

Homologia de Morse

Bruno Batista de Carvalho



Título: Homologia de Morse

Autor: Bruno Batista de Carvalho

Orientador: Profa. Dra. Mariana R. da Silveira

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Dahisy Valadão de Souza Lima
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici
Universidade Federal do ABC

Santo André, 7 de maio de 2021.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a Teoria de Morse, uma importante ferramenta que consiste em utilizar uma função de Morse f em uma variedade M para estudar a topologia de M . A abordagem adotada considera o sistema dinâmico dado pelo campo gradiente negativo de f e obtém uma relação entre os pontos estacionários deste campo e a topologia de M . Apresentamos uma construção do complexo de Morse-Witten que é gerado pelos pontos críticos de f e cuja diferencial conta as órbitas entre os pontos críticos, considerando orientação. A principal propriedade deste complexo é que sua homologia coincide com a homologia singular de M .

Abstract

The purpose of this work is to present the Morse Theory, an important tool which consists of using a Morse function f on a manifold M in order to study its topology. The approach herein considers a dynamical system given by the negative gradient field of f and gives a relation between stationary points of the field and the topology of M . We present a construction of the Morse-Witten complex, which is generated by the critical points of f , and whose differential counts, with orientation, the orbits between critical points. The main property of this complex is that its homology is isomorphic to the singular homology of M .

Introdução

Uma das maneiras mais conhecidas de estudar a topologia de uma variedade M consiste em analisar o comportamento dos fluxos em M . Um importante resultado de sistemas dinâmicos, devido a Charles C. Conley [3], diz que todo fluxo num espaço métrico compacto pode ser decomposto numa parte gradiente e numa parte “quase recorrente”. Portanto, a descrição qualitativa de um fluxo em M é separada naturalmente no estudo de cada uma destas partes. O caso mais simples desta decomposição é quando M é compacta e o fluxo é gerado pelo campo gradiente de uma função de Morse f . Neste caso, o conjunto recorrente é formado por pontos críticos isolados não degenerados e é descrito pelos índices de Morse destes pontos. Além disso, a própria função f é uma função de Lyapunov para o fluxo, e seus conjuntos de nível induzem uma filtração em M , isto é, uma sequência encaixada crescente de subconjuntos compactos. A topologia relativa dos conjuntos desta filtração fornece informações da parte gradiente do fluxo.

Historicamente, as primeiras abordagens da Teoria de Morse não incluem o conceito de fluxo na variedade. Utilizando apenas os índices de Morse dos pontos críticos de f , denotados por $\text{ind}_f(\cdot)$, H. C. Marston Morse mostra que

$$\sum_{p \in \text{Crit} f} t^{\text{ind}_f(p)} - P(M) = (1+t)Q(f),$$

onde $P(M) = \sum t^k \beta_k$ é o polinômio de Poincaré de M , $\beta_k = \dim H_k(M)$ é o k -ésimo número de Betti de M e $H_k(M)$ é o k -ésimo grupo de homologia singular de M . Como consequência, Morse obtém as *desigualdades fortes de Morse*

$$c_k - c_{k-1} + \cdots \pm c_0 \geq \beta_k - \beta_{k-1} + \cdots \pm \beta_0, \quad k \in \{0, 1, \dots, \dim M\},$$

onde c_k é a quantidade de pontos críticos de índice k . Mais tarde, com a linguagem do final dos anos 40, Bott resume em [2] os argumentos de Morse em dois teoremas, utilizando os conjuntos de nível $M(c) = \{q \in M : f(q) \leq c\}$ de f , sendo este um caminho mais simples para demonstrar as desigualdades de Morse:

Teorema (A). *Se não há valores críticos em $[a, b]$, então $M(a)$ e $M(b)$ são difeomorfos.*

Teorema (B). *Se existe exatamente um ponto crítico não degenerado de índice k em $f^{-1}[a, b]$, então $M(b)$ possui o tipo de homotopia de $M(a)$ com um k -disco “colado”,*

$$M(b) \simeq M(a) \cup_{\alpha} D^k,$$

por uma aplicação $\alpha : \partial D^k \rightarrow M(a)$.

Em 1961, o Teorema B foi refinado por Stephen Smale em [19]. Ao invés de usar um k -disco, Smale demonstra que $M(b)$ é difeomorfo à união de $M(a)$ com uma alça. Esta abordagem o levou

a criar a sua Teoria de Alças e consequentemente obter a Conjectura de Poincaré Generalizada e o Teorema do h -Cobordismo.

Quando passamos para a abordagem de fluxo gerado pelo campo $-\nabla f$ gradiente negativo de f , obtemos uma decomposição celular da variedade $M = \cup_{p \in \text{Crit} f} W^u(p)$ utilizando as variedades instáveis, mas da qual é difícil se extrair informações sobre M . Foi Smale que contornou essas dificuldades com a seguinte ideia: considerando o fluxo gerado pelo campo $-\nabla(-f)$ e a decomposição $M = \cup_{p \in \text{Crit} -f} W^s(p)$, Smale chama $-\nabla f$ de *transversal* se as células destas decomposições se encontram “da maneira mais genérica possível”. Formalmente, $-\nabla f$ é transversal se os espaços tangentes destes conjuntos geram o espaço tangente da variedade, ou seja,

$$T_z W^u(p) + T_z W^s(q) = T_z M, \quad z \in W^u(p) \cap W^s(q),$$

veja Definição 2.2.15. Os campos gradientes satisfazendo esta condição são C^1 -densos no sentido do Teorema 2.2.16. A transversalidade do campo implica que, se p e q são pontos críticos com índices consecutivos, $W^u(p) \cap W^s(q)$ é um conjunto finito de órbitas (Proposição 2.2.18). Nestas condições, é possível definir o *número de interseção* $n(p, q)$ entre p e q como o número de interseção das subvariedades $W^u(p) \cap f^{-1}(a)$ e $W^s(q) \cap f^{-1}(a)$, com $a \in (f(q), f(p))$ valor regular. O número de interseção fornece aplicações de colagem para as células de um complexo CW associado a M , o que foi explorado por John M. Franks no seu paper [6]. Além disso, quando $n(p, q) = \pm 1$, John Milnor demonstra em [13] um importante Teorema de Cancelamento de pontos críticos, que dá condições suficientes para deformar o campo numa vizinhança V de $W^u(p) \cap W^s(q) \cup \{p, q\}$ em um campo sem pontos críticos em V . Ainda neste contexto, pode-se definir um complexo cujo grupo de cadeias é gerado pelos pontos críticos de f , graduado pelo índice de Morse, com operador bordo ∂^c satisfazendo

$$\partial^c p = \sum_{q \in \text{Crit} f} n(p, q) q, \quad p \in \text{Crit} f.$$

Tal complexo, construído graças às contribuições de Morse, René Thom, Smale, Milnor e Edward Witten, é um dos principais objetos da Teoria de Morse. Sua principal propriedade é recuperar a homologia da variedade pelo isomorfismo dado no Teorema 3.2.4, o que fornece imediatamente as desigualdades fortes de Morse. Este complexo é chamado de *Complexo de Morse-Witten* em [22]. Witten, com uma nova abordagem do operador ∂^c utilizando conceitos de física em [23], fornece uma interpretação geométrica de ∂^c . O operador bordo é recuperado contando com orientação as finitas órbitas entre pontos críticos p e q de índice consecutivo. Esta abordagem “relativa” inspirou uma generalização da Teoria de Morse para dimensão infinita por Andreas Floer em [4], e uma introdução contextualizada à homologia de Floer pode ser encontrada em [18].

A construção do Complexo de Morse-Witten para variedades Riemannianas fechadas de dimensão finita é o principal objetivo deste trabalho. A seguir, descrevemos os assuntos abordados em cada capítulo.

O primeiro capítulo, que trata dos pré-requisitos de homologia para o trabalho, está dividido em três seções. Na primeira seção definimos simplexes e, a partir destes, construímos o(s) grupo(s) das cadeias singulares. Introduzimos homologia singular e mostramos sua invariância por equivalência homotópica. Na segunda seção abordamos sequências exatas a fim de obter propriedades da homologia de complexos de cadeias abstratos. Finalmente, na terceira seção, apresentamos homologia singular relativa e vários resultados importantes, como a sequência (de homologia) do par e da tripla, Teorema da Excisão, a sequência de Mayer-Vietoris e uma aplicação desta última no Teorema da Curva de Jordan generalizado.

O objetivo do segundo capítulo é estudar a Teoria de Morse Clássica. Para isto, apresentamos na primeira seção os conceitos e resultados necessários de Topologia Diferencial e Sistemas Dinâmicos. Em seguida, introduzimos os conceitos de função de Morse, índice de Morse, variedades instável e estável, variedades conectantes e seus respectivos espaços moduli. Por fim, demonstramos os principais teoremas da Teoria de Morse Clássica, que sintetizam a relação entre a topologia da variedade e as subvariedades de nível de uma função de Morse.

No terceiro e último capítulo estudamos a homologia de Morse. Na primeira seção introduzimos orientação e estudamos orientações induzidas nas variedades conectantes e espaços moduli. Na segunda seção apresentamos a construção do Complexo de Morse-Witten para uma função de Morse f que satisfaz a condição de Morse-Smale, demonstramos as desigualdades de Morse e exibimos um exemplo. Encerramos na terceira seção com a Teoria do Índice de Conley, usada neste trabalho para demonstrar os Teoremas 3.2.3 e 3.2.4, que garantem que o Complexo de Morse-Witten é, de fato, um complexo de cadeias cuja homologia coincide com a homologia da variedade.

Sumário

1	Homologia	8
1.1	Homologia Singular	8
1.1.1	Grupo das Cadeias Singulares	8
1.1.2	Invariância	13
1.2	Homologia de Complexos de Cadeias	17
1.2.1	Sequências Exatas	18
1.2.2	Complexos de Cadeias	21
1.3	Homologia Singular Relativa	30
2	Teoria de Morse	44
2.1	Sistemas Dinâmicos: Preliminares	44
2.2	Teoria de Morse Clássica	51
3	Homologia de Morse	64
3.1	Orientação	64
3.2	Complexo de Morse-Witten	67
3.3	Teoria do Índice de Conley e aplicação à Teoria de Morse	72

Capítulo 1

Homologia

Neste capítulo, estudaremos um dos conceitos mais importantes da topologia algébrica. Os grupos de homologia são invariantes topológicos, e são ferramentas muito úteis no problema de classificação de espaços topológicos. Primeiramente, estudaremos os grupos de homologia singular de um espaço topológico X . Os grupos das cadeias singulares são gerados por funções contínuas definidas em “triângulos” e contradomínio X . A homologia singular, conjuntamente com suas principais propriedades, é introduzida na Seção 1.1. Na Seção 1.2 abordamos a homologia de complexo de cadeias, não necessariamente associado a um espaço topológico. Finalmente, apresentamos na Seção 1.3 uma generalização da homologia singular para um par de espaços topológicos, denominada homologia singular relativa, e apresentamos várias propriedades e aplicações desta. As principais referências deste capítulo são [8], [10] e [15].

1.1 Homologia Singular

1.1.1 Grupo das Cadeias Singulares

Cadeias singulares são cruciais para definirmos homologia singular. Uma cadeia singular é definida a partir de simplexos singulares que, por sua vez, são funções definidas em simplexos. Começaremos com a definição de simplexo, que generaliza o conceito de triângulo.

Definição 1.1.1. Um k -simplexo é o conjunto formado pelas combinações lineares $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$, $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^{k+1}$, onde os vetores $v_k - v_0, v_k - v_1, \dots, v_k - v_{k-1}$ são linearmente independentes, $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ e $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. Tal simplexo será denotado por $[v_0, \dots, v_k]$.

O k -simplexo *padrão* é definido como o conjunto

$$\Delta^k = \left\{ (t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} : \sum_{i=0}^k t_i = 1, t_i \geq 0 \forall i \in \{0, 1, \dots, k\} \right\},$$

ou seja, o k -simplexo cujos vetores geradores são a base canônica de \mathbb{R}^{k+1} .

Na Figura 1.1.1, apresentamos alguns exemplos de simplexos padrões. Note que Δ^3 é um tetraedo, mas contido em \mathbb{R}^4 .

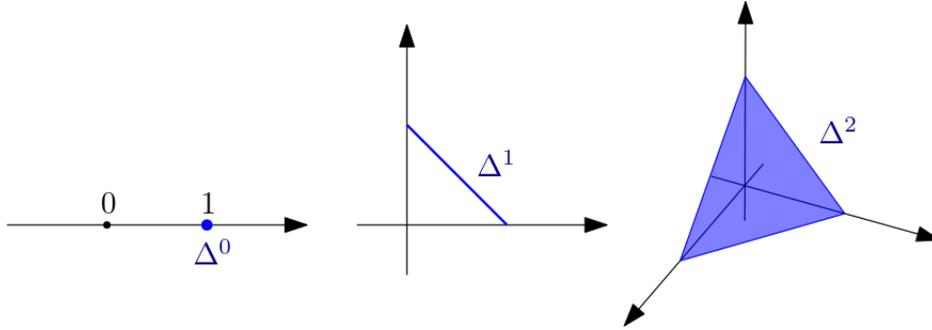


Figura 1.1.1: Representação de Δ^0, Δ^1 e Δ^2 .

Note que todo k -simplexo $[v_0, \dots, v_k]$ é homeomorfo a Δ^k , considerando a bijeção:

$$(t_0, \dots, t_k) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k t_i v_i.$$

Interpretando os vetores v_0, \dots, v_k como os vértices do simplexo $[v_0, \dots, v_k]$, podemos orientar as arestas, usando a ordem crescente do subíndice, isto é, a aresta que liga v_i a v_j , com $i < j$, “saí” de v_i e “chega” em v_j .

Retirando algum dos vetores, digamos, v_i , temos que os k vetores restantes geram um $(k-1)$ -simplexo (quando $k \geq 1$), o qual chamamos de face, e representamos por $[v_0, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_k]$. A orientação da face é determinada pela ordenação dos vetores que a compõem no k -simplexo inicial. “Fases de faces” também são consideradas faces do simplexo original. Um k -simplexo possui $k+1$ faces que são $(k-1)$ -simplexos. Podemos denotá-las de uma outra maneira, considerando as imagens das inclusões $\phi_i^{k-1}: \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$, onde $i \in \{0, \dots, k+1\}$, com $\phi_i(t_0, t_1, \dots, t_{k-1}) = (t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{k-1})$.

Definição 1.1.2. Dado um espaço X munido de uma topologia, chamamos de k -simplexo *singular* em X uma função $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$ contínua, onde Δ^k possui a topologia induzida de \mathbb{R}^{k+1} . A i -ésima face de tal simplexo é o $(k-1)$ -simplexo singular dada pela composição $\sigma \circ \phi_i^{k-1}: \Delta^{k-1} \rightarrow X$, onde $i \in \{0, \dots, k\}$, também denotada por σ^i .

Transportaremos essa definição para a álgebra. Obtemos assim as cadeias singulares, um dos principais conceitos do nosso estudo, definidas a seguir.

Definição 1.1.3. Seja X um espaço topológico. Definimos uma k -cadeia singular como uma combinação linear $\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$, onde σ_i é um k -simplexo singular e $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Poderíamos ter escolhido qualquer anel R comutativo com unidade, mas neste trabalho usaremos apenas coeficientes em \mathbb{Z} . Fixando um espaço topológico X , podemos considerar o conjunto de todos os k -simplexos singulares em X , denotado por $X_s^{\Delta^k}$. O grupo abeliano (ou \mathbb{Z} -módulo) gerado por $X_s^{\Delta^k}$, denotado por $S_k(X)$, é chamado *grupo das k -cadeias singulares de X* . Se $k < 0$, definimos $S_k(X) = \{0\}$. Para considerar todas as cadeias (variando k), definimos

$$S(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k(X),$$

o *grupo das cadeias singulares*. Agora estamos prontos para definir o operador bordo.

Definição 1.1.4. Seja X um espaço topológico. O operador *bordo* $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ é definido para $\sigma \in X_s^{\Delta^k}$, $k \geq 1$, como

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\sigma \circ \phi_i^{k-1}),$$

e estendido por linearidade para todo o $S_k(X)$, isto é,

$$\partial \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial \sigma_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i \in X_s^{\Delta^k} \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Quando $\sigma \in S_0(X)$, definimos $\partial\sigma = 0$. Definimos $\partial : S(X) \rightarrow S(X)$ por $\partial := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \partial_k$.

A principal propriedade do operador bordo é descrita na próxima proposição. Uma descrição intuitiva é que “o bordo de uma figura geométrica não possui bordo”.

Proposição 1.1.5. *Sejam X um espaço topológico e $\partial : S(X) \rightarrow S(X)$ o operador bordo. Então $\partial^2 = 0$ ou, em outras palavras,*

$$\text{Im } \partial \subseteq \ker \partial.$$

Demonstração. Seja $\alpha \in S(X)$. Se $\alpha \in S_0(X)$, então $\partial\alpha = 0$ e portanto $\partial^2\alpha = 0$. Se $\alpha \in S_1(X)$, $\partial\alpha \in S_0(X)$ e $\partial^2\alpha = 0$. Suponha então que $\alpha \in S_k(X)$, $k \geq 2$. Então $\alpha = \sum_{i=1}^p \lambda_i \sigma_i$, onde σ_i são

k -simplexos singulares e $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\begin{aligned}\partial^2\alpha &= \partial^2 \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \sigma_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \partial^2 \sigma_i \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \partial \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j \sigma_i \circ \phi_j^{k-1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k \lambda_i (-1)^j \partial (\sigma_i \circ \phi_j^{k-1}).\end{aligned}$$

Na expressão do operador ∂ , surge um sinal $(-1)^n$ na n -ésima parcela, mas como $\sigma_i \circ \phi_j^{k-1}$ teve sua j -ésima coordenada retirada, “não passamos” por $n = j$, mas estamos, por exemplo, na $j + 1$ -ésima parcela com o índice n ; logo, quando $n > j$, o sinal que deve aparecer é $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$. Sendo assim:

$$\partial^2\alpha = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k \lambda_i (-1)^j \left[\sum_{n=0}^{j-1} (-1)^n \sigma \circ \phi_j^{k-1} \circ \phi_n^{k-2} + \sum_{n=j+1}^{k-1} (-1)^{n-1} \sigma \circ \phi_j^{k-1} \circ \phi_n^{k-2} \right].$$

Fazendo a distributiva e trocando os índices n e j na segunda soma, obtemos

$$\begin{aligned}\partial^2\alpha &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^{j-1} \lambda_i (-1)^{j+n} \sigma \circ \phi_j^{k-1} \circ \phi_n^{k-2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \sum_{n=0}^k \sum_{j=n+1}^{k-1} \lambda_i (-1)^{j+n-1} \sigma \circ \phi_n^{k-1} \circ \phi_j^{k-2},\end{aligned}$$

onde as duas parcelas de somas são iguais ($n < j$ e $j > n$, respectivamente) a menos de um sinal. Portanto se anulam e concluímos que $\partial^2\alpha = 0$. \square

Um comentário oportuno a se fazer é que, da forma que foi contruído, ∂ é um homomorfismo de grupos. Elementos de $\ker \partial_k$ são chamados de k -ciclos singulares, e elementos de $\text{Im } \partial_k$, k -fronteiras singulares. O resultado anterior nos diz que $\text{Im } \partial_k$ é subgrupo normal de $\ker \partial_{k-1}$, e, portanto, podemos tomar o quociente.

