty} a_j (z-p)^j$ numa vizinhança de p, então $\operatorname{div}(f)(p) = n$. Atribuiremos do mesmo modo um divisor para uma 1-forma meromorfa α: se α é dada localmente por $\alpha = f dz$, definimos $\operatorname{div}(\alpha) = \operatorname{div}(f)$.

Definição 35. Dois divisores D_1 e D_2 são **linearmente equivalentes** se existe uma função meromorfa f tal que $\operatorname{div}(f) = D_1 - D_2$. Denotamos $D_1 \sim D_2$.

Definição 36. O **grau** de um divisor $D = \sum_{j=1}^{m} n_j p_j$ é definido pelo inteiro

$$\deg(D) = \sum_{j=1}^{m} n_j.$$

Proposição 11. *([6]) Uma função meromorfa em uma superfície de Riemann possui o mesmo número de pólos e zeros, contados com multiplicidade.*

Segue diretamente desse resultado que uma função meromorfa possui $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.

Proposição 12. *Dois divisores na esfera de Riemann são linearmente equivalentes se e somente se possuem o mesmo grau.*

Demonstração. Sejam D_1 e D_2 linearmente equivalentes. Então existe f meromorfa tal que $\operatorname{div}(f) = D_1 - D_2$, e portanto $\deg(D_1) - \deg(D_2) = 0$.

Para a volta, considere $D_1 = \sum_{j=1}^{k} n_j p_j + \alpha\infty$ e $D_2 = \sum_{i=1}^{l} m_i p_i + \beta\infty$ tais que $\deg(D_1) = \deg(D_2)$. Defina f por

$$f(z) = \prod_{i,j} \frac{(z-p_j)^{n_j}}{(z-p_i)^{m_i}}.$$

Nos pontos p_i, p_j , é fácil ver que $\mathrm{div}(f)$ possui o mesmo valor que $D_1 - D_2$. Para o ∞, note que $\mathrm{div}(f)(\infty) = \sum_{i=1}^{l} m_i - \sum_{j=1}^{k} n_j = \alpha - \beta$, onde a última igualdade decorre do fato de que $\deg(D_1 - D_2) = 0$. Portanto, $\mathrm{div}(f) = D_1 - D_2$. □

Um divisor é chamado **principal** se é o divisor de uma função meromorfa, e **canônico** se é o divisor de uma 1-forma meromorfa.

Podemos associar um feixe de funções meromorfas a um divisor D definindo para qualquer aberto U de M:

$$\mathcal{O}(D)(U) = \{f : U \to \overline{\mathbb{C}} : f \text{ é meromorfa e } \mathrm{div}(f) \geq -D \text{ em } U \text{ ou } f = 0\}.$$

Se $D = 0$ é o divisor nulo, $\mathcal{O}(0)(U)$ é o conjunto das funções holomorfas em U, pois $\mathrm{div}(f) \geq 0$ identifica as funções que não possuem nenhum pólo. Como M é compacta, toda função holomorfa é constante, e assim $H^0(M, \mathcal{O}(0)) = \mathcal{O}(0)(M) \cong \mathbb{C}$.

Se $D(x) > 0$ então $f \in \mathcal{O}(D)$ pode possuir um pólo de ordem no máximo $D(x)$ em x. Se $D(x) < 0$, então f possui um zero de ordem pelo menos $D(x)$ em x. Assim, $\mathcal{O}(D)$ pode ser descrito como o espaço das funções meromorfas com certos zeros prescritos e pólos permitidos em cada aberto U de M. O conjunto $\mathcal{O}(D)$ adquire a estrutura de espaço vetorial além da de grupo, como fica claro pelo exemplo a seguir:

Exemplo 9. Seja $M = \bar{\mathbb{C}}$ e um divisor $D = z_0 \neq \infty$ em M. O feixe $\mathcal{O}(D)(\bar{\mathbb{C}})$ é formado pelas funções constantes em $\bar{\mathbb{C}}$ ($\mathrm{div}(f) = 0$) e funções meromorfas com pólo simples em z_0 ($\mathrm{div}(f) = -z_0$). Estas funções formam um espaço vetorial de dimensão 2, com base por exemplo $\{f_1 = 1, f_2(z) = \frac{1}{(z-z_0)}\}$.

Proposição 13. *Se* $\deg(D) < 0$ *então* $\mathcal{O}(D) = H^0(M, \mathcal{O}(D)) = 0$.