Definição 1.1.6. Sejam X um espaço topológico, $\partial : S(X) \rightarrow S(X)$ o operador bordo. Então, dada a sequência

$$\cdots \rightarrow S_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

definimos o k -ésimo grupo de homologia $H_k(X)$, $k \geq 0$, como o quociente $\ker \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$. Quando

$k < 0$, definimos $H_k(X) = \{0\}$. A homologia singular de X é simplesmente

$$H(X) = \bigoplus_{k \geq 0} H_k(X).$$

A proposição a seguir é o primeiro passo na relação entre a álgebra homológica e a topologia de X , fornecendo características topológicas de X a partir de $H_0(X)$.

Proposição 1.1.7. *Seja X um espaço topológico. Se $(X_i)_{i \in J}$ são as componentes conexas de X e σ_i é um 0-simplexo singular em X_i , para todo $i \in J$, então as classes de homologia $[\sigma_i]$ são geradores de $H_0(X)$.*

Demonstração. Primeiro, suponha que X é conexo por caminhos. Iremos mostrar que uma 0-cadeia singular $\sum_{i=1}^p \lambda_i Q_i$ ($Q_i \neq Q_j, i \neq j$) é o bordo de uma 1-cadeia singular se, e somente se, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$, onde $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ e Q_i são pontos (na verdade, são as funções contínuas que levam Δ^0 a tais pontos, mas cometeremos esse abuso conscientemente) em X .

Suponha que $\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i = \partial\alpha$, para algum $\alpha \in S_1(X)$. Temos que $\alpha = \sum_{j=1}^k t_j \sigma_j$, com σ_j 1-simplexos singulares. Agora, o bordo de cada simplexo σ_j é a diferença de seus pontos final e inicial, digamos, P_j e p_j . Então

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i Q_i = \partial\alpha = \sum_{j=1}^k t_j \partial\sigma_j = \sum_{j=1}^k t_j (P_j - p_j).$$

No lado direito, temos que a soma dos coeficientes é $\sum_{j=1}^k t_j - t_j = 0$. Reescrevendo este lado como $\sum_{i=1}^{p+d} \bar{t}_i Q_i$, temos $\sum_{i=1}^p (\lambda_i - \bar{t}_i) Q_i + \sum_{i=p+1}^{p+d} (-\bar{t}_i) Q_i = 0$. Assim, $\bar{t}_i = 0$ se $i > p$ e $\lambda_i = \bar{t}_i$ para $i \leq p$, e vale $\sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{i=1}^p \bar{t}_i = \sum_{i=1}^{p+d} \bar{t}_i$. Como o último somatório é nulo (pois apenas mudamos o nome dos coeficientes do lado direito), segue que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$.

Agora, suponha $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$. Então, escrevendo

$$\lambda_i Q_i = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{\lambda_i \text{ vezes}} Q_i,$$

para cada Q_i na soma, como a soma dos coeficientes é zero, para cada coeficiente 1 de Q_i , temos um coeficiente -1 para algum Q_j . Reescrevendo a soma de maneira redundante, obtemos a forma $\sum_{t=1}^k Q_{t_1} - Q_{t_2}$, e podemos definir como σ_t o 1-simplexo singular que tem ponto inicial Q_{t_2} e ponto final Q_{t_1} . Assim, $\sum_{i=1}^p \lambda_i Q_i = \sum_{i=1}^k \partial\sigma_t = \partial\left(\sum_{t=1}^k \sigma_t\right)$, onde $\sum_{t=1}^k \sigma_t \in S_1(X)$, como desejado.

Temos que $H_0(X) = \ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1 = S_0(X) / \text{Im } \partial_1$. Pelo resultado acima, concluímos que dois elementos de $S_0(X)$ estão na mesma classe de equivalência quando possuem a mesma soma de coeficientes. De fato, sua diferença possui soma de coeficientes nula, e pelo que acabamos de demonstrar, é imagem de alguma 1-cadeia singular. Note que se σ é um 0-simplexo singular em X , a soma de seus coeficientes (na verdade, seu único coeficiente) é 1. Assim, dada qualquer classe de equivalência

$[\alpha] \in H_0(X)$, se a soma dos coeficientes de α é $m \in \mathbb{Z}$, temos que $[\alpha] = [m\sigma] = m[\sigma]$. Logo, $[\sigma]$ é base para $H_0(X)$, e segue que este último é isomorfo a \mathbb{Z} ($m[\sigma] \rightleftharpoons m$).

Suponha agora que X possui $(X_i)_{i \in J}$ como sua família de componentes conexas por caminhos. Para cada $i \in J$, fixe $Q_i \in X_i$. Seja $\alpha \in S_0(X)$. Como α é uma combinação linear finita de elementos de $X_s^{\Delta^0}$, encontramos $\{X_t\}_{t=1}^k$ componentes de X que possuem todos esses elementos. Reescreva agora a combinação na forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{1i} p_{1i} + \sum_{i=1}^{m_2} \lambda_{2i} p_{2i} + \cdots + \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_{ki} p_{ki},$$

onde, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, $p_{ji} \in X_j$ para todo $i \in \{1, \dots, m_j\}$. Assim, $\sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{ji} p_{ji}$ está na mesma classe de equivalência que $(\sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{ji}) Q_j$, e segue que $\{Q_i\}_{i \in J}$ é base para $H_0(X)$. \square

Da proposição anterior segue que, quando I é finito, $H_0(X)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^{|I|}$. Em particular, se $X = S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$, a esfera 0-dimensional, $H_0(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Um outro caso particular é $X = \{p\}$, $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.1.8. Considere $X = \{p\}$. A única função contínua de Δ^k em $\{p\}$ é a função constante, que denotamos por σ_k (portanto, $S_k(X) = \langle \sigma_k \rangle \cong \mathbb{Z}$). Suas faces são a função constante de Δ^{k-1} em X . Agora, calculando o bordo daquela, com $k > 0$,

$$\partial \sigma_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_k \circ \phi_i^{k-1} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_{k-1} = \begin{cases} \sigma_{k-1}, & \text{se } k \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, $\ker \partial_k = \begin{cases} S_k(X), & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}$, e conseqüentemente $H_k(X) = 0$, para todo k par.

Porém, pelo mesmo argumento acima, $\text{Im } \partial_{k+1} = \begin{cases} S_k(X), & \text{se } k+1 \text{ é par} \\ 0, & \text{se } k+1 \text{ é ímpar} \end{cases}$. Logo, para k ímpar,

$H_k(X) = \ker \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1} = S_k(X) / S_k(X) = 0$. Concluimos, então, $H_k(X) = 0$ para todo $k > 0$.

1.1.2 Invariância

Nesta seção daremos mais alguns passos adiante na relação entre topologia e álgebra. O primeiro deles é mostrar que funções contínuas induzem homomorfismos nos grupos de homologia.

Proposição 1.1.9. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Então as funções $(f_*)_k : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ para todo $k \geq 0$ definidas por*

$$(f_*)_k([\sigma]) = [f \circ \sigma]$$

são homomorfismos. Portanto $f : X \rightarrow Y$ induz um homomorfismo $f_* : H(X) \rightarrow H(Y)$.

Demonstração. Dado um elemento $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ de $X_s^{\Delta^k}$, construímos um elemento de $Y_s^{\Delta^k}$ fazendo a composição $f \circ \sigma : \Delta^k \rightarrow Y$. Definimos então $\bar{f} : S(X) \rightarrow S(Y)$ como a extensão linear da operação composição, ou seja, $\bar{f}(\sum_{i=1}^p \lambda_i \sigma_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{f}(\sigma_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (f \circ \sigma_i)$, e temos homomorfismos $\bar{f}_k : S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$.

Primeiro, devemos mostrar que um elemento de $\ker \partial_k^X$ é levado em $\ker \partial_k^Y$. Para tal, mostraremos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_k(X) & \xrightarrow{\partial_k^X} & S_{k-1}(X) \\ \bar{f}_k \downarrow & & \downarrow \bar{f}_{k-1} \\ S_k(Y) & \xrightarrow{\partial_k^Y} & S_{k-1}(Y). \end{array}$$

De fato, seja $\alpha \in S_k(X)$. Então $\alpha = \sum \lambda_i \sigma_i$ e

$$\begin{aligned} \bar{f}_{k-1} \circ \partial_k^X(\alpha) &= \bar{f}_{k-1} \circ \partial \left(\sum \lambda_i \sigma_i \right) \\ &= \bar{f}_{k-1} \left(\sum_i \sum_j \lambda_i (-1)^j \sigma_i \circ \phi_j^k \right) \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i (-1)^j \bar{f}_{k-1}(\sigma_i \circ \phi_j^k) \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i (-1)^j f \circ \sigma_i \circ \phi_j^k \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i (-1)^j (f \circ \sigma_i) \circ \phi_j^k \\ &= \sum_i \lambda_i \partial_k^Y(f \circ \sigma_i) \\ &= \partial_k^Y \left(\sum_i \lambda_i \bar{f}_k(\sigma_i) \right) \\ &= \partial_k^Y \circ \bar{f}_k(\alpha). \end{aligned}$$

Tome então $\beta \in \ker \partial_k^X$. Temos que

$$\partial_k^Y(\bar{f}_k(\beta)) = (\partial_k^Y \circ \bar{f}_k)(\beta) = (\bar{f}_{k-1} \circ \partial_k^X)(\beta) = \bar{f}_{k-1}(\partial_k^X \beta) = \bar{f}_{k-1}(0) = 0,$$

e concluímos que $\bar{f}_k(\beta) \in \ker \partial_k^Y$.

Para podermos definir a função do enunciado, resta apenas verificar que esta não depende do representante da classe de homologia, ou seja, $[\alpha] = [\beta]$ implica $[\bar{f}_k(\alpha)] = [\bar{f}_k(\beta)]$, $\alpha, \beta \in \ker \partial_k^X$. Se $[\alpha] = [\beta]$, temos que $\alpha - \beta \in \text{Im } \partial_{k+1}^X$, ou seja, existe $\gamma \in S_{k+1}(X)$ tal que $\alpha - \beta = \partial_{k+1}^X \gamma$. Assim,

usando a linearidade de \bar{f}_k :

$$\begin{aligned}\bar{f}_k(\alpha) - \bar{f}_k(\beta) &= \bar{f}_k(\alpha - \beta) \\ &= \bar{f}_k \circ \partial_{k+1}^X(\gamma) \\ &= \partial_{k+1}^Y \circ \bar{f}_{k+1}(\gamma).\end{aligned}$$

Logo $\bar{f}_k(\alpha) - \bar{f}_k(\beta) \in \text{Im } \partial_{k+1}^Y$, o que implica $[\bar{f}_k(\alpha)] = [\bar{f}_k(\beta)]$. Segue que $(f_*)_k : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$, $(f_*)_k([\sigma]) = [\bar{f}_k(\sigma)]$ está bem definida, e é um homomorfismo pela definição de \bar{f}_k . \square

Dados X, Y, Z espaços topológicos, segue da definição de aplicação induzida em homologia que $id_{*X} = id_{H(X)}$, onde $id_X, id_{H(X)}$ são as identidades em seus respectivos espaços e, para $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Uma consequência importante da proposição anterior e do comentário acima é que, se dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos, então $H(X)$ é isomorfo a $H(Y)$. De fato, se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, isto é, f é uma função contínua e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também o é, temos que $f_* \circ f_*^{-1} = (f \circ f^{-1})_* = id_{H(Y)}$. Pelo mesmo argumento, $f_*^{-1} \circ f_* = id_{H(X)}$. Portanto, sendo f_* um homomorfismo inversível, é um isomorfismo. Esta é uma propriedade interessante especialmente quando consideramos sua contrapositiva: se $H(X)$ e $H(Y)$ não são isomorfos, então X e Y não são homeomorfos. Assim, uma forma de mostrar que dois espaços topológicos não são homeomorfos é encontrar algum $k \geq 0$ tal que $H_k(X)$ não é isomorfo a $H_k(Y)$.

Definição 1.1.10. Sejam X, Y espaços topológicos, e denote por I o intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Duas funções $f, g : X \rightarrow Y$ contínuas são ditas *homotópicas*, e denotamos $f \simeq g$, se existe uma função contínua $F : X \times I \rightarrow Y$, chamada *homotopia entre f e g* , tal que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Definição 1.1.11. Dois espaços topológicos X, Y são *homotopicamente equivalentes*, ou possuem o mesmo *tipo de homotopia*, se existem $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ funções contínuas tais que

$$g \circ f \simeq id_X, f \circ g \simeq id_Y.$$

Se X possui o mesmo tipo de homotopia que um ponto, dizemos que X é *contrátil*.

Já foi demonstrado que se dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos, então suas homologias singulares são isomorfas. Observe que, se X e Y são homeomorfos e $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é contínua e $f^{-1} \circ f = id_X$ e $f \circ f^{-1} = id_Y$. Portanto, X e Y são homotopicamente equivalentes. Apesar da recíproca não ser válida, possuir o mesmo tipo de homotopia é suficiente para que os grupos de homologia sejam isomorfos, o que é consequência do teorema a seguir.

Teorema 1.1.12. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Se f e g são homotópicas, então $(f_*)_k = (g_*)_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Consideremos primeiro $\Delta^k \times I$. Podemos pensar em Δ^k como um “hipertriângulo de dimensão k ”, dentro de \mathbb{R}^{k+1} . Quando fazemos o produto cartesiano com I , estamos obtendo um sólido de dimensão $k+1$ dentro de \mathbb{R}^{k+2} que pode ser interpretado da seguinte maneira: duas cópias de Δ^k , que são $\Delta^k \times \{0\} = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ e $\Delta^k \times \{1\} = [w_0, w_1, \dots, w_k]$ (base e topo), com retas de ponto inicial $\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i$ e final $\sum_{i=0}^k \lambda_i w_i$, onde λ_i são os coeficientes permitidos na definição de Δ^k .

Considere $\Delta^1 \times I$. Este é um retângulo, com base e topo Δ^1 , e lados I . Podemos escrevê-lo como união de dois triângulos, que são 2-simplexos, utilizando a diagonal do retângulo. Se denotarmos a base Δ^1 por $[v_0, v_1]$ e o topo por $[w_0, w_1]$, uma descrição possível desses 2-simplexos é $[v_0, w_0, w_1]$ e $[v_0, v_1, w_1]$. Mais geralmente, por um raciocínio análogo, $\Delta^k \times I = \cup_{i=0}^k [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, w_{i+1}, \dots, w_k]$, ou seja, estamos decompondo $\Delta^k \times I$ em uma união de $(k+1)$ -simplexos.

Assim, se $F : X \times I \rightarrow Y$ é a homotopia entre f e g e $\sigma \in X_s^{\Delta^k}$, podemos fazer a composição $F \circ (\sigma \times id_I) : \Delta^k \times I \rightarrow Y$ e definir o homomorfismo $P_k : S_k(X) \rightarrow S_{k+1}(Y)$ como

$$P_k(\alpha) = P_k\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=0}^k (-1)^i F \circ (\sigma \times id_I) \upharpoonright_{[v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k]}$$

para $\alpha = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_j \in S_k(X)$. Nosso objetivo inicial é mostrar que $\partial_{k+1}^Y P_k + P_{k-1} \partial_k^X = \bar{g}_k - \bar{f}_k$, onde $\bar{f}_k, \bar{g}_k : S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$ são os homomorfismos introduzidos na Proposição 1.1.9. Definindo $h_k = \bar{g}_k - \bar{f}_k$, temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^X} & S_k(X) & \xrightarrow{\partial_k^X} & S_{k-1}(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow h_{k+1} & \swarrow P_k & \downarrow h_k & \swarrow P_{k-1} & \downarrow h_{k-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^Y} & S_k(Y) & \xrightarrow{\partial_k^Y} & S_{k-1}(Y) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Calculemos $\partial_{k+1}^Y P_k$ em $\sigma \in X_s^{\Delta^k}$:

$$\begin{aligned} \partial_{k+1}^Y (P_k(\sigma)) &= \partial_{k+1}^Y \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i F \circ (\sigma \times id_I) \upharpoonright_{[v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k]} \right) \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times id_I) \circ \phi_j^k \upharpoonright_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k]} \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times id_I) \circ \phi_j^k \upharpoonright_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k]} \end{aligned}$$

onde o sinal $(-1)^{j+1}$ aparece pelo mesmo motivo que na Proposição 1.1.5. Os termos com $i = j$ de um somatório cancelam com os do outro (num deles temos $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, w_i, \dots, w_k]$ e retiramos v_i com ϕ_i^k , e no outro temos $[v_0, \dots, v_{i-1}, w_{i-1}, w_i, \dots, w_k]$ e retiramos w_{i-1} com ϕ_i^k), com exceção de $F \circ (\sigma \times id_I) \circ \phi_0^k \upharpoonright_{[v_0, w_0, \dots, w_k]}$ e $-F \circ (\sigma \times id_I) \circ \phi_{k+2}^k \upharpoonright_{[v_0, v_1, \dots, v_k, w_k]}$. Note que, no primeiro destes,

como há a composição com ϕ_0^k restrito a $[v_0, w_0, \dots, w_k]$, temos na verdade $F \circ (\sigma \times id_I)$ restrito a $[w_0, \dots, w_k]$, que é o topo do nosso sólido, ou seja, $F \circ (\sigma \times id_I) \upharpoonright_{[w_0, \dots, w_k]} = F(\sigma, 1) = g \circ \sigma = \bar{g}_k(\sigma)$. Analogamente, $-F \circ (\sigma \times id_I) \circ \phi_{k+2}^k \upharpoonright_{[v_0, v_1, \dots, v_k, w_k]} = -\bar{f}_k(\sigma)$. Assim:

$$\begin{aligned} \partial_{k+1}^Y(P_k(\sigma)) &= \bar{g}_k - \bar{f}_k \\ &+ \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times id_I) \circ \phi_j^k \upharpoonright_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k]} \\ &+ \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times id_I) \circ \phi_j^k \upharpoonright_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k]} \\ &= \bar{g}_k - \bar{f}_k - P_{k-1} \partial_k^X, \end{aligned}$$

como desejávamos. Pela linearidade das funções envolvidas, estendemos a relação para todo $S(X)$. Finalmente, tome $[\alpha]$ classe de homologia de $H_k(X)$. Então $\alpha \in \ker \partial_k^X$, e pelo resultado acima,

$$\begin{aligned} \partial_{k+1}^Y(P_k(\alpha)) + P_{k-1} \partial_k^X(\alpha) &= \bar{g}_k(\alpha) - \bar{f}_k(\alpha) \\ \partial_{k+1}^Y(P_k(\alpha)) &= \bar{g}_k(\alpha) - \bar{f}_k(\alpha), \end{aligned}$$

já que $\partial_k^X \alpha = 0$. Assim, $\bar{g}_k(\alpha) - \bar{f}_k(\alpha) \in \text{Im } \partial_{k+1}^Y$, logo as classes de homologia em $H_k(Y)$, $(g_*)_k(\alpha) = [\bar{g}_k(\alpha)]$ e $(f_*)_k(\alpha) = [\bar{f}_k(\alpha)]$ são iguais qualquer que seja $[\alpha] \in H_k(X)$, ou seja, $(g_*)_k = (f_*)_k$. \square

Corolário 1.1.13. *Dois espaços homotopicamente equivalentes possuem grupos de homologia isomorfos.*

Demonstração. Suponha X, Y espaço topológicos homotopicamente equivalentes. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ com $f \circ g \simeq id_X$ e $g \circ f \simeq id_Y$. Segue do teorema anterior que os homomorfismos induzidos satisfazem $g_* \circ f_* = id_{H(X)}$ e $f_* \circ g_* = id_{H(Y)}$. \square

Exemplo 1.1.14. \mathbb{R}^n é contrátil pois $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $H(x, t) = (1-t)x$ é uma homotopia entre \mathbb{R}^n e a origem. Segue do Corolário 1.1.13 que $H_i(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$

1.2 Homologia de Complexos de Cadeias

Na seção anterior, utilizamos o par $(S(X), \partial)$ para calcular a homologia singular do espaço topológico X . Nesta seção, veremos que este par é um exemplo do que chamamos de complexo de cadeias. Intimamente relacionadas aos complexos de cadeias, outro conceito importante é o das seqüências exatas. Estes dois objetos são o foco desta seção, cujas referências são [8], [10] e [15].

1.2.1 Sequências Exatas

Definição 1.2.1. Uma *sequência exata* é uma família de grupos $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ com homomorfismos $f_k : A_k \rightarrow A_{k-1}$ tais que $\ker f_k = \text{Im } f_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$\cdots \longrightarrow A_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}} A_k \xrightarrow{f_k} A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} A_{k-2} \longrightarrow \cdots$$

Dados A, B e C grupos, uma sequência exata *curta* é uma sequência da forma

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0$$

que é exata onde possível, ou seja:

- $\text{Im } f = \ker g$;
- $\text{Im } 0 = \ker f$, em outras palavras, f é injetiva;
- $\text{Im } g = \ker 0$, portanto g é sobrejetiva.

Observamos que, no caso acima, como temos $B/\ker g \cong C$ pelo primeiro teorema do homomorfismo, $A \cong \text{Im } f$ pela injetividade de f e $\text{Im } f = \ker g$ por hipótese, vale $B/A \cong C$. Consequentemente, uma sequência exata curta é simplesmente um grupo abeliano B , um subgrupo A e o quociente B/A juntamente com suas aplicações. Este fato nos garante uma maneira de construir sequências exatas curtas a partir de uma dada sequência exata. De fato, considere a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Tomando $B = C_k$, temos que $C_k/\text{Im } d_{k+1} = C_k/\ker d_k \cong \text{Im } d_k = \ker d_{k-1}$, assim, a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Im } d_{k+1} \xrightarrow{f} C_k \xrightarrow{g} \ker d_{k-1} \longrightarrow 0$$

onde f é a inclusão e g é d_k com restrição no contradomínio, é uma sequência exata curta. Note que poderíamos também ter usado que $C_{k+1}/\ker d_{k+1} \cong \text{Im } d_{k+1}$.

Proposição 1.2.2. *Sejam A, B e C grupos. Considere a sequência exata curta*

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0.$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Existe um subgrupo D de B tal que $B = f(A) \oplus D$;
2. Existe um mapa linear $p : B \rightarrow A$ satisfazendo $p \circ f = \text{id}_A$;

3. Existe um mapa linear $q : C \rightarrow B$ satisfazendo $g \circ q = id_C$.

Demonstração. (1) \Rightarrow (2): Como $B = f(A) \oplus D$, podemos definir $\pi_f : B \rightarrow f(A)$ como a projeção natural. Assim, defina $p : B \rightarrow A$ como $p(\alpha) = f^{-1}(\pi_f(\alpha))$. A função está bem definida pelo fato de f ser injetiva, e como $\pi_f(f(a)) = f(a)$, $a \in A$, segue que $p \circ f(a) = f^{-1}(\pi_f(f(a))) = f^{-1}(f(a)) = id_A$. Lembrando que se f é homomorfismo injetivo, $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ é isomorfismo, portanto linear, e como projeção também é linear, segue que p é linear.

(2) \Rightarrow (1): Suponha $p : B \rightarrow A$ linear tal que $p \circ f = id_A$. Mostraremos que $B = f(A) \oplus \ker p$. Temos que $f(A) \cap \ker p = \{0\}$ pois, se $a \in A$ é tal que $f(a) \in \ker p$ então $a = id_A(a) = p \circ f(a) = 0$. Agora, se $b \in B$, podemos escrever

$$b = f \circ p(b) + b - f \circ p(b),$$

onde $f \circ p(b) = f(p(b)) \in f(A)$ e $p(b - f(p(b))) = p(b) - p \circ f(p(b)) = p(b) - id_A(p(b)) = 0$, ou seja, $b - f \circ p(b) \in \ker p$, como desejávamos.

(1) \Rightarrow (3): Lembrando que $f(A) = \ker g$, temos que $g|_D$ é isomorfismo, portanto, tome $q = (g|_D)^{-1}$.

(3) \Rightarrow (1): Supondo $q : C \rightarrow B$ satisfazendo (3), mostraremos que $B = f(A) \oplus \text{Im } q$. Usando novamente que $f(A) = \ker g$, dado $b \in f(A) \cap \text{Im } q$, $b = q(c)$ e $0 = g(b) = g \circ q(c) = c$. Desta forma, $b = q(0) = 0$. Tomando $b \in B$, temos que $b = b - q(g(b)) + q(g(b))$, onde $q(g(b)) \in \text{Im } q$ e $g(b - q(g(b))) = g(b) - g \circ q(g(b)) = 0$, logo, $b - q(g(b)) \in \ker g = f(A)$. \square

Se, nas condições acima, C for um grupo livre com geradores $\{c_i\}_{i \in J}$, podemos escolher $\{b_i\}_{i \in J} \subseteq B$ tal que $g(b_i) = c_i$ (já que g é sobrejetora), e definir $q : C \rightarrow B$ como a extensão linear de $q(c_i) = b_i$. Já que $g \circ q = id$ nos geradores (e portanto, em todo o C), vale a condição (3) da proposição, e conseqüentemente, valem também (1) e (2).

Proposição 1.2.3. *Considere as seqüências*

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0 \quad (1.2.1)$$

e

$$0 \xrightarrow{0} A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{0} 0. \quad (1.2.2)$$

Suponha que existem isomorfismos $\alpha : A \rightarrow A'$, $\beta : B \rightarrow B'$ e $\gamma : C \rightarrow C'$ e que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Se a seqüência (1.2.1) é uma seqüência exata curta então a seqüência (1.2.2) também é uma seqüência exata curta.

Demonstração. Como o diagrama comuta, $f' \circ \alpha = \beta \circ f$, e como α é isomorfismo, α^{-1} também o é, e assim $f' = \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$. A injetividade de f' segue da injetividade de f . Da mesma forma, $g' = \gamma \circ g \circ \beta^{-1}$, e temos a sobrejetividade de g' .

Queremos mostrar que $\ker g' = \text{Im } f'$. Tome $b \in \ker g'$. Então $\beta^{-1}(b) \in \ker g$, e portanto existe $a \in A$ tal que $f(a) = \beta^{-1}(b)$, ou seja, $\beta(f(a)) = b$. Mas $\beta \circ f = f' \circ \alpha$, logo $b = f' \circ \alpha(a) = f'(a')$, para algum $a' \in A'$, ou seja, $b \in \text{Im } f'$, e portanto vale a inclusão $\ker g' \subseteq \text{Im } f'$.

Tome agora $f'(a') \in \text{Im } f'$, $a' \in A'$. Como α é isomorfismo, existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = a'$. De $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ temos $\beta^{-1} \circ f' = f \circ \alpha^{-1}$ e, portanto, $\beta^{-1}(f'(a')) = f(\alpha^{-1}(a')) = f(a) \in \text{Im } f$. Como (1.2.1) é exata e $g' = \gamma \circ g \circ \beta^{-1}$, temos $g'(f'(a')) = \gamma \circ (g(\beta^{-1}(f'(a')))) = \gamma \circ g(f(a)) = \gamma(0) = 0$, logo $f'(a') \in \ker g'$. Concluimos que $\text{Im } f' \subseteq \ker g'$. \square

Proposição 1.2.4. *Considere a seguinte sequência exata*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \cdots & \longrightarrow & E_{k+1} & \longrightarrow & \\
 & & & & \gamma_{k+1} & & \\
 & \longleftarrow & C_k & \xrightarrow{f_k} & D_k & \xrightarrow{g_k} & E_k & \longrightarrow \\
 & & & & \gamma_k & & \\
 & \longleftarrow & C_{k-1} & \xrightarrow{f_{k-1}} & D_{k-1} & \xrightarrow{g_{k-1}} & E_{k-1} & \longrightarrow \\
 & & & & \gamma_{k-1} & & \\
 & \longleftarrow & C_{k-2} & \longrightarrow & \cdots & &
 \end{array}$$

onde C_k, D_k, E_k são grupos abelianos livres finitamente gerados e f_k, g_k, γ_{k+1} são homomorfismos, para todo $k \geq 0$. Escrevendo o polinômio $p_{\mathcal{C}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\dim C_k) t^k$ e analogamente para $p_{\mathcal{D}}(t)$ e $p_{\mathcal{E}}(t)$, vale que

$$p_{\mathcal{C}}(t) + p_{\mathcal{E}}(t) = p_{\mathcal{D}}(t) + (1+t)Q(t),$$

onde

$$Q(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \dim(\text{Im } \gamma_{k+1}) t^k$$

é um polinômio com coeficientes não negativos. Além disso, se $D_k = C_k \oplus E_k$ para todo $k \geq 0$, então $Q(t) \equiv 0$.

Demonstração. Como todos os grupos são livres e finitamente gerados, vale que $\dim C_k = \dim \ker f_k + \dim \text{Im } f_k$, $\dim D_k = \dim \ker g_k + \dim \text{Im } g_k$ e $\dim E_k = \dim \ker \gamma_k + \dim \text{Im } \gamma_k$. Como a sequência

é exata, $\ker f_k = \text{Im } \gamma_{k+1}$, $\text{Im } f_k = \ker g_k$ e $\text{Im } g_k = \ker \gamma_k$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\dim C_k &= \dim \ker f_k + \dim \text{Im } f_k \\
&= \dim \text{Im } \gamma_{k+1} + \dim \ker g_k \\
&= \dim \text{Im } \gamma_{k+1} + \dim D_k - \dim \text{Im } g_k \\
&= \dim \text{Im } \gamma_{k+1} + \dim D_k - \dim \ker \gamma_k \\
&= \dim \text{Im } \gamma_{k+1} + \dim D_k - (\dim E_k - \dim \text{Im } \gamma_k) \\
&= \dim \text{Im } \gamma_{k+1} + \dim D_k - \dim E_k + \dim \text{Im } \gamma_k
\end{aligned}$$

e concluimos

$$\dim \text{Im } \gamma_{k+1} + \dim \text{Im } \gamma_k = \dim C_k - \dim D_k + \dim E_k.$$

Multiplicando esta equação por t^k , somando as equações para todo $k \geq 0$ e definindo $\gamma_0 : E_0 \rightarrow C_{-1} = 0$ como a função nula, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \dim \text{Im } \gamma_{k+1} t^k + \sum_{k \geq 0} \dim \text{Im } \gamma_k t^k &= \sum_{k \geq 0} \dim C_k t^k - \sum_{k \geq 0} \dim D_k t^k + \sum_{k \geq 0} \dim E_k t^k \\
Q(t) + t \left(Q(t) + \frac{\dim \text{Im } \gamma_0}{t} \right) &= p_{\mathcal{C}}(t) - p_{\mathcal{D}}(t) + p_{\mathcal{E}}(t)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$p_{\mathcal{E}}(t) + p_{\mathcal{E}}(t) = p_{\mathcal{D}}(t) + (1+t)Q(t),$$

como desejado. Agora, supondo $D_k = C_k \oplus E_k$ qualquer que seja k , temos $\dim D_k = \dim C_k + \dim E_k$, logo, $p_{\mathcal{D}}(t) = p_{\mathcal{C}}(t) + p_{\mathcal{E}}(t)$, e concluimos $(1+t)Q(t) = 0$, que implica $Q(t) \equiv 0$. \square

1.2.2 Complexos de Cadeias

Nessa seção será introduzido formalmente um conceito de homologia de complexo de cadeias, que generaliza homologia singular. Note que a Definição 1.2.5 já apareceu no caso específico do par $(S(X), \partial)$.

Definição 1.2.5. Chamamos de *complexo de cadeias* um par (\mathcal{C}, d) , onde \mathcal{C} é um grupo (\mathbb{Z} -módulo) graduado $\mathcal{C} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k$, e $d : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ é um homomorfismo com as propriedades $d[C_k] \subseteq C_{k-1}$ e $d^2 \equiv 0$. Denotamos a restrição $d|_{C_k} : C_k \rightarrow C_{k-1}$ por d_k .

A nomenclatura neste contexto é a mesma que a utilizada no contexto das cadeias singulares: elementos de C_k são chamados cadeias e elementos de $\ker d$ e $\text{Im } d$ são denominados, respectivamente, ciclos e bordos. Novamente, $d^2 = 0$ nos diz que $\ker d \subseteq \text{Im } d$. Note que, com isso, é possível definir homologia de um complexo de cadeias sem um espaço topológico como ponto de partida, como foi feito na definição de homologia singular. Se (\mathcal{C}, d) , onde $\mathcal{C} = \bigoplus_{k \geq 0} C_k$, é um complexo

de cadeias, denotaremos:

$Z_k(\mathcal{C}) := C_k \cap \ker d$ o conjunto de todos os k -ciclos,

$B_k(\mathcal{C}) := C_k \cap \text{Im } d$ o conjunto dos k -bordos,

$H_k(\mathcal{C}) := Z_k(\mathcal{C})/B_k(\mathcal{C})$ o k -ésimo grupo de homologia de \mathcal{C} .

Definição 1.2.6. Sejam (\mathcal{C}, d_C) , $\mathcal{C} = \bigoplus_{k \geq 0} C_k$ e (\mathcal{D}, d_D) , $\mathcal{D} = \bigoplus_{k \geq 0} D_k$, complexos de cadeias. Dizemos que $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma *aplicação de cadeia* se f é linear, $f[C_k] \subseteq D_k$ e

$$d_D \circ f = f \circ d_C.$$

A definição acima diz que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_C} & C_{k+1} & \xrightarrow{d_C} & C_k & \xrightarrow{d_C} & C_{k-1} & \xrightarrow{d_C} & \cdots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ \cdots & \xrightarrow{d_D} & D_{k+1} & \xrightarrow{d_D} & D_k & \xrightarrow{d_D} & D_{k-1} & \xrightarrow{d_D} & \cdots \end{array}$$

Proposição 1.2.7. Se $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma aplicação de cadeia então as funções $(f_*)_k : H_k(\mathcal{C}) \rightarrow H_k(\mathcal{D})$ definidas como

$$(f_*)_k([a]) = [f(a)],$$

para $a \in Z_k(\mathcal{C})$, são homomorfismos induzidos por f .

Note que, na demonstração da Proposição 1.1.9, usamos que a função era contínua entre dois espaços topológicos, onde faz sentido falar disto, apenas para obter uma função linear entre os grupos que formam o complexo de cadeias. Como nesse caso f já é linear, a demonstração da Proposição 1.2.7 é análoga à demonstração da Proposição 1.2.7.