Demonstração. Como $\deg(-D) > 0$ e $\mathrm{div}(f)$ possui grau zero, não existe f tal que $\mathrm{div}(f) \geq -D$. □

Assim como os feixes $\mathcal{O}(D)$, os grupos de cohomologia $H^n(M, \mathcal{O}(D))$ também são espaços vetoriais. O teorema a seguir nos dá um resultado importante para $H^1(M, \mathcal{O}(0))$:

Teorema 11. *[6] Se M é uma superfície de Riemann compacta, então $H^1(M,\mathcal{O}(0))$ possui dimensão finita. A dimensão de $H^1(M,\mathcal{O}(0))$ é chamada **genus aritmético** de M, e denotada por g. Além do mais, o genus aritmético de uma superfície de Riemann compacta é igual ao seu genus topológico.*

3.6 Teorema de Riemann-Roch

Vimos na seção anterior como associar um feixe $\mathcal{O}(D)$ a um divisor D em uma superfície de Riemann. O Teorema de Riemann-Roch mostra que a diferença entre as dimensões dos grupos de cohomologia $H^0(M,\mathcal{O}(D))$ e $H^1(M,\mathcal{O}(D))$ é uma constante que depende apenas do grau de D e do genus aritmético de M. Como $H^0(M,\mathcal{O}(D)) = \mathcal{O}(D)(M)$, o teorema permite provar a existência de funções meromorfas em M para certos divisores D.

Definição 37. Seja M uma superfície de Riemann compacta. Definimos o **feixe arranha-céu** $\mathbb{C}_p$ em um aberto $U \subset M$ por:

$$\mathbb{C}_p(U) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{se } p \in U, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As aplicações de restrição são naturais: Suponha $p \in U$ e $V \subseteq U$. Se $p \in V$, então $\rho_V^U = Id$; se $p \notin V$, então $\rho_V^U = 0$.

Vamos computar seus grupos de cohomologia. Inicialmente, $H^0(M,\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p(M) = \mathbb{C}$. Para computar H^1, considere uma cobertura arbitrária $\mathcal{U} = \{U_j\}$ de M. Seja j_0 tal que $p \in U_{j_0}$ e contrua uma nova cobertura $\mathcal{V} = \{V_j\}$ do seguinte modo:

$$V_j = \begin{cases} U_{j_0}, & \text{se } j = j_0, \\ U_j \backslash \{p\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A nova cobertura $\mathcal{V}$ possui apenas um aberto que contém p. Assim, $\mathbb{C}_p(V_j \cap V_k) = 0$, para $j \neq k$, e $C^1(\mathcal{V},\mathbb{C}_p) = 0$. Portanto $H^1(\mathcal{V},\mathbb{C}_p) = 0$. A aplicação natural $\phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ de $H^1(\mathcal{U},\mathbb{C}_p)$ em $H^1(\mathcal{V},\mathbb{C}_p)$ é claramente injetiva, e portanto $H^1(\mathcal{U},\mathbb{C}_p) = 0$. Como $\mathcal{U}$ é arbitrária, então $H^1(M,\mathbb{C}_p) = 0$.

Seja D um divisor em M e $p \in M$. Vamos definir a seguinte sequência de feixes:

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D+p) \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \to 0.$$

Note que se $f \in \mathcal{O}(D)$, $\operatorname{div} f \geq -D \geq -D-p$, e logo o segundo homomorfismo na sequência é trivial. Para construir β precisamos definir os homomorfismos de grupo β_U. Se $p \notin U$, então $\mathbb{C}_p(U) = 0$, e basta definir $\beta_U = 0$. Se $p \in U$, seja $f \in \mathcal{O}(D+p)(U)$. Considere um sistema de coordenadas $Z(z)$ em torno de p tal que $p = Z(0)$. Se $D(p) = n$, a função f pode ser expandida em série de potências próximo de p como $f(z) = \sum_{j=-n-1}^{\infty} a_j z^j$. Definimos $\beta_U(f) = a_{-n-1}$.

Proposição 14. *A sequência* $0 \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D+p) \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \to 0$ *como definida acima é exata.*

Demonstração. Se $\mathbb{C}_p(U) \neq 0$, então o kernel de β é formado pelas funções que possuem um pólo de ordem no máximo n em p, já que sua expansão em série deverá ter $a_{-n-1} = 0$. Essas funções são exatamente aquelas pertencentes a $\mathcal{O}(D)$. Se $\mathbb{C}_p(U) = 0$, $\ker \beta = \mathcal{O}(D+p)$, e devemos mostrar que $\mathcal{O}(D+p) = \mathcal{O}(D)$. Mas se $p \notin U$ então $D|_U = (D+p)|_U$, de onde segue o resultado. □

Teorema 12. *(Riemann-Roch) Seja M uma superfície de Riemann compacta de genus aritmético g e D um divisor em M. Então os espaços $H^0(M,\mathcal{O}(D))$ e $H^1(M,\mathcal{O}(D))$ possuem dimensão finita e*

$$\dim H^0(M,\mathcal{O}(D)) - \dim H^1(M,\mathcal{O}(D)) = 1 - g + \deg D. \tag{3.2}$$

Demonstração. Fixe $p \in M$. A sequência longa associada a $0 \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D+p) \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \to 0$ é dada por

$$0 \to H^0(M,\mathcal{O}(D)) \to H^0(M,\mathcal{O}(D+p)) \xrightarrow{\beta^0} \mathbb{C} \to H^1(M,\mathcal{O}(D)) \to H^1(M,\mathcal{O}(D+p)) \to 0. \tag{3.3}$$