Definição 1.2.8. Sejam $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ mapas de cadeia. Uma *homotopia de cadeia* entre f e g é um conjunto de funções $P_k : C_k \rightarrow D_{k+1}$ satisfazendo

$$d_D \circ P_k + P_{k-1} \circ d_C = f - g$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1.2.9. Sejam $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ aplicações de cadeia. Se existe uma homotopia de cadeia entre f e g , então $(f_*)_k = (g_*)_k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Mais uma vez, sob a luz das novas definições, vemos que, na demonstração do Teorema 1.1.12, criamos uma homotopia de cadeia para as funções em questão, e depois mostramos a igualdade dos homomorfismos induzidos nos grupos de homologia. Como a demonstração do Teorema 1.1.12 subsume a demonstração da Proposição 1.2.9, optamos por omitir esta última.

Dados complexos de cadeia \mathcal{C}, \mathcal{D} e \mathcal{E} , e funções $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, dizemos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D} \xrightarrow{g} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta se f e g são aplicações de cadeia e, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a sequência

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{f} D_k \xrightarrow{g} E_k \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta, com as devidas restrições de f e g . Sequências exatas curtas de complexos de cadeias são convertidas em sequências exatas em homologia, através dos próximos dois resultados.

Proposição 1.2.10. *Sejam $(\mathcal{C}, d_C), (\mathcal{D}, d_D)$ e (\mathcal{E}, d_E) complexos de cadeias, $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ aplicações de cadeia tais que*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D} \xrightarrow{g} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta. Então

$$H_k(\mathcal{C}) \xrightarrow{(f_*)_k} H_k(\mathcal{D}) \xrightarrow{(g_*)_k} H_k(\mathcal{E})$$

é uma sequência exata para todo k , ou seja, $\text{Im}(f_)_k = \ker(g_*)_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Primeiramente, note que ambas as linhas a seguir são sequências exatas curtas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{f} & D_{k+1} & \xrightarrow{g} & E_{k+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_C & & \downarrow d_D & & \downarrow d_E & & \\ 0 & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{f} & D_k & \xrightarrow{g} & E_k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De fato, como f é injetiva, restrições desta também o são. De $f[C_k] \subseteq D_k$ e $\text{Im } f = \ker g$ temos que $\text{Im } f|_{C_k} = \ker g|_{D_k}$. Como também vale que $g[D_k] \subseteq E_k$ e g é sobrejetiva, temos que cada restrição de g também é sobrejetiva.

Queremos mostrar que, se $(f_*)_k : H_k(\mathcal{C}) \rightarrow H_k(\mathcal{D})$ e $(g_*)_k : H_k(\mathcal{D}) \rightarrow H_k(\mathcal{E})$ são os homomorfismos induzidos por f e g , então $\text{Im}(f_*)_k = \ker(g_*)_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Tome $[\alpha] \in \text{Im}(f_*)_k$, $[\alpha] \in H_k(\mathcal{D})$, $\alpha \in D_k$. Então existe $\beta \in C_k$ tal que $(f_*)_k[\beta] = [\alpha]$. Logo,

$$\begin{aligned} (g_*)_k[\alpha] &= (g_*)_k \circ (f_*)_k[\beta] \\ &= (g_*)_k[f(\beta)] \\ &= [g \circ f(\beta)] \\ &= [0], \end{aligned}$$

já que $\ker g = \operatorname{Im} f$. Logo, $\operatorname{Im} (f_*)_k \subseteq \ker (g_*)_k$.

Reciprocamente, seja $[\alpha] \in \ker (g_*)_k$, onde $\alpha \in D_k$, $[\alpha] \in H_k(\mathcal{D})$. Então $(g_*)_k [\alpha] = [g(\alpha)] = [0]$, ou seja, $g(\alpha) \in \operatorname{Im} d_E$. Seja $\beta \in E_{k+1}$ tal que $g(\alpha) = d_E(\beta)$. Como $g : D_{k+1} \rightarrow E_{k+1}$ é sobrejetiva, então existe $\gamma \in D_{k+1}$ tal que $\beta = g(\gamma)$. Como g é mapa de cadeia, $g(\alpha) = d_E(g(\gamma)) = g(d_D(\gamma))$, e usando que g é linear, $g(\alpha - d_D(\gamma)) = 0$. Logo, $\alpha - d_D(\gamma) \in \ker g$.

Como $\ker g = \operatorname{Im} f$, existe $\theta \in C_k$ tal que $f(\theta) = \alpha - d_D(\gamma)$. Olhando para as classes de homologia,

$$\begin{aligned} (f_*)_k [\theta] &= [f(\theta)] \\ &= [\alpha - d_D(\gamma)] \\ &= [\alpha] - [d_D(\gamma)] \\ &= [\alpha]. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha \in \operatorname{Im} (f_*)_k$, e concluímos que $\operatorname{Im} (f_*)_k \supseteq \ker (g_*)_k$. □

Tendo em vista a proposição anterior, para que tenhamos uma sequência exata em homologia, são necessários homomorfismos $\delta_k : H_{k+1}(\mathcal{E}) \rightarrow H_k(\mathcal{C})$. Estes, obtidos no teorema a seguir, são chamados *homomorfismos de conexão*. Além de serem importantes em topologia algébrica, como o Teorema 1.3.11, também surgem em aplicações, sendo a importante função Δ_k definida no Capítulo 3. Os homomorfismos de conexão surgem naturalmente da sequência exata curta; o tipo de demonstração usada para a definição dos homomorfismos é conhecido como “perseguir o diagrama”, neste caso, o Diagrama 1.2.3.

Teorema 1.2.11. (*Zig-zag Lemma*) *Para toda sequência exata curta de complexos de cadeias \mathcal{C} , \mathcal{D} e \mathcal{E}*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D} \xrightarrow{g} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

existem homomorfismos $\delta_k : H_k(\mathcal{E}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{C})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ tais que a seguinte sequência é exata:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & H_{k+1}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \\ & & & & \delta_{k+1} & & & & \\ \longleftarrow & & & & & & & & \\ & \longrightarrow & H_k(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(f_*)_k} & H_k(\mathcal{D}) & \xrightarrow{(g_*)_k} & H_k(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \\ & & & & \delta_k & & & & \\ \longleftarrow & & & & & & & & \\ & \longrightarrow & H_{k-1}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(f_*)_{k-1}} & H_{k-1}(\mathcal{D}) & \xrightarrow{(g_*)_{k-1}} & H_{k-1}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \\ & & & & \delta_{k-1} & & & & \\ \longleftarrow & & & & & & & & \\ & \longrightarrow & H_{k-2}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \cdots & & & & \end{array}$$

Demonstração. Da proposição anterior, obtemos $(f_*)_k$ e $(g_*)_k$. Basta encontrarmos $\delta_k : H_k(\mathcal{E}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{C})$ tal que $\ker \delta_k = \operatorname{Im} (g_*)_k$ e $\operatorname{Im} \delta_k = \ker (f_*)_{k-1}$. A sequência exata curta dos complexos de

cadeia fornece o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{f} & D_{k+1} & \xrightarrow{g} & E_{k+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_C & & \downarrow d_D & & \downarrow d_E \\
 0 & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{f} & D_k & \xrightarrow{g} & E_k \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_C & & \downarrow d_D & & \downarrow d_E \\
 0 & \longrightarrow & C_{k-1} & \xrightarrow{f} & D_{k-1} & \xrightarrow{g} & E_{k-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array} \tag{1.2.3}$$

Intuitivamente, podemos tentar conectar E_k e C_{k-1} “forçando” um caminho no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & C_k & & D_k & \xleftarrow{g^{-1}} & E_k \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow d_D & & \\
 0 & \longrightarrow & C_{k-1} & \xleftarrow{f^{-1}} & D_{k-1} & & E_{k-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Claro, f e g não são necessariamente inversíveis. Ainda assim, essa ideia é um guia para a demonstração: essa composição faz sentido quando consideradas as classes de homologia. Prossequimos para a definição formal do homomorfismo de conexão.

Seja $\eta \in Z_k(\mathcal{E}) \subseteq E_k$. Sabemos que $g|_{D_k}$ é sobrejetiva, então existe $\beta \in D_k$ tal que $\beta \in g^{-1}(\eta)$. Considere $d_D(\beta) \in D_{k-1}$. Temos que $d_D(\beta) \in \ker g$. De fato,

$$\begin{aligned}
 g(d_D(\beta)) &= g \circ d_D(\beta) \\
 &= d_E \circ g(\beta) \\
 &= d_E(g(\beta)) \\
 &= d_E(\eta) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

já que $\eta \in Z_k(\mathcal{E})$, que é precisamente $\ker d_E \cap E_k$. Logo, $d_D(\beta) \in \ker g = \text{Im } f$ e, portanto, existe $\alpha \in C_{k-1}$ tal que $f(\alpha) = d_D(\beta)$. Como f é injetiva, $\alpha = f^{-1} \circ d_D(\beta)$. Definimos $\delta_k : H_k(\mathcal{E}) \rightarrow$

$H_{k-1}(\mathcal{C})$ como $\delta_k([\eta]) = [\alpha]$.

Note que utilizamos $\beta \in g^{-1}(\eta)$, e este conjunto não precisa necessariamente ser unitário. Para que δ_k esteja bem definida, devemos mostrar que, se $\beta_1, \beta_2 \in g^{-1}(\eta)$, então $[f^{-1} \circ d_D(\beta_1)] = [f^{-1} \circ d_D(\beta_2)]$. Como $g(\beta_1) = g(\beta_2) = \eta$, temos que $g(\beta_1 - \beta_2) = 0$, logo, $(\beta_1 - \beta_2) \in \text{Im } f$. Seja $\gamma \in C_k$ tal que $f(\gamma) = \beta_1 - \beta_2$. Como $d_D(\beta_1), d_D(\beta_2) \in \text{Im } f$ e usando que $f^{-1} : \text{Im } f \rightarrow \mathcal{C}$ também é linear, temos:

$$\begin{aligned} & [f^{-1} \circ d_D(\beta_1)] - [f^{-1} \circ d_D(\beta_2)] \\ &= [f^{-1} \circ d_D(\beta_1 - \beta_2)] \\ &= [f^{-1} \circ d_D \circ f(\gamma)] \\ &= [f^{-1} \circ f \circ d_C(\gamma)] \\ &= [d_C(\gamma)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

como desejado.

Como estamos tratando de classes de equivalência, devemos ter o mesmo valor da aplicação se escolhermos representantes diferentes de uma mesma classe no domínio, ou seja, se $\eta_1, \eta_2 \in Z_k(\mathcal{C})$ com $[\eta_1] = [\eta_2]$ então devemos ter $\delta_k([\eta_1]) = \delta_k([\eta_2])$. Tome então $\eta_1, \eta_2 \in Z_k(\mathcal{C})$ tais que $[\eta_1] = [\eta_2]$. Temos que $\eta_1 - \eta_2 = d_E(\sigma) \in \text{Im } d_E$, onde $\sigma \in E_{k+1}$. Como $g \upharpoonright_{D_{k+1}}$ é sobrejetiva, seja $\alpha \in D_{k+1}$ tal que $g(\alpha) = \sigma$. Assim, $\eta_1 - \eta_2 = d_E(g(\alpha)) = g(d_D(\alpha))$. Então $d_D(\alpha) \in g^{-1}(\eta_1 - \eta_2)$ e, tomando $\beta_1 \in g^{-1}(\eta_1)$, $\beta_2 \in g^{-1}(\eta_2)$ temos que $\beta_1 - \beta_2 \in g^{-1}(\eta_1 - \eta_2)$. Assim:

$$\begin{aligned} & [f^{-1} \circ d_D(\beta_1)] - [f^{-1} \circ d_D(\beta_2)] \\ &= [f^{-1} \circ d_D(\beta_1 - \beta_2)] \\ &= [f^{-1} \circ d_D(d_D(\alpha))] \\ &= [f^{-1}(0)] \\ &= [0]. \end{aligned}$$

Finalmente concluímos que δ_k está bem definida. Como todas as funções envolvidas são lineares, temos que δ_k também o é. Resta mostrar que $\text{Im } \delta_{k+1} = \ker(f_*)_k$ e $\text{Im } (g_*)_{k+1} = \ker \delta_{k+1}$.

Para a inclusão $\text{Im } \delta_{k+1} \subseteq \ker(f_*)_k$, note que, se $[\alpha] \in H_k(\mathcal{C})$ é tal que $[\alpha] = [f^{-1} \circ d_D(\beta)]$ para algum $\beta \in D_{k+1}$, então $(f_*)_k [\alpha] = [f \circ \alpha] = [f \circ f^{-1} \circ d_D(\beta)] = [d_D(\beta)] = [0]$ o que implica $[\alpha] \in \ker(f_*)_k$. Reciprocamente, suponha $[\alpha] \in \ker(f_*)_k$. Então $[0] = (f_*)_k [\alpha] = [f(\alpha)]$, logo, $f(\alpha) \in \text{Im } d_D$. Sendo β tal que $d_D(\beta) = f(\alpha)$, temos que $g(\beta)$ é tal que $\delta_{k+1}[g(\beta)] = [\alpha]$, pois $\delta_{k+1}[g(\beta)] = [f^{-1} \circ d_D(\beta)] = [f^{-1} \circ f(\alpha)] = [\alpha]$. Consequentemente $[\alpha] \in \text{Im } \delta_{k+1}$ e concluímos $\text{Im } \delta_{k+1} = \ker(f_*)_k$.

Tome $[\alpha] \in \text{Im}(g_*)_{k+1}$. Então existe $\beta \in Z_{k+1}(\mathcal{D})$ tal que $(g_*)_{k+1}[\beta] = [\alpha]$. Assim, se $\gamma \in g^{-1}(\alpha)$, vale que $[\beta] = [\gamma]$. Como $d_D(\beta) = 0$:

$$\begin{aligned}\delta_{n+1}[\alpha] &= [f^{-1} \circ d_D(\gamma)] \\ &= [f^{-1} \circ d_D(\beta)] \\ &= [f^{-1}(0)] \\ &= [0]\end{aligned}$$

e temos a inclusão $\text{Im}(g_*)_{k+1} \subseteq \ker \delta_{k+1}$. Suponha agora que $[\alpha] \in \ker \delta_{k+1}$. Da construção de δ_{k+1} , temos que $\delta_{k+1}[\alpha] = [a]$, com $a \in C_k$ tal que $f(a) = d_C(\gamma)$ para algum $\gamma \in g^{-1}(\alpha)$. Como $\delta_{k+1}[\alpha] = [0]$, $a = d_C(\beta)$ para algum $\beta \in C_{k+1}$, e temos:

$$d_D(\gamma) = f(a) = f \circ d_C(\beta) = d_D \circ f(\beta)$$

e $d_D(\gamma - f(\beta)) = 0$, ou seja, $\gamma - f(\beta) \in Z_{k+1}(\mathcal{D})$. Da igualdade $\ker g = \text{Im } f$ segue que $g \circ f = 0$, assim,

$$\alpha = g(\gamma) = g(\gamma) - 0 = g(\gamma) - g(f(\beta)) = g(\gamma - f(\beta)).$$

Portanto, $(g_*)_{k+1}[\gamma - f(\beta)] = [\alpha]$. □

Corolário 1.2.12. *Seja a sequência exata curta de complexos de cadeias \mathcal{C} , \mathcal{D} e \mathcal{E}*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D} \xrightarrow{g} \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Suponha que C_k, D_k, E_k sejam grupos abelianos livres finitamente gerados. Então

$$p_{\mathcal{C}}(t) + p_{\mathcal{E}}(t) = p_{\mathcal{D}}(t) + (1+t)Q(t),$$

onde $p_{\mathcal{C}}(t), p_{\mathcal{D}}(t)$ e $p_{\mathcal{E}}(t)$ são polinômios definidos na Proposição 1.2.4, $Q(t)$ é um polinômio com coeficientes não negativos e $D_k = C_k \oplus E_k$ para todo $k \geq 0$ implica $Q(t) = 0$.

Demonstração. Aplique o Teorema 1.2.11 para obter uma sequência exata. Tal sequência está nas hipóteses da Proposição 1.2.4, e o resultado segue. □

Além de converter sequências exatas curtas de complexos de cadeia para sequências exatas em homologia, os homomorfismos de conexão também garantem que morfismos de sequências exatas curtas são transportados para o âmbito homológico, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 1.2.13. *Suponha que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & \mathcal{D} & \xrightarrow{g} & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{D}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{E}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

seja comutativo, onde as linhas são seqüências exatas curtas de complexos de cadeia e α, β e γ são aplicações de cadeia. Então as seqüências exatas do Teorema 1.2.11 são tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_k(\mathcal{C}) & \xrightarrow{f_*} & H_k(\mathcal{D}) & \xrightarrow{g_*} & H_k(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\delta} & H_{k-1}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_k(\mathcal{C}') & \xrightarrow{f'_*} & H_k(\mathcal{D}') & \xrightarrow{g'_*} & H_k(\mathcal{E}') & \xrightarrow{\delta'} & H_{k-1}(\mathcal{C}') & \longrightarrow & \dots \end{array} \quad (1.2.4)$$

é comutativo.

Demonstração. Os dois primeiros quadrados do Diagrama 1.2.4 são comutativos, pois as funções comutam nos grupos de cadeia, antes de passarmos para homologia. Para mostrar que o último quadrado comuta, usaremos a definição dos homomorfismos de conexão.

Seja $[e] \in H_k(\mathcal{E})$. Tome $b \in D_k$ tal que $g(b) = e$. Se $c \in C_{k-1}$ é tal que $f(c) = d_D(b)$, por definição temos $\delta([e]) = [c]$. Nosso objetivo é mostrar que $\delta'(\gamma_*[e]) = \alpha_*[c]$ ou, equivalentemente, $\delta'([\gamma(e)]) = [\alpha(c)]$. Sejam $b' \in D'_k, c' \in C'_{k-1}$ tais que $g'(b') = \gamma(e)$ e $f'(c') = d_{D'}(b')$. Portanto, $\delta'([\gamma(e)]) = [c']$. Usando que $f' \circ \alpha = \beta \circ f$, $\beta \circ d_D = d_{D'} \circ \beta$, temos que

$$\begin{aligned} f'(c' - \alpha(c)) &= f'(c') - f'(\alpha(c)) \\ &= d_{D'}(b') - \beta(f(c)) \\ &= d_{D'}(b') - \beta(d_D(b)) \\ &= d_{D'}(b') - d_{D'}(\beta(b)) \\ &= d_{D'}(b' - \beta(b)). \end{aligned}$$

Note que $b' - \beta(b) \in \text{Im } f'$. De fato,

$$g'(b' - \beta(b)) = \gamma(e) - g' \circ \beta(b) = \gamma(e) - \gamma(g(b)) = \gamma(e) - \gamma(e) = 0$$

logo, $b' - \beta(b) \in \ker g' = \text{Im } f'$. Se $a \in C'_k$ é tal que $f'(a) = b' - \beta(b)$, segue que

$$f'(d_{C'}(a)) = d_{D'}(f'(a)) = d_{D'}(b' - \beta(b)) = f'(c' - \alpha(c)).$$

Como f' é injetiva, $d_{C'}(a) = c' - \alpha(c)$. Concluimos que $[\alpha(c)] = [c'] = \delta'([\gamma(e)])$, como desejado. \square

As próximas duas proposições, conhecidas respectivamente como *Lema dos Cinco Curto* e

Lema dos Cinco, são importantes propriedades de diagramas comutativos. A primeira no âmbito de sequências exatas curtas, enquanto a última trata de sequências exatas longas, comumente aplicada a sequências em homologia. Ambas demonstrações envolvem “perseguir o diagrama”.

Proposição 1.2.14. *Considere o diagrama comutativo, onde as linhas são sequências exatas curtas.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & \mathcal{D} & \xrightarrow{g} & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{D}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{E}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Se α e γ são isomorfismos, então β é isomorfismo.

Demonstração. Mostremos primeiramente a sobrejetividade de β . Seja $d' \in \mathcal{D}'$. Como γ é isomorfismo, γ^{-1} também o é. Sendo assim, considere $\gamma^{-1}(g'(d')) \in \mathcal{E}$. Do fato das sequências horizontais serem exatas curtas, temos que g é sobrejetiva, e portanto existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $g(d) = \gamma^{-1}(g'(d'))$. Como o diagrama comuta, temos que $g'(\beta(d)) = \gamma(g(d))$, e assim, $\gamma^{-1}(g'(\beta(d))) = g(d)$. Usando linearidade das funções envolvidas, temos que $\gamma^{-1}(g'(\beta(d) - d')) = 0$ o que implica $g'(\beta(d) - d') = 0$, já que γ^{-1} é isomorfismo. Logo, $\beta(d) - d' \in \ker g' = \text{Im } f'$. Usando este fato e que α é isomorfismo, tome $c \in \mathcal{C}$ tal que $f'(\alpha(c)) = \beta(d) - d'$. Temos que $(d - f(c)) \in \mathcal{D}$ é tal que $\beta(d - f(c)) = d'$. De fato, usando a comutatividade do diagrama,

$$\begin{aligned} \beta(d - f(c)) &= \beta(d) - \beta \circ f(c) \\ &= \beta(d) - f' \circ \alpha(c) \\ &= \beta(d) - (\beta(d) - d') \\ &= d', \end{aligned}$$

e concluímos que β é sobrejetiva.

Para mostrar a injetividade de β , tome $d \in \mathcal{D}$ tal que $\beta(d) = 0$. Então $g'(\beta(d)) = 0$ e, pela comutatividade do diagrama, $\gamma(g(d)) = 0$. Como γ é isomorfismo, $g(d) = 0$. Assim, $d \in \ker g = \text{Im } f$, e portanto existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $f(c) = d$. Usando novamente que o diagrama comuta, temos que $0 = \beta(d) = \beta(f(c)) = f'(\alpha(c))$. Como f' é injetiva, $\alpha(c) = 0$, e como α é isomorfismo, $c = 0$. Segue que $d = f(c) = 0$, concluindo a demonstração. \square

Proposição 1.2.15. *(Lema dos Cinco) Considere o diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E & \longrightarrow & \dots \\ & & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{f'_2} & C' & \xrightarrow{f'_3} & D' & \xrightarrow{f'_4} & E' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

onde as linhas são exatas e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ são isomorfismos. Então α_3 é isomorfismo.

Demonstração. Para provar a injetividade de α_3 , seja $c \in C$ tal que $\alpha_3(c) = 0$. Então $f'_3 \circ \alpha_3(c) = 0$. Pela comutatividade do diagrama, $0 = f'_3 \circ \alpha_3(c) = \alpha_4 \circ f_3(c)$. Como α_4 é isomorfismo, $f_3(c) = 0$ e, portanto, $c \in \ker f_3 = \text{Im } f_2$. Tome então $b \in B$ tal que $f_2(b) = c$. Usando mais uma vez a comutatividade, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_3(c) \\ &= \alpha_3 \circ f_2(b) \\ &= f'_2 \circ \alpha_2(b). \end{aligned}$$

Assim, $\alpha_2(b) \in \ker f'_2 = \text{Im } f'_1$. Seja $a \in A$ tal que $f'_1(\alpha_1(a)) = \alpha_2(b)$ (que existe por α_1 ser isomorfismo). Pela comutatividade do diagrama, $\alpha_2(f_1(a)) = f'_1(\alpha_1(a)) = \alpha_2(b)$ e, como α_2 é isomorfismo, $f_1(a) = b$. Então $b \in \text{Im } f_1 = \ker f_2$. Como $f_2(b) = c$, concluímos que $c = 0$, como desejado.

Para demonstrar a sobrejetividade de α_3 , tome $c' \in C'$. Então $f'_3(c') \in D'$, e existe $d \in D$ tal que $\alpha_4(d) = f'_3(c')$ (pois α_4 é isomorfismo). Como a segunda linha é exata e o diagrama comuta, $0 = f'_4(f'_3(c')) = f'_4(\alpha_4(d)) = \alpha_5(f_4(d))$. Como α_5 é isomorfismo, $f_4(d) = 0$, ou seja, $d \in \ker f_4 = \text{Im } f_3$. Seja $c \in C$ tal que $f_3(c) = d$. Usando a comutatividade do diagrama, $f'_3(\alpha_3(c)) = \alpha_4(f_3(c)) = \alpha_4(d) = f'_3(c')$. Por linearidade, $\alpha_3(c) - c' \in \ker f'_3 = \text{Im } f'_2$. Usando também que α_2 é isomorfismo, seja $b \in B$ tal que $f'_2(\alpha_2(b)) = \alpha_3(c) - c'$. O diagrama comuta, logo, $\alpha_3(f_2(b)) = \alpha_3(c) - c'$. Pela linearidade de α_3 , $c' = \alpha_3(c - f_2(b))$, ou seja, $c' \in \text{Im } \alpha_3$, e logo α_3 é isomorfismo. \square

1.3 Homologia Singular Relativa

Para construir os grupos de homologia singular, consideramos um espaço topológico X e definimos as cadeias de simplexes singulares de X . Nesta seção faremos uma generalização tomando um par (X, A) , onde X é um espaço topológico e A é um subespaço de X . As referências são [8], [10] e [15].

Definição 1.3.1. Sejam X um espaço topológico e A um subespaço de X . Os *grupos de homologia singular relativa* de (X, A) são

$$H_k(X, A) = H_k(S(X)/S(A))$$

onde $S(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k(X)$ e $S(A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k(A)$ são, respectivamente, os grupos livres das cadeias de X e A .

Vamos verificar que $H_k(X, A)$ está bem definido. Tomando um k -simplexo de A , $\sigma : \Delta^k \rightarrow A$, podemos compor com a inclusão $i_A : A \rightarrow X$ (já que A é subespaço de X), e conseguimos um k -simplexo de X , $i \circ \sigma : \Delta^k \rightarrow X$. Fazendo a identificação de σ com $i \circ \sigma$, podemos dizer que

os k -simplexos de A também são k -simplexos de X , ou seja, $A_s^{\Delta^k} \subseteq X_s^{\Delta^k}$. Como estes são os respectivos geradores de $S_k(A)$ e $S_k(X)$, temos que $S_k(A) \subseteq S_k(X)$. Como $S_k(A)$ é grupo, este é subgrupo de $S_k(X)$ e, como o último é abeliano, todo subgrupo é normal. Assim, o quociente $S_k(X)/S_k(A)$ faz sentido. Podemos então definir $S_k(X, A) := S_k(X)/S_k(A)$ e $S(X, A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k(X, A)$. Para obtermos um complexo de cadeias, precisamos definir $\partial_{X,A} : S(X, A) \rightarrow S(X, A)$ de tal forma que $\partial_{X,A}^2 = 0$ e $\partial_{X,A}[S_k] \subseteq S_{k-1}$. Um elemento não nulo de $S_k(X, A) = S_k(X)/S_k(A)$ é uma classe $\alpha + S_k(A)$, onde $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$ é uma k -cadeia de X ($\lambda_i \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_i \in X_s^{\Delta^k}$) cuja imagem não está contida em A . Assim sendo, definimos $\partial_{X,A}$ atuando em um elemento $\alpha + S_k(A) \in S_k(X, A)$ como

$$\partial_{X,A}(\alpha + S_k(A)) = \partial_X(\alpha) + S_{k-1}(A),$$

onde $\partial_X : S(X) \rightarrow S(X)$ é o operador bordo definido em homologia singular.

Note que, se $\partial_X(\alpha) \in S_{k-1}(X)$, então $\partial_X(\alpha) + S_{k-1}(A)$ é uma classe de $S_{k-1}(X, A)$, e assim, $\partial_{X,A}[S_k(X, A)] \subseteq S_{k-1}(X, A)$. Além disso, $\partial_{X,A}^2(\alpha + S_k(A)) = \partial_{X,A}(\partial_X(\alpha) + S_{k-1}(A)) = \partial_X^2(\alpha) + S_{k-2}(A) = S_{k-2}(A)$, como desejávamos.

Exemplo 1.3.2. Considere o caso em que $A = \emptyset$. Como $S_k(\emptyset) = \{0\}$, temos que $S_k(X, A) = S_k(X)/S_k(A) = S_k(X)$, e portanto $H_k(X, \emptyset) = H_k(X)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso mostra que homologia singular relativa, de fato, generaliza homologia singular.

Exemplo 1.3.3. Considere o caso em que A é um ponto de X , digamos, $A = \{p\}$. Neste caso, $S_k(A)$ é gerado pela aplicação constante, denotada por σ_k , para todo $k \in \mathbb{N}$. Primeiramente, tome k ímpar e seja $\alpha \in S_k(X)$. Se $\alpha \in \ker \partial_X$ então $\alpha + S_k(A) \in \ker \partial_{X,A}$. Reciprocamente, suponha que $\alpha + S_k(A) \in \ker \partial_{X,A}$. Então

$$\partial_X \alpha + S_{k-1}(A) = S_{k-1}(A) \implies \partial_X \alpha = \begin{cases} 0, & \text{logo } \alpha \in \ker \partial_X, \text{ ou} \\ \lambda \sigma_{k-1}, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Note que se $\partial_X \alpha = \lambda \sigma_{k-1}$ então

$$0 = \partial_X^2 \alpha = \lambda \partial_X \sigma_{k-1} = \lambda \sigma_{k-2} \neq 0,$$

pois $k-1$ é par. Logo, $\partial_X \alpha = 0$ e temos que $\alpha \in \ker \partial_X$. Portanto, se k é ímpar, $\alpha \in \ker \partial_X$ se, e somente se, $\alpha + S_k(A) \in \ker \partial_{X,A}$. O análogo é válido para as imagens de ∂_X^{k+1} e $\partial_{X,A}^{k+1}$. De fato, se $\alpha \in \text{Im } \partial_X^{k+1}$, então $\alpha = \partial_X \beta$. Assim, $\alpha + S_k(A) = \partial_{X,A}(\beta + S_{k+1}(A))$, e segue que $\alpha + S_k(A) \in \text{Im } \partial_{X,A}^{k+1}$. Reciprocamente, se $\alpha + S_k(A) \in \text{Im } \partial_{X,A}^{k+1}$, existe $\beta + S_{k+1}(A) \in S_{k+1}(X, A)$ tal que $\partial_X \beta + S_k(A) = \alpha + S_k(A)$, o que implica $\partial_X \beta - \alpha = \lambda \sigma_k$, para algum $\lambda \in \mathbb{Z}$. Mas

$$\partial_X \beta - \alpha = \lambda \sigma_k = \lambda \partial_X \sigma_{k+1}$$

pois $k + 1$ é par. Portanto, $\alpha = \partial_X(\beta - \lambda\sigma_{k+1})$, e temos $\alpha \in \text{Im } \partial_X^{k+1}$. Concluimos que a projeção $\pi : S_k(X) \rightarrow S_k(X)/S_k(A)$ induz isomorfismos entre $\ker \partial_X^k$ e $\ker \partial_{X,A}^k$ e entre $\text{Im } \partial_X^{k+1}$ e $\text{Im } \partial_{X,A}^{k+1}$. Consequentemente, $H_k(X, A) \cong H_k(X)$ quando k é ímpar.

Suponha agora que $k > 0$ seja par e tome $\alpha \in S_k(X)$. Temos que $\alpha \in \ker \partial_X$ implica $\alpha + S_k(A) \in \ker \partial_{X,A}$ e $\alpha \in \text{Im } \partial_X$ implica $\alpha + S_k(A) \in \text{Im } \partial_{X,A}$. Portanto, a projeção $\pi : S_k(X) \rightarrow S_k(X)/S_k(A)$ induz um homomorfismo de $H_k(X)$ em $H_k(X, A)$ tal que $[\alpha]_{H_k(X)} \mapsto [\alpha + S_k(A)]_{H_k(X, A)}$, $\alpha \in \ker \partial_X^k$.

Mostraremos que esta aplicação é um isomorfismo, omitindo os subscritos $H_k(X)$ e $H_k(X, A)$ nas classes de equivalência. Note que a aplicação está bem definida. De fato, se $\alpha, \beta \in \ker \partial_X^k$ são tais que $[\alpha] = [\beta]$, então $\alpha = \beta + \partial_X \eta$, para algum $\eta \in S_{k+1}(X)$. Mas então $\alpha + S_k(A) = \beta + \partial_X \eta + S_k(A) = \beta + S_k(A) + \partial_{X,A}(\eta + S_{k+1}(A))$, portanto $\alpha + S_k(A) - (\beta + S_k(A)) \in \text{Im } \partial_{X,A}$, ou seja, $[\alpha + S_k(A)] = [\beta + S_k(A)]$. Para ver que a aplicação é injetiva, suponha que $[\alpha + S_k(A)] = [\beta + S_k(A)]$, para $\alpha, \beta \in \ker \partial_X$. Portanto, existe $\eta + S_{k+1}(A)$ tal que $\alpha + S_k(A) - (\beta + S_k(A)) = \partial_{X,A}(\eta + S_{k+1}(A)) = \partial_X \eta + S_k(A)$. Logo, $\alpha - \beta - \partial_X \eta \in S_k(A)$. Seja $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha - \beta - \partial_X \eta = \lambda\sigma_k$. Aplicando ∂_X em ambos os lados, obtemos $0 = \cancel{\partial_X \alpha} - \cancel{\partial_X \beta} - \cancel{\partial_X^2 \eta} = \lambda\sigma_{k-1}$, pois $k > 0$ é par e $\alpha, \beta \in \ker \partial_X$. Concluimos que $\lambda = 0$, portanto, $\alpha - \beta - \partial_X \eta = 0$, o que implica $\alpha - \beta = \partial_X \eta \in \text{Im } \partial_X$. Concluimos $[\alpha] = [\beta]$, como desejado. Finalmente, verificaremos a sobrejetividade da aplicação. Tome $[\alpha + S_k(A)] \in H_k(X, A)$. Então $\alpha + S_k(A) \in \ker \partial_{X,A}$. Se $\partial_X \alpha = 0$, $\pi([\alpha]) = [\alpha + S_k(A)]$. Suponha que $\partial_X \alpha = \lambda\sigma_{k-1}$, para algum $\lambda \neq 0$. Logo, $\beta := \alpha - \lambda\sigma_k$ é tal que $\partial_X \beta = \partial_X \alpha - \partial_X \lambda\sigma_{k-1} = \lambda\sigma_{k-1} - \lambda\sigma_{k-1} = 0$, ou seja, $\beta \in \ker \partial_X$. Agora, como $\beta - \alpha = \alpha - \lambda\sigma_k - \alpha \in S_k(A)$, temos que $\beta + S_k(A) = \alpha + S_k(A)$, portanto, $[\beta]$ é mapeado pela aplicação π em $[\alpha + S_k(A)] = [\alpha + S_k(A)]$.

Concluimos então que $H_k(X) \cong H_k(X, A)$, qualquer que seja $k > 0$. Por fim, para $k = 0$, pela Proposição 1.1.7, $H_0(X)$ é gerado por $([\eta_i])_{i \in J}$, onde cada η_i é um 0-simplexo singular em X_i , sendo $\{X_i\}_{i \in J}$ as componentes conexas de X . Por uma demonstração semelhante à da Proposição 1.1.7 para $H_0(X, A)$, obtemos um resultado análogo, com um porém: se X_j é a componente conexa tal que $A \subseteq X_j$, então $\eta_j - \sigma_0 = \partial\beta$, onde β é um 1-simplexo singular que começa em p e termina em η_j . Portanto, $[\eta_j + S_0(A)] = [\sigma_0 + S_0(A)] = [S_0(A)]$. Dessa forma, os geradores de $H_0(X, A)$ são $\{[\eta_i + S_0(A)]\}_{i \in J, i \neq j}$. Segue que

$$H_0(X) \cong H_0(X, A) \oplus \mathbb{Z}.$$

Definição 1.3.4. Sejam X um espaço topológico e $\epsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\epsilon(\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Como $\epsilon \circ \partial_X^1 = 0$, obtemos o complexo de cadeias expandido

$$\dots \longrightarrow S_k(X) \xrightarrow{\partial_X^k} \dots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_X^1} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Definimos os *grupos de homologia reduzida de X* como a homologia do complexo expandido, ou

seja,

$$\begin{aligned}\tilde{H}_k(X) &:= \ker \partial_X^k / \text{Im } \partial_X^{k+1}, \quad k > 0, \\ \tilde{H}_0(X) &:= \ker \epsilon / \text{Im } \partial_X^1.\end{aligned}$$

Segue da definição acima que $\tilde{H}_k(X) \cong H_k(X)$ para $k > 0$. Considere $S_0(X)$, que é isomorfo a $\bigoplus_{\sigma \in X_s^{\Delta^0}} \mathbb{Z}$. Tomando algum $\eta \in X_s^{\Delta^0}$, definimos $s : \mathbb{Z} \rightarrow S_0(X)$ tal que $s(m) = m\eta$. Desta forma, $\epsilon \circ s = \text{id}_{\mathbb{Z}}$, e, considerando a seguinte sequência exata curta,

$$0 \longrightarrow \ker \epsilon \xrightarrow{i} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

segue da Proposição 1.2.2 que $S_0(X) \cong \ker \epsilon \oplus \mathbb{Z}$. Como $\text{Im } \partial_X^1 \subseteq \ker \epsilon$, temos que

$$H_0(X) = S_0(X) / \text{Im } \partial_X^1 \cong \ker \epsilon / \text{Im } \partial_X^1 \oplus \mathbb{Z} = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Note que, tendo em vista o Exemplo 1.3.3, se $p \in X$, então $H_k(X, \{p\}) \cong \tilde{H}_k(X)$, qualquer que seja $k \geq 0$.