Podemos separar (3) em duas sequências:

$$\begin{gathered} 0 \to H^0(M,\mathcal{O}(D)) \to H^0(M,\mathcal{O}(D+p)) \xrightarrow{\beta^0} V \to 0 \\ 0 \to W \to H^1(M,\mathcal{O}(D)) \to H^1(M,\mathcal{O}(D+p)) \to 0, \end{gathered}$$

onde $V = \operatorname{Im}\beta^0$ e $W = \mathbb{C}/V$. Da Proposição 14 e pelo Teorema 10 sabemos que as sequências definidas até aqui são exatas. Usando esse fato, pelo teorema do núcleo e imagem aplicado a cada uma das sequências obtemos:

$$\begin{gathered} \dim H^0(M,\mathcal{O}(D)) + \dim V = \dim H^0(M,\mathcal{O}(D+p)) \\ \dim W + H^1(M,\mathcal{O}(D+p)) = \dim H^1(M,\mathcal{O}(D)). \end{gathered}$$

Sabendo que $\dim V + \dim W = 1$, unimos as equações em:

$$\dim H^0(M,\mathcal{O}(D)) - \dim H^1(M,\mathcal{O}(D)) + 1 = \dim H^0(M,\mathcal{O}(D+p)) - H^1(M,\mathcal{O}(D+p)).$$

Usando que $\deg(D+p) = \deg(D)+1$, obtemos agora:

$$\dim H^0(M,\mathcal{O}(D)) - \dim H^1(M,\mathcal{O}(D)) - \deg(D) = \dim H^0(M,\mathcal{O}(D+p)) - H^1(M,\mathcal{O}(D+p)) - \deg(D+p).$$

A equação acima nos diz que, se a equação (3.1) vale para o divisor D ou para $D+p$, então também valerá para o outro. Em outras palavras, se (3.1) vale para D, então vale para $D+p$ e para $D-p$.

Se $D=0$ é o divisor nulo, então $\dim H^0(M,\mathcal{O}(0)) = \dim \mathbb{C} = 1$ e $\dim H^1(M,\mathcal{O}(0)) = g$, e (3.1) vale. Como podemos obter qualquer divisor a partir do divisor nulo por meio da soma e subtração de um número finito de pontos, temos que (3.1) vale para qualquer divisor D, e o teorema está provado. □

Corolário 2. *Se M é uma superfície de Riemann compacta, existe uma função meromorfa não constante $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e considere o divisor $D = (g+1)p$. As funções constantes formam um um subespaço de $H^0(M,\mathcal{O}(D)) = \mathcal{O}(D)(M)$ de dimensão 1. Entretanto, pelo Teorema de Riemann-Roch, temos que

$$\dim H^0(M,\mathcal{O}(D)) = 2 + \dim H^1(M,\mathcal{O}(D)) \geq 2,$$

e portanto deve existir uma função meromorfa em $\mathcal{O}(D)(M)$. □

Corolário 3. *Se M é uma superfície de Riemann compacta de genus aritmético* 0 *então M é biholomorfa a $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Pelo resultado anterior temos que existe uma função meromorfa não constante $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$, tal que $f \in \mathcal{O}(D)(M)$ para $D = p$ um ponto qualquer em M. Pela escolha de D, f possui no máximo um pólo simples em p. Mas como f é não constante, f deve possuir um pólo em p. Portanto $f^{-1}\{\infty\} = p$, e f possui grau 1. Ou seja, f é biholomorfa. □

4 Conclusão

Estudamos neste trabalho superfícies de Riemann e utilizamos o teorema de Riemann-Roch para responder a importante questão da existência de funções meromorfas em superfícies de Riemann compactas. Vimos também como a cohomologia e a teoria dos feixes podem ser ferramentas poderosas para se obter informações sobre objetos que são definidos localmente em variedades, apesar de seu alto grau de abstração.

Diversos assuntos podem ser estudados a partir do conteúdo visto neste trabalho, como a dualidade de Serre e o problema de Dirichlet nestas superfícies; variedades de Kähler, que são variedades complexas munidas de uma métrica Riemanniana satisfazendo certas condições de compatibilidade; ou então os espaços de Teichmüller, que estão associados a parametrizações de estruturas complexas em variedades.

[1] Carmo, M. P. do; *Geometria Riemanniana*, Impa, 2011.

[2] Jost, J. *Compact Riemann Surfaces*, Springer, 2006.

[3] Lima, E. L. *Fundamental Groups and Covering Spaces*, A K Peters_CRC Press, 2003.

[4] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press, 1983.

[5] Huybrechts, D. *Complex Geometry*, Springer, 2005.

[6] Gastesi, P.A. *Riemann Surfaces*, Tata Institute of Fundamental Research. Disponível em: http://www.math.tifr.res.in/~pablo/download/book/. Acesso em janeiro de 2021.

[7] da Rocha, R. *Álgebra Linear e Multilinear*, Livraria da Física, 2017.

[8] Brown, J.W.; Churchil, R. V. *Complex Variables and Applications*, oitava edição, McGraw-Hill, 2009.

[9] Gallier, J.; Quantaince, J. *Homology, Cohomology, and Sheaf Cohomology*. Disponível em: https://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/sheaf-coho.html. Acesso em abril de 2021.