As duas próximas proposições são adaptações das Proposições 1.1.9 e 1.1.12 para o contexto de homologia (singular) relativa.

Proposição 1.3.5. *Se (X, A) e (Y, B) são pares de espaços topológicos (com $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$) e $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua tal que $f(A) \subseteq B$, então existem homomorfismos $(f_k)_* : H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Relembramos que se $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ é um k -simplexo singular de X , a composição $f \circ \sigma : \Delta^k \rightarrow Y$ é um k -simplexo singular de Y , e a extensão linear para $S_k(X)$ desta composição, definida na Proposição 1.1.9, é o homomorfismo denotado por $\bar{f}_k : S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$.

Se $\pi_B^k : S_k(Y) \rightarrow S_k(Y, B)$ denota o homomorfismo projeção $\pi_B^k(\alpha) = \alpha + S_k(B)$, então a composição $\pi_B^k \circ \bar{f}_k : S_k(X) \rightarrow S_k(Y, B)$ é homomorfismo. Como $f(A) \subseteq B$, temos que \bar{f}_k leva k -simplexos de A em k -simplexos de B e, portanto, $S_k(A) \subseteq \ker \pi_B^k \circ \bar{f}_k$. Pelo teorema fundamental do homomorfismo, existe um único homomorfismo $\tilde{f}_k : S_k(X, A) \rightarrow S_k(Y, B)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} S_k(X) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & S_k(Y) \\ \downarrow \pi_A^k & \searrow \pi_B^k \circ \bar{f}_k & \downarrow \\ S_k(X, A) & \xrightarrow{\tilde{f}_k} & S_k(Y, B). \end{array} \tag{1.3.1}$$

Defina $\tilde{f} : S(X, A) \rightarrow S(Y, B)$ como $\tilde{f}|_{S_k(X, A)} = \tilde{f}_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Mostraremos que

$$\tilde{f} \circ \partial_{X, A} = \partial_{Y, B} \circ \tilde{f}.$$

Para tal, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \partial_{X,A} & & & \\
& & \swarrow & & \searrow & & \\
S_{k+1}(X, A) & \xleftarrow{\pi_A^{k+1}} & S_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_X} & S_k(X) & \xrightarrow{\pi_A^k} & S_k(X, A) \\
\downarrow \tilde{f} & & \downarrow \bar{f}_{k+1} & & \downarrow \bar{f}_k & & \downarrow \tilde{f} \\
S_{k+1}(Y, B) & \xleftarrow{\pi_B^{k+1}} & S_{k+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_Y} & S_k(Y) & \xrightarrow{\pi_B^k} & S_k(Y, B) \\
& & \searrow & & \swarrow & & \\
& & & \partial_{Y,B} & & &
\end{array}$$

Pela Proposição 1.1.9, já temos que os três quadrados comutam, então

$$\tilde{f} \circ \pi_A^k \circ \partial_X = \pi_B^k \circ \partial_Y \circ \bar{f}_{k+1}. \quad (1.3.2)$$

Note que, se $\sigma \in X_s^{\Delta^{k+1}} \subseteq S_{k+1}(X)$, temos

$$\pi_A^k \circ \partial_X(\sigma) = \pi_A^k(\partial_X \sigma) = \partial_X \sigma + S_k(A) = \partial_{X,A}(\sigma + S_{k+1}(X, A)) = \partial_{X,A} \circ \pi_A^{k+1}(\sigma), \quad (1.3.3)$$

e, da mesma forma, para $\beta \in Y_s^{\Delta^{k+1}} \subseteq S_{k+1}(Y)$,

$$\pi_B^k \circ \partial_Y(\beta) = \pi_B^k(\partial_Y \beta) = \partial_Y \beta + S_k(B) = \partial_{Y,B}(\beta + S_{k+1}(Y, B)) = \partial_{Y,B} \circ \pi_B^{k+1}(\beta).$$

Como todas as funções envolvidas são lineares, estendemos as igualdades para os grupos $S_{k+1}(X)$ e $S_{k+1}(Y)$, respectivamente, obtendo $\tilde{f} \circ \pi_A^k \circ \partial_X = \tilde{f} \circ \partial_{X,A} \circ \pi_A^{k+1}$ e $\pi_B^k \circ \partial_Y \circ \bar{f}_{k+1} = \partial_{Y,B} \circ \pi_B^{k+1} \circ \bar{f}_{k+1}$. Usando 1.3.2, obtemos

$$\tilde{f} \circ \partial_{X,A} \circ \pi_A^{k+1} = \partial_{Y,B} \circ \pi_B^{k+1} \circ \bar{f}_{k+1} = \partial_{Y,B} \circ \tilde{f} \circ \pi_A^{k+1},$$

sendo que na última igualdade foi usada a comutatividade do Diagrama 1.3.1. Como π_A^{k+1} é sobrejetora, concluímos que $\tilde{f} \circ \partial_{X,A} = \partial_{Y,B} \circ \tilde{f}$, como desejado. Note que, por construção, $\tilde{f}[S_k(X, A)] \subseteq S_k(Y, B)$. Demonstramos que \tilde{f} é uma aplicação de cadeia e, pela Proposição 1.2.7, obtemos homomorfismos $(f_*)_k : H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que conclui a demonstração. \square

Proposição 1.3.6. *Sejam (X, A) e (Y, B) pares de espaços topológicos com $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas com $f(A) \subseteq B$, $g(A) \subseteq B$. Se existe uma homotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ entre f e g tal que $F(A, t) \subseteq B$ para todo $t \in [0, 1]$, então os homomorfismos $(f_*)_k, (g_*)_k : H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$ são iguais para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Da demonstração do Teorema 1.1.12, obtemos funções $P_k : S_k(X) \rightarrow S_{k+1}(Y)$ tais que $\partial_Y P_k + P_{k-1} \partial_X = \bar{g}_k - \bar{f}_k$. Dadas as projeções $\pi_A^k : S_k(X) \rightarrow S_k(X, A)$, $\pi_A^k(\alpha) = \alpha + S_k(A)$ e

$\pi_B^k : S_k(Y) \rightarrow S_k(Y, B)$, $\pi_B^k(\alpha) = \alpha + S_k(B)$, segue da demonstração da Proposição 1.3.5 que

$$\begin{aligned}\pi_B^k \partial_Y P_k + \pi_B^k P_{k-1} \partial_X &= \pi_B^k \bar{g}_k - \pi_B^k \bar{f}_k \\ \partial_{Y,B} \pi_B^{k+1} P_k + \pi_B^k P_{k-1} \partial_X &= \pi_B^k \bar{g}_k - \pi_B^k \bar{f}_k\end{aligned}$$

e da comutatividade do Diagrama 1.3.1 para \bar{f}_k e do diagrama análogo para \bar{g}_k , obtemos

$$\partial_{Y,B} \pi_B^{k+1} P_k + \pi_B^k P_{k-1} \partial_X = \tilde{g}_k \pi_A^k - \tilde{f}_k \pi_A^k. \quad (1.3.4)$$

Note que $P_k(S_k(A)) \subseteq S_{k+1}(B)$, portanto $S_k(A) \subseteq \ker \pi_B^{k+1} \circ P_k$. Aplicando o Teorema Fundamental do Homomorfismo, obtemos para cada k um único homomorfismo \tilde{P}_k que faz o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_k(X) & \xrightarrow{\quad \pi_B^{k+1} \circ P_k \quad} & S_{k+1}(Y, B) \\ \downarrow \pi_A^k & & \downarrow \\ S_k(X, A) & \xrightarrow{\tilde{P}_k} & S_{k+1}(Y, B) \end{array}$$

comutar. Substituindo na equação 1.3.4, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_{Y,B} \circ \tilde{P}_k \circ \pi_A^k + \tilde{P}_{k-1} \circ \pi_A^{k-1} \circ \partial_X &= \tilde{g}_k \pi_A^k - \tilde{f}_k \pi_A^k \\ \partial_{Y,B} \circ \tilde{P}_k \circ \pi_A^k + \tilde{P}_{k-1} \circ \partial_{X,A} \circ \pi_A^k &= \tilde{g}_k \pi_A^k - \tilde{f}_k \pi_A^k,\end{aligned}$$

onde usamos novamente a igualdade 1.3.3. Como π_A^k é sobrejetiva, obtemos $\partial_{Y,B} \circ \tilde{P}_k + \tilde{P}_{k-1} \circ \partial_{X,A} = \tilde{g}_k - \tilde{f}_k$. Pela Proposição 1.2.9, temos que $(f_*)_k = (g_*)_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, concluindo a demonstração. \square

Definimos que (X, A) e (Y, B) são homotopicamente equivalentes quando existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ como na Definição 1.1.11 e são tais que $f(A) \subseteq B$ e $g(B) \subseteq A$. A proposição anterior garante que $H(X, A) \cong H(Y, B)$ quando os pares possuem o mesmo tipo de homotopia.

O teorema seguinte, que será utilizado para demonstrar a relação entre a homologia relativa $H(X, A)$ e a homologia do quociente $H(X/A)$, é uma incrível ferramenta que ajuda a entender os grupos de homologia relativa: cada grupo $H_k(X, A)$ não é afetado pela retirada de subespaços $Z \subset A$ em geral. As demonstrações deste teorema e do Lema 1.3.13 utilizam subdivisão baricêntrica, e não serão apresentadas neste trabalho.

Teorema 1.3.7. *(da Excisão) Sejam X um espaço topológico, Z, A subespaços de X tais que o fecho de Z está contido no interior de A . Então a inclusão $(X - Z, A - Z) \rightarrow (X, A)$ induz isomorfismos nos grupos de homologia singular*

$$H_k(X - Z, A - Z) \cong H_k(X, A),$$

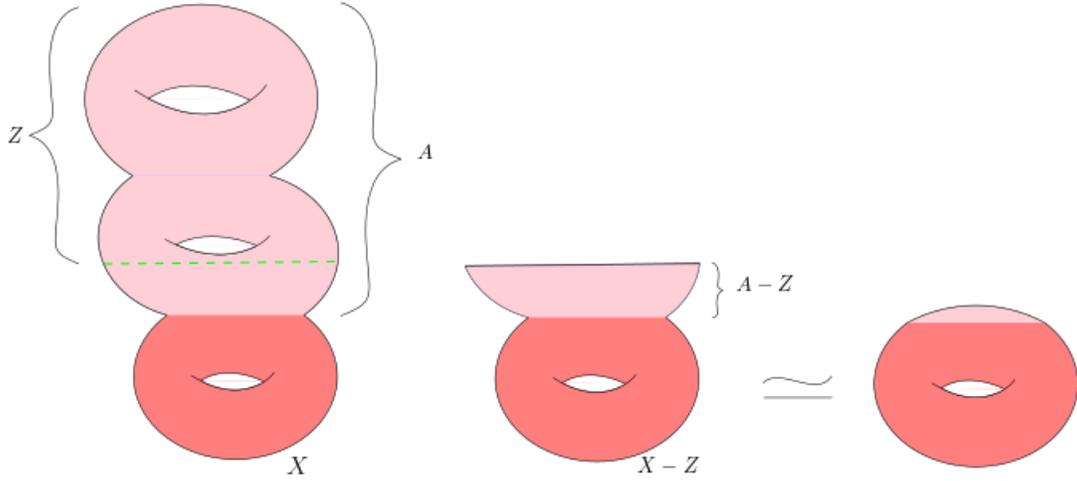


Figura 1.3.1: Tritoro X e subespaços $Z \subseteq A$.

para todo $k \in \mathbb{N}$.

A demonstração do Teorema 1.3.7 pode ser encontrada em [10]. A Figura 1.3.1 mostra um exemplo de como a Excisão pode ajudar em cálculos de homologia relativa. Observe que, após a retirada de Z pela excisão, $(X - Z, A - Z)$ é homotopicamente equivalente ao par (T^2, B) , onde B é o subespaço contrátil do toro representado na figura. Dessa forma, $H(X, A) \cong H(X - Z, A - Z) \cong H(T^2, \{p\}) \cong \tilde{H}(T^2)$, com $p \in T^2$.

Dado um par (X, A) de espaços topológicos, temos que a sequência

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{i} S(X) \xrightarrow{\pi_A} S(X, A) \longrightarrow 0$$

é exata, onde i é a inclusão (portanto, injetiva) e π_A é a projeção canônica. Portanto, podemos usar o Teorema 1.2.11 e obter a *Sequência Exata Longa de Homologia Relativa*, ou *Sequência Exata Longa do Par*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \cdots & \longrightarrow & H_{k+1}(X, A) & \longrightarrow & (1.3.5) \\
 & & & & & \partial_* & & \\
 & & & \longleftarrow & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & \longleftarrow & & H_k(A) & \xrightarrow{i_*} & H_k(X) & \xrightarrow{\pi_*} & H_k(X, A) & \longrightarrow & \\
 & & & & & & & \partial_* & & & & \\
 & & & \longleftarrow & & & & & & & & \\
 & & & \longleftarrow & & H_{k-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{k-1}(X) & \xrightarrow{\pi_*} & H_{k-1}(X, A) & \longrightarrow & \\
 & & & & & & & \partial_* & & & & \\
 & & & \longleftarrow & & & & & & & & \\
 & & & \longleftarrow & & H_{k-2}(A) & \longrightarrow & \cdots & & & &
 \end{array}$$

Também podemos usar o mesmo teorema para uma tripla $B \subseteq A \subseteq X$ de espaços topológicos. Considere a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S(A, B) \xrightarrow{i_A} S(X, B) \xrightarrow{\pi_{A, B}} S(X, A) \longrightarrow 0.$$

A sequência é exata pois, pelo teorema do homomorfismo, $S^{(X)/S(B)}/S(A)/S(B) = S^{(X)}/S(A)$, já que $S(B) \subseteq S(A)$, i_A é a induzida no quociente pela inclusão $i : A \rightarrow X$ e $\pi_{A,B} : S^{(X)}/S(B) \rightarrow S^{(X)}/S(A)$ é a projeção natural. Assim, obtemos o diagrama da *Sequência Exata Longa da Tripla*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(X, A) & \longrightarrow \\
 & & & & & & \downarrow q_* & \\
 & & & & & & \longleftarrow & \\
 \longrightarrow & H_k(A, B) & \xrightarrow{i_*} & H_k(X, B) & \xrightarrow{\pi_*} & H_k(X, A) & \longrightarrow & \\
 & & & \downarrow q_* & & & & \\
 \longrightarrow & H_{k-1}(A, B) & \xrightarrow{i_*} & H_{k-1}(X, B) & \xrightarrow{\pi_*} & H_{k-1}(X, A) & \longrightarrow & \\
 & & & \downarrow q_* & & & & \\
 \longrightarrow & H_{k-2}(A, B) & \longrightarrow & \dots & & & &
 \end{array}$$

Ambas as sequências podem ser usadas para o cálculo de grupos de homologia. Como primeira aplicação, consideremos o caso especial de pares (X, A) em que A é um retrato de deformação forte de X , definido a seguir.

Definição 1.3.8. Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$ um subespaço. Dizemos que A é um *retrato por deformação forte* de X se existe uma função contínua $F : X \times I \rightarrow X$ tal que

$$F(X, 0) = X, \quad F(X, 1) = A, \quad F(A, t) = A, \text{ para todo } t \in I.$$

Note que, nas condições da definição acima, tomando $i : A \rightarrow X$ como a inclusão e $r : X \rightarrow A$ como $r(x) = F(x, 1)$, temos que $r \circ i = id_A$ e $i \circ r = F(\cdot, 1) \simeq id_X$. A aplicação r é chamada *retração*. Assim, quando A é retrato de deformação forte de X , temos que A e X são homotopicamente equivalentes e, pelo Corolário 1.1.13, $H_k(A) \cong H_k(X)$, sendo $i_{*k} : H_k(A) \rightarrow H_k(X)$ o isomorfismo gerado por i . Pelo Diagrama 1.3.5 da sequência exata do par (X, A) , a igualdade $\text{Im } i_{*k} = \ker \pi_{*k}$ garante que $\pi_{*k} = 0$. Mas $0 = \ker i_{*k-1} = \text{Im } \partial_{*k}$, portanto, $\partial_{*k} = 0$. Por fim, $H_k(X, A) = \ker \partial_{*k} = \text{Im } \pi_{*k} = \text{Im } 0$, e concluímos $H_k(X, A) = 0$. O teorema a seguir pode ser interpretado como uma generalização deste fato.

Teorema 1.3.9. *Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$ um subespaço fechado não vazio. Se A é um retrato por deformação forte de alguma vizinhança sua em X , então, para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$H_k(X, A) \cong H_k(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_k(X/A).$$

Demonstração. Seja V uma vizinhança tal que A é um retrato por deformação forte de V . Consi-

induzidas em homologia $q'_{**} : H_k(X - A, V - A) \rightarrow H_k(X/A - A/A, V/A - A/A)$ são isomorfismos. Sendo composição de isomorfismos, concluímos que q_{**} é um isomorfismo. \square

Observação 1.3.10. Apesar de $A \neq \emptyset$ ser uma hipótese do teorema anterior, note que o resultado ainda é válido quando A é vazio, pois, nesse caso, $H_k(X, A) = H_k(X) = \tilde{H}_k(X \dot{\cup} \{p\}) = \tilde{H}_k(X/A)$.

Tome X um espaço topológico e $A \subseteq X$ não vazio. As seqüências exatas curtas

$$0 \longrightarrow S_k(A) \xrightarrow{i} S_k(X) \xrightarrow{\pi_A} S_k(X, A) \longrightarrow 0,$$

para $k \geq 0$, geram a seqüência exata longa do par. Se adicionarmos, para $k = -1$, a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

o Lema 1.2.11 fornece a seqüência exata do par em homologia reduzida. Se estivermos nas condições do Teorema 1.3.9, observando que $\tilde{H}_k(X, A) \cong H_k(X, A)$ para todo $k \geq 0$, obtemos o teorema a seguir.

Teorema 1.3.11. *Seja X um espaço topológico. Se $A \subseteq X$ é um subespaço fechado não vazio que é um retrato por deformação forte de alguma vizinhança sua em X , então temos a seguinte seqüência exata longa de homologia reduzida*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_{k+1}(X/A) & \longrightarrow & \\ & & & & & \partial_* & & & \\ \text{---} & & & & & & & & \\ & & & & \tilde{H}_k(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_k(X) & \xrightarrow{\pi_*} & \tilde{H}_k(X/A) & \longrightarrow & \\ & & & & & \partial_* & & & & & \\ \text{---} & & & & & & & & \\ & & & & \tilde{H}_{k-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_{k-1}(X) & \xrightarrow{\pi_*} & \tilde{H}_{k-1}(X/A) & \longrightarrow & \\ & & & & & \partial_* & & & & & \\ \text{---} & & & & & & & & \\ & & & & \tilde{H}_{k-2}(A) & \longrightarrow & \dots & & & & \end{array}$$

terminando em

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_0(A) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0.$$

Exemplo 1.3.12. Considere \mathbb{R}^k com a topologia usual e seja $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k : d(x, 0) \leq 1\}$ o disco k -dimensional, cujo bordo é $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k : d(x, 0) = 1\}$, a esfera $k - 1$ -dimensional. Note que, assim como \mathbb{R}^k , D^k é contrátil. Sabemos então que $H_n(D^k) = 0$ se $n > 0$. Segue da seqüência exata longa do par (D^k, S^{k-1}) que os homomorfismos $\partial_{*n+1} : H_{n+1}(D^k, S^{k-1}) \rightarrow H_n(S^{k-1})$ são isomorfismos para $n > 0$.

Na definição de simplexes singulares, colocamos apenas a restrição de continuidade nas funções $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$. Como veremos a seguir, poderíamos usar “funções locais”, no sentido que a imagem

de σ esteja contida em vizinhanças abertas arbitrárias, desde que estas vizinhanças formem uma cobertura do espaço topológico X . Usaremos este resultado para o caso particular em que a cobertura é formada por dois conjuntos A e B , obtendo uma sequência exata que relaciona as homologias de X, A, B e $A \cap B$. Tal sequência exata é a importante sequência de Mayer-Vietoris, usada em seguida para calcular a homologia de S^n , além de outras aplicações.

Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ uma cobertura de X . Um k -simplexo singular de X , $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ é dito \mathcal{U} -pequeno se $\text{Im } \sigma \subseteq \text{int} U_i$, para algum $i \in J$. Definimos como $S_k^{\mathcal{U}}(X)$ o subgrupo de $S_k(X)$ das cadeias $\sum \lambda_i \sigma_i$ formadas por σ_i k -simplexos singulares \mathcal{U} -pequenos. Restringimos o operador bordo para obter $\partial : S^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S^{\mathcal{U}}(X)$, com $\partial[S_k^{\mathcal{U}}(X)] \subseteq S_{k-1}^{\mathcal{U}}(X)$, e obtemos os grupos de Homologia $H_k^{\mathcal{U}}(X) = \frac{\ker \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}}$. Estas definições são necessárias para o enunciado do seguinte lema, que é usado na demonstração do Teorema 1.3.14.

Lema 1.3.13. *Seja X um espaço topológico. Para qualquer família \mathcal{U} tal que os interiores $\{\overset{\circ}{U}\}_{U \in \mathcal{U}}$ formam uma cobertura aberta de X , as inclusões $i_k : S_k^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_k(X)$ induzem uma equivalência homotópica de cadeia, isto é, existem aplicações de cadeia $\rho_k : S_k(X) \rightarrow S_k^{\mathcal{U}}(X)$ tais que existe uma homotopia de cadeia entre $\rho \circ i$ e a identidade de $S^{\mathcal{U}}(X)$ e existe uma homotopia de cadeia entre $i \circ \rho$ e a identidade de $S(X)$. Consequentemente, temos isomorfismos $H_k^{\mathcal{U}}(X) \cong H_k(X)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [10].

Teorema 1.3.14. *(Mayer-Vietoris) Seja X um espaço topológico. Dados $A, B \subseteq X$ tais que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$, existe uma sequência longa exata de homologia*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \cdots & \longrightarrow & H_{k+1}(X) & \longrightarrow \\
 & & & & & \partial_* & \longleftarrow \\
 & \longleftarrow & & & & & \\
 & & & H_k(A \cap B) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_k(A) \oplus H_k(B) & \xrightarrow{\psi_*} & H_k(X) & \longrightarrow \\
 & & & & & \partial_* & \longleftarrow & \\
 & \longleftarrow & & & & & \\
 & & & H_{k-1}(A \cap B) & \longrightarrow & \cdots & &
 \end{array}$$

com $\varphi_*(c) = (i_*(c), -j_*(c))$ e $\psi_*(a, b) = k_*(a) + l_*(b)$, sendo i_*, j_*, k_* e l_* os mapas induzidos pelas inclusões apresentadas no diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A \cap B & \xrightarrow{i} & A \\
 \downarrow j & & \downarrow k \\
 B & \xrightarrow{l} & X
 \end{array}$$

Demonstração. Sejam i, j, k e l as inclusões como no enunciado e considere os homomorfismos induzidos $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ e \bar{l} nos seus respectivos grupos de cadeia, como definidos na Proposição 1.1.9. Defina $\varphi : S_k(A \cap B) \rightarrow S_k(A) \oplus S_k(B)$ dada por $\varphi(c) = (\bar{i}(c), -\bar{j}(c))$ e $\psi : S_k(A) \oplus S_k(B) \rightarrow S_k(A) + S_k(B)$ tal que $\psi(a, b) = \bar{k}(a) + \bar{l}(b)$.

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, n, \\ 0, & k \neq 0, n, \end{cases} \text{ se } n > 0 \text{ enquanto } H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}.$$

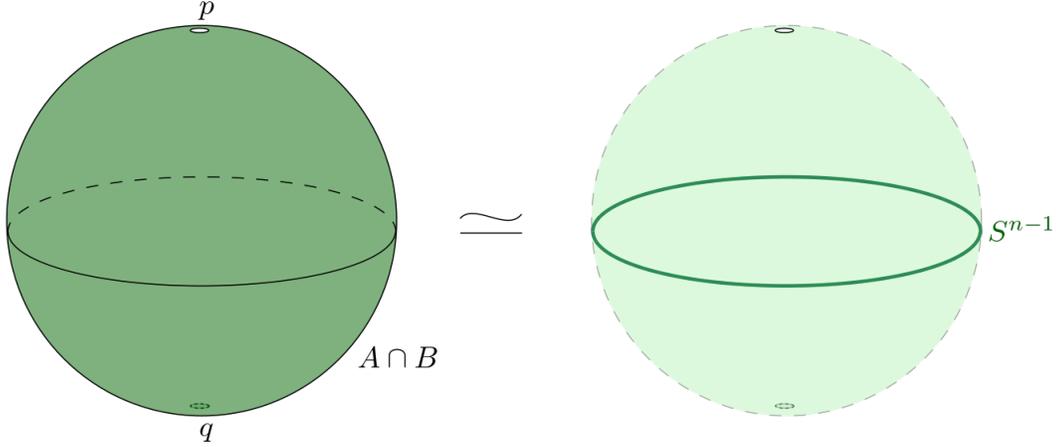


Figura 1.3.2: Apresentação de $A \cap B$ para $n = 2$.

O lema a seguir será usado na demonstração do Teorema 1.3.17, uma aplicação importante da sequência de Mayer-Vietoris. Como consequência do teorema, obtemos o Teorema da Curva de Jordan generalizado.

Lema 1.3.16. *Seja S^n a esfera n -dimensional, D^k o disco k -dimensional. Se $h : D^k \rightarrow S^n$ é um mergulho, então $\tilde{H}_i(S^n - h(D^k)) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Ao invés do disco, usaremos o cubo $I^k = \{x \in \mathbb{R}^k : d_\infty(x, 0) \leq 1\}$. Como são homeomorfos, os grupos de homologia são isomorfos.

A prova será feita por indução em k . Quando $k = 0$, $S^n - h(I^0) \simeq S^n - \{pt\} \simeq \mathbb{R}^n$, que possui homologia trivial. Suponha então o resultado válido para $k - 1$. Tomando o mergulho $h : I^k \rightarrow S^n$, defina $A = S^n - h(I^{k-1} \times [0, 1/2])$ e $B = S^n - h(I^{k-1} \times [1/2, 1])$. Temos que $A \cap B = S^n - h(I^k)$ e $A \cup B = S^n - h(I^{k-1} \times \{1/2\}) \simeq S^n - h(I^{k-1})$. Pela hipótese de indução, $\tilde{H}_i(A \cup B) = 0$ para todo i . Pela sequência de Mayer-Vietoris para $X = A \cup B$, obtemos isomorfismos $\tilde{H}_i(S^n - h(I^k)) = \tilde{H}_i(A \cap B) \cong \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$, qualquer que seja i .

Nosso objetivo é mostrar que $\tilde{H}_i(S^n - h(I^k)) = 0$. Isso significa que todo ciclo em $S^n - h(I^k)$ é bordo de uma cadeia. Suponhamos então, por absurdo, que exista α um ciclo i -dimensional que não é bordo de uma cadeia em tal espaço. Como visto no teorema de Mayer-Vietoris, a menos de sinais, o isomorfismo citado no parágrafo anterior é induzido pelas inclusões de $S^n - h(I^k)$ em A e B . Então α (na verdade, sua imagem pela inclusão) não é bordo de nenhuma cadeia em A ou não é bordo de nenhuma cadeia em B . Tome $I_1 = [0, 1/2]$ se α não for bordo em A , e $I_1 = [1/2, 1]$ se não for em B . Subdividindo I_1 em dois intervalos fechados I_{11} e I_{12} , temos que α não é bordo em $S^n - h(I^{k-1} \times I_{11})$ ou α não é bordo em $S^n - h(I^{k-1} \times I_{12})$. Escolha $I_2 \in \{I_{11}, I_{12}\}$ tal que α não é bordo em $S^n - h(I^{k-1} \times I_2)$. Repetindo o raciocínio, construímos uma sequência $\{I_m\}$ de

intervalos fechados encaixados. Logo, $\cap I_m = \{p\}$, $p \in [0, 1]$, e pela construção, α não é bordo em $S^n - h(I^{k-1} \times I_m)$ para todo m .

Pela hipótese de indução, α deve ser bordo de algum β em $S^n - h(I^{k-1}) \simeq S^n - h(I^{k-1} \times \{p\})$. Suponhamos que $\beta = \sum_{j=1}^s \lambda_j \sigma_j$, onde σ_j são $i + 1$ -simplexos. Lembrando que σ_j são funções contínuas com domínio compacto, sua imagem deve ser compacta. Sendo a combinação linear finita, β possui imagem compacta, contida em $S^n - h(I^{k-1} \times \{p\})$. Mas cada $S^n - h(I^{k-1} \times I_m)$ é aberto, e a sua união em m cobre $S^n - h(I^{k-1} \times \{p\})$. Segue da compacidade da imagem de β que existe um $M > 0$ tal que a imagem de β está contida em $S^n - h(I^{k-1} \times I_M) \simeq S^n - h(I^k)$, o que é uma contradição pois $\partial\beta = \alpha$. Isto conclui a demonstração. \square

Teorema 1.3.17. *Seja $h : S^k \rightarrow S^n$ um mergulho, $0 \leq k < n$. Então:*

$$\tilde{H}_i(S^n - h(S^k)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = n - k - 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Para o passo base da indução, com $k = 0$, usamos que $S^n - h(S^0) \simeq S^{n-1} \times \mathbb{R}$, e temos o resultado desejado.

Escreva, então, S^k como a união de seus dois hemisférios (fechados) D_1^k, D_2^k , que se intersectam em S^{k-1} . Tomamos $A = S^n - h(D_1^k)$ e $B = S^n - h(D_2^k)$. Pelo lema anterior, ambos possuem homologia reduzida trivial, pois cada hemisfério é homeomorfo ao disco D^k . Novamente, usando Mayer-Vietoris para $X = A \cup B = S^n - h(S^{k-1})$, obtemos os isomorfismos $\tilde{H}_i(S^n - h(S^k)) \cong \tilde{H}_{i+1}(S^n - h(S^{k-1}))$, concluindo a demonstração. \square

Nas condições do teorema anterior e supondo $n \neq 0$, tomamos $k = n - 1$ e obtemos $\tilde{H}_0(S^n - h(S^{n-1})) \cong \mathbb{Z}$. Portanto, $H_0(S^n - h(S^{n-1})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, e segue da Proposição 1.1.7 que $h(S^{n-1})$ divide S^n em duas componentes conexas W_1 e W_2 . Como $\partial W_1 = \partial W_2 = h(S^{n-1})$, fato demonstrado em [15], obtemos o Teorema da Curva de Jordan generalizado. A versão para \mathbb{R}^n pode ser obtida removendo um ponto de S^n , o que não altera o número de componentes conexas, e em seguida usando a projecção estereográfica.

Capítulo 2

Teoria de Morse

Este capítulo tem como principal objetivo entender como a topologia de uma variedade M se relaciona com um fluxo gradiente de uma função f definida em M . Veremos que vizinhanças de pontos estacionários do fluxo fornecem informação adicional da topologia da variedade. Na Seção 2.1 apresentamos os conceitos básicos necessários para estudar esta teoria. Introduzimos na Seção 2.2 fluxos gradientes de funções de Morse, estudamos algumas de suas propriedades, e finalizamos com a relação supracitada.

2.1 Sistemas Dinâmicos: Preliminares

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos e resultados básicos de Topologia Diferencial e Sistemas Dinâmicos, que serão utilizados no trabalho. As referências utilizadas são [9], [11], [16] e [21].

Seja M um espaço topológico Hausdorff com base enumerável. Chamamos de *carta local* o par (x, U) , onde $U \subset M$ é aberto e $x : U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^n$, com U_0 aberto de \mathbb{R}^n , é um homeomorfismo. Se escrevemos $x = (x_1, \dots, x_n)$, chamamos as funções $x_i, 1 \leq i \leq n$, funções coordenadas. Dizemos também que x^{-1} é uma parametrização local, e que U é uma vizinhança parametrizada de M . Dadas duas cartas $(x, U), (y, V)$, com $U \cap V \neq \emptyset$, podemos fazer a mudança de coordenadas $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$, que também será um homeomorfismo.

Definição 2.1.1. Um espaço topológico M Hausdorff com base enumerável é uma *variedade diferenciável de classe C^r* , $r \geq 1$, n -dimensional, se existe uma família $\mathcal{X} = \{(x_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, $x_\lambda : U_\lambda \rightarrow U_{\lambda,0} \subset \mathbb{R}^n$, de cartas locais tais que as vizinhanças parametrizadas de \mathcal{X} cobrem M e as mudanças de coordenadas são C^r difeomorfismos.

Nas condições da definição acima, dizemos que \mathcal{X} é um *atlas* de M . Além disso, variedades que sejam C^∞ serão denominadas simplesmente variedades diferenciáveis.

Dizemos que um subconjunto S de uma variedade n -dimensional M é uma *subvariedade de classe C^r de dimensão $k \leq n$* se, para todo $p \in S$, existem abertos $U \subset M$ com $p \in U$, $V \subset \mathbb{R}^k$, $W \subset \mathbb{R}^{n-k}$ com $0 \in W$ e um C^r difeomorfismo $\varphi_S : U \rightarrow V \times W$ tal que $\varphi_S(S \cap U) = V \times \{0\}$.

Seja M uma variedade n -dimensional de classe C^r . Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U \subset M$ uma curva, $\alpha(0) = p \in U$ e (x, U) uma carta local de M . Suponha que a função $x \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, que é uma função entre espaços euclidianos, seja diferenciável em 0. Definimos o vetor v tangente a α em p como o conjunto de todas as curvas diferenciáveis $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ tais que $\beta(0) = p$ e $d(x \circ \alpha)(0) = d(x \circ \beta)(0)$. A estrutura vetorial de \mathbb{R}^n induz uma estrutura vetorial no conjunto $\{w : w \text{ é vetor tangente a } \gamma \text{ para alguma curva } \gamma \text{ em } M \text{ tal que } \gamma(0) = p\}$. Chamamos tal espaço de *espaço tangente a M em p* , denotado por $T_p M$. Observamos que essa definição não depende da carta local usada.

Definição 2.1.2. Seja M uma variedade n -dimensional de classe C^r . Definimos o *fibrado tangente* a M como $\xi = (\pi, TM, M)$, denotado apenas por TM , onde $TM = \{(x, v) \in M \times \cup_{p \in M} T_p M : v \in T_x M\}$ e $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção $(x, v) \mapsto x$. Notamos que o fibrado tangente é uma variedade $2n$ -dimensional. Se S é subvariedade de M , denotamos como $T_S M$ o fibrado tangente a M restrito a S .

Sejam M, N variedades m e n -dimensionais, respectivamente. Dada uma função $f : M \rightarrow N$, f é r -diferenciável em $p \in M$ se, dadas cartas locais (x, U) de M e (y, V) de N , com $p \in U$ e $f(p) \in V$, a composição $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é r -diferenciável. A diferencial $df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$, onde $f(p) = q$, é a função que leva o vetor tangente de uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ no vetor tangente à curva $f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$, para toda curva tal que $\alpha(0) = p$. Observamos novamente a independência das definições com relação às cartas e às curvas usadas.

A regra da cadeia para funções entre variedades segue da regra da cadeia em espaços euclidianos. Assim, se $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ são funções diferenciáveis entre variedades M, N e P , então $g \circ f : M \rightarrow P$ é diferenciável e $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$.

Teorema 2.1.3. (*Função Inversa*) Sejam M e N variedades e $f : M \rightarrow N$ uma função de classe C^r (r -diferenciável, com derivadas parciais contínuas). Seja $p \in M$. Se $df(p)$ é um isomorfismo, então f é um C^r -difeomorfismo local em p .

Sejam M, N variedades m, n -dimensionais e $p \in M$. Uma função diferenciável $f : M \rightarrow N$ é dita uma *imersão em p* se $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetora. Se f é imersão em todo ponto de M , dizemos apenas que f é imersão. Uma imersão que possui inversa $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$ contínua é um *mergulho*. Uma função $g : M \rightarrow N$ tal que $dg(p)$ seja sobrejetora é uma *submersão em p* . Se g é uma submersão em todo ponto de $g^{-1}(y)$, dizemos que y é um *valor regular* de g . Pode-se mostrar que $g^{-1}(y)$ é uma subvariedade de M quando y é um valor regular de g .

Introduzimos agora conceitos básicos para equações diferenciais numa variedade diferenciável M n -dimensional. Uma função $X : M \rightarrow \cup_{p \in M} T_p M$ tal que $X(p) \in T_p M$ é chamada de *campo vetorial em M* . A diferenciabilidade de X em $p \in M$, dada uma carta (x, U) com $p \in U$, é definida como a diferenciabilidade da função $dx(\cdot) \cdot X(\cdot) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ em p . Uma *curva integral* de X pelo ponto $p \in M$ é uma curva diferenciável $\alpha : J \rightarrow M$, com $0 \in J \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $\alpha(0) = p$

tal que $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, sendo $\alpha'(t)$ o vetor tangente a α em $\alpha(t)$. Dizemos que α é solução da equação diferencial $x' = X(x)$ com condição inicial (ou problema de valor inicial) $x(0) = p$, e que α é solução maximal se, para toda $\beta : J' \rightarrow M$ solução do mesmo problema de valor inicial, temos $J' \subset J$.

Teorema 2.1.4. (*Teorema de Existência e Unicidade*) *Sejam M uma variedade diferenciável e X um campo vetorial em M de classe $C^r, r \geq 1$. Dado $p \in M$ existe uma curva integral de X , $\alpha : J \rightarrow M$, com $0 \in J$ e $\alpha(0) = p$. Se $\beta : J' \rightarrow M$ é outra curva integral tal que $\beta(0) = p$ então $\alpha(t) = \beta(t)$, para todo $t \in J \cap J'$.*

Sejam M uma variedade diferenciável, X um campo vetorial em M , $p \in M$ e V_p uma vizinhança de p em M . Uma função $\varphi : J \times V_p \rightarrow M$ é dita *fluxo local* em $p \in M$ se, para todo $q \in V_p$, o mapa $\varphi(t, q) = \varphi_q(t) : J \rightarrow M$ é uma curva integral de X por q . No caso em que $J = \mathbb{R}$ e $V_p = M$, chamamos φ de *fluxo global*. O teorema a seguir garante que um fluxo local existe em variedades diferenciáveis.

Teorema 2.1.5. *Sejam M uma variedade diferenciável e X um campo vetorial de classe $C^r, r \geq 1$ em M . Para todo $p \in M$, existe um fluxo local $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times V_p \rightarrow M$ de classe C^r , para alguma vizinhança V_p de p . Além disso, temos*

$$D_1 D_2 \varphi(t, q) = DX(\varphi(t, q)) \circ D_2 \varphi(t, q).$$

Proposição 2.1.6. *Sejam M uma variedade diferenciável e X um campo vetorial de classe $C^r, r \geq 1$ em M . Se M é compacta, então existe um fluxo global $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ para X em M .*

Demonstração. Primeiro, notamos que, pelo Teorema de Existência e Unicidade, dadas duas soluções $\beta : J \rightarrow M$ e $\gamma : J' \rightarrow M$ do mesmo problema de valor inicial $x' = X(x), x(0) = p$, temos que $\beta(t) = \gamma(t)$ para $t \in J \cap J'$, o que nos permite gerar uma solução “maior” $\phi : J \cup J' \rightarrow M$ como $\phi(t) = \beta(t), t \in J$ e $\phi(t) = \gamma(t), t \in J'$. Uma aplicação do Lema de Zorn para a seguinte ordem parcial no conjunto das soluções do problema de valor inicial citado, usando as mesmas notações para as curvas e domínios,

$$\gamma \leq \beta \iff J' \subseteq J,$$

garante a existência de uma solução maximal.

Seja então $p \in M$, e tome $\alpha : (a, b) \times M \rightarrow M$ solução maximal de $x' = X(x), x(0) = p$. Nosso objetivo é mostrar que $b = \infty$. Por absurdo, suponha $b < \infty$. Tome uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b)$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$. Temos que $\{\alpha(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência em M . Pela compacidade de M , existe pelo menos uma subsequência $\{\alpha(t_{n_k})\}$ convergente. Chamemos $q = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \alpha(t_{n_k})$. Tome $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times V_q \rightarrow M$ fluxo local por q . Como $t_{n_k} \rightarrow b$ e $\alpha(t_{n_k}) \rightarrow q$, podemos tomar $N_0 > 0$ tal que

$$n_k \geq N_0 \implies b - t_{n_k} < \frac{\epsilon}{2} \wedge \alpha(t_{n_k}) \in V_q.$$

Defina $\gamma : (a, t_{N_0} + \epsilon) \rightarrow M$ como $\gamma(t) = \alpha(t)$, se $t \in (a, t_{N_0})$ e $\gamma(t) = \varphi(t - t_{N_0}, \alpha(t_{N_0}))$ se $t \geq t_{N_0}$. Assim, temos

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \alpha'(t) = X(\alpha(t)) = X(\gamma(t)) & t < t_{N_0} \\ \gamma'(t) = \varphi'(t - t_{N_0}, \alpha(t_{N_0})) = X(\varphi(t - t_{N_0}, \alpha(t_{N_0}))) = X(\gamma(t)) & t > t_{N_0}. \end{cases}$$

Para t_{N_0} , usamos a continuidade de X e das curvas integrais:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_{N_0}^-} \gamma'(t) &= \lim_{t \rightarrow t_{N_0}^-} \alpha'(t) = \lim_{t \rightarrow t_{N_0}^-} X(\alpha(t)) = X(\alpha(t_{N_0})) = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_{N_0}^+} X(\varphi(t - t_{N_0}, \alpha(t_{N_0}))) = \lim_{t \rightarrow t_{N_0}^+} \varphi'(t - t_{N_0}, \alpha(t_{N_0})) = \lim_{t \rightarrow t_{N_0}^+} \gamma'(t), \end{aligned}$$

portanto, $\gamma'(t_{N_0}) = X(\alpha(t_{N_0})) = X(\gamma(t_{N_0}))$, ou seja, γ é solução de $x' = X(x)$, $x(0) = p$ no intervalo $(a, t_{N_0} + \epsilon) \supset (a, b)$, o que contradiz a maximalidade de α . Concluimos então que $b = \infty$, e, de forma análoga, $a = -\infty$.

Então, temos, para cada $p \in M$, $\alpha_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\alpha_p'(t) = X(\alpha_p(t))$ e $\alpha_p(0) = p$. A curva é única pela solução ser maximal e definida em \mathbb{R} . Defina $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ como $\varphi(t, p) = \alpha_p(t)$. Mostraremos que φ é de classe C^r . Primeiro, notamos que, fixado s número real, $\varphi(t + s, p) = \varphi(t, \varphi(s, p))$, já que ambas são soluções do problema $x' = X(x)$, $x(0) = \varphi(s, p)$. Tome $p \in M$ e um fluxo local $\varphi_p : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \times V_p \rightarrow M$, que existe e é de classe C^r pelo Teorema 2.1.5. Pela unicidade citada anteriormente, φ_p é simplesmente a restrição de φ . Assim, para $|t| < \epsilon_p$, a função $\varphi_t := \varphi(t, \cdot)$ é de classe C^r em V_p . Como M é compacto, $\cup_{p \in M} V_p = \cup_{i=1}^n V_{p_i}$, portanto, se $|t| < \epsilon := \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\epsilon_{p_i}\}$, φ_t é de classe C^r em M . Mas, para todo $t \in \mathbb{R}$, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{t}{n}| < \epsilon$, temos que $\varphi_t = \overbrace{\varphi_{\frac{t}{n}} \circ \dots \circ \varphi_{\frac{t}{n}}}$ n funções é composição de funções C^r , portanto, C^r . Finalmente, dados $t_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \in M$, V_{p_0} a vizinhança da cobertura finita de M supracitada que contém p_0 , temos que $\forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, $p \in V_{p_0}$, vale que $\varphi(t, p) = \varphi_{t_0} \circ \varphi(t - t_0, p) = \varphi_{t_0} \circ \varphi|_{(-\epsilon, \epsilon) \times V_{p_0}}$, e concluimos que φ é C^r . \square

Corolário 2.1.7. *Sejam X um campo vetorial de classe C^r numa variedade diferenciável compacta M e $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ seu fluxo global. Fixado $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\varphi(t, \cdot) : M \rightarrow M$, é um difeomorfismo de classe C^r , sendo que $\varphi(0, p) = p$ para todo $p \in M$ e $\varphi(t + s, \cdot) = \varphi(t, \varphi(s, \cdot))$, para todos $t, s \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.1.8. *Sejam M uma variedade diferenciável compacta, X um campo vetorial de classe C^r em M e $p \in M$.*

- A órbita de p é o conjunto $\mathcal{O}(p) = \{\varphi(t, p) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

- O conjunto ω -limite de p é

$$\omega(p) = \left\{ q \in M : \text{Existe } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p) = q \right\};$$

- O conjunto α -limite de p é

$$\alpha(p) = \left\{ q \in M : \text{Existe } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p) = q \right\}.$$

Nas condições da definição acima, se $p_0 \in M$ for tal que $X(p_0) = 0$, temos $D_1\varphi(t, p_0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, que implica $\varphi(t, p_0) = p_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo, $\mathcal{O}(p_0) = \{p_0\}$. Dizemos, neste caso, que p_0 é *singularidade* de X . Caso contrário, tomamos $\alpha(t) = \varphi(t, p_0)$. Se α não for injetiva, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(0) = \alpha(r) = p_0$ e $\alpha|_{[0, r)}$ é injetiva, e então dizemos que $\mathcal{O}(p_0)$ é uma *órbita fechada de período r* . Se p_0 não está em nenhum dos casos, dizemos que sua órbita é *regular*.

Note que, se $p' \in \mathcal{O}(p)$, então $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(p')$. Além disso, $\omega(p) = \omega(p')$. De fato, dado $q \in \omega(p)$, tomamos t_0 tal que $p' = \varphi(t_0, p)$ e a sequência $\{t_n\}$ tal que $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ e temos que $\varphi(t_n - t_0, p')$ $\rightarrow q$, ou seja, $q \in \omega(p')$. Logo, podemos falar do conjunto ω -limite de uma órbita γ . O análogo é válido para o conjunto α -limite.

Teorema 2.1.9. *Seja X um campo vetorial numa variedade diferenciável compacta M . Dado $p \in M$, temos:*

- $\omega(p) \neq \emptyset$;
- $\omega(p)$ é compacto;
- $\omega(p)$ é invariante por $\varphi(t, \cdot)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- $\omega(p)$ é conexo.

Demonstração. Tomando $\{t_n\}$ sequência tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, temos que $\{\varphi(t_n, p)\}$ é sequência em M . Como M é compacta, $\{\varphi(t_n, p)\}$ admite subsequência convergente. Pela definição, o limite dessa subsequência pertence a $\omega(p)$, logo $\omega(p)$ é não vazio.

Como M é compacta, para a compacidade de $\omega(p)$, basta mostrar que $\omega(p)$ é fechado, ou, equivalentemente, seu complementar é aberto. Tome $q \in M \setminus \omega(p)$. Como não existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$, existe uma vizinhança V_q de q e $T > 0$ tal que $\varphi(t, p) \notin V_q$, para todo $t \geq T$. Logo, $q \in V_q \subset M \setminus \omega(p)$, e portanto $M \setminus \omega(p)$ é aberto.

Tome agora $q \in \omega(p)$ e considere $\varphi(t, q)$, $t \neq 0$. Pela definição de $\omega(p)$, existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$. Assim, $\varphi(t, \varphi(t_n, p)) = \varphi(t + t_n, p) \rightarrow \varphi(t, q)$ e portanto $\varphi(t, q) \in \omega(p)$. Segue que $\omega(p)$ é invariante por $\varphi(t, \cdot)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por fim, suponha por absurdo que $\omega(p)$ não seja conexo. Tome V_1, V_2 disjuntos abertos tais que $\omega(p) \cap V_1 \neq \emptyset$, $\omega(p) \cap V_2 \neq \emptyset$ e $\omega(p) \subseteq V_1 \cup V_2$. Se para algum $T > 0$ $\varphi(t, p) \in V_1$ para todo $t > T$,

então V_2 não teria pontos de $\omega(p)$. O mesmo vale para V_1 no caso de pertencerem a V_2 . Então, para todo $T_0 > 0$ tal que $\varphi(T_0, p) \in V_i$, existe $\bar{T}_0 > T_0$ tal que $\varphi(\bar{T}_0, p) \in V_j$, $j \neq i$. Pela continuidade da curva integral, existe pelo menos um t_0 tal que $T_0 < t_0 < \bar{T}_0$ e $\varphi(t_0, p) \notin V_1 \cup V_2$. Tomando $T_1 > \bar{T}_0$ tal que $X_{T_1} \in V_i$, obtemos t_1 tal que $\bar{T}_0 < t_1 < T_1$ e $\varphi(t_1, p) \notin V_1 \cup V_2$. Repetindo este raciocínio, construímos uma sequência $\{t_n\}$ tal que $\varphi(t_n, p) \in M \setminus (V_1 \cup V_2)$. Como $M \setminus (V_1 \cup V_2)$ é compacto, $\{\varphi(t_n, p)\}$ possui pelo menos uma subsquência convergente. Pela definição de ω -limite, tal limite pertence a $\omega(p)$, o que contradiz a hipótese $M \setminus (V_1 \cup V_2) \cap \omega(p) = \emptyset$. Segue que $\omega(p)$ é conexo. \square

O teorema a seguir diz que, num ponto regular, todo campo vetorial é localmente equivalente ao campo constante em \mathbb{R}^n .

Teorema 2.1.10. (*Fluxo Tubular*) *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n , X um campo vetorial de classe C^r em M , e $p \in M$ um ponto regular de X . Suponha que $g : A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M$ seja uma função C^k tal que $g(0) = p$, $0 \in \text{Int}(A)$ e, para todo $q \in A$,*

$$dg(q)T_q A + \langle X(g(q)) \rangle = T_{g(q)} M$$

isto é, $g(A)$ é transversal ao fluxo. Então existe $\epsilon > 0$ tal que, se $C = (-\epsilon, \epsilon) \times B(0, \epsilon)$ e X_C é o campo vetorial em C definido por $X_C(x) = (1, 0, \dots, 0)$, existe um difeomorfismo $h : V_p \rightarrow C$ de classe $C^{\min\{r, k\}}$, em alguma vizinhança V_p de p , que leva trajetórias de X em trajetórias de X_C . Além disso, $h(g(A) \cap V_p) = \{0\} \times B(0, \epsilon)$.

Demonstração. Seja (x, U) uma carta local para p , com $x(p) = 0$. Seja $\varphi : (-\tau, \tau) \times V'_p \rightarrow M$ o fluxo local de X em p , que existe pelo Teorema 2.1.5. Suponha sem perda de generalidade que $\text{Im } \varphi \subseteq U$, pois bastaria tomar $0 < \tau' < \tau$ suficientemente pequeno. Defina a função $F : D_F \rightarrow x(U) = U_0$, onde $D_F := \{(t, q) \in \mathbb{R} \times A : (t, g(q)) \in (-\tau, \tau) \times V'_p\}$, dada por $F(t, q) = x \circ \varphi(t, g(q))$. Então

$$D_1 F(0, 0) = dx(\varphi(0, g(0))) \cdot X(g(0)) = dx(p) \cdot X(p) \neq 0,$$

pois p é ponto regular e $D_j F(0, 0) = dx(p) \cdot D_{j-1} g(0)$ para $j \in \{2, \dots, n\}$ pois $\varphi(0, g(q)) = g(q)$ para todo $q \in A$. Como g é transversal ao fluxo, concluímos que $D_1 F(0, 0)$ é um isomorfismo. Pelo Teorema 2.1.3, existe $\epsilon > 0$ tal que $F|_C$, com $C = (-\epsilon, \epsilon) \times B(0, \epsilon)$, é um difeomorfismo de classe $C^{\min\{k, r\}}$ sobre sua imagem. Defina $h := (F|_C)^{-1} \circ x : V_p \rightarrow C$, onde $V_p = x^{-1}(F(C))$. Temos que $h(g(A) \cap V_p) = \{0\} \times B(0, \epsilon)$ pois $F(0, y) = x \circ \varphi(0, g(y)) = x(g(y))$ para todo $y \in A$, logo,

$F^{-1} \circ x(g(y)) = (0, y)$ para $g(y) \in g(A) \cap V_p$. Além disso,

$$\begin{aligned}
Dh^{-1}(t, y) \cdot X_C(t, y) &= dx^{-1}(F(t, y)) \cdot DF(t, y) \cdot (1, 0, \dots, 0) \\
&= dx^{-1}(F(t, y)) \cdot D_1F(t, y) \\
&= dx^{-1}(F(t, y)) \cdot dx(\varphi(t, g(y))) \cdot X(\varphi(t, g(y))) \\
&= dx^{-1}(x \circ \varphi(t, g(y))) \cdot dx(\varphi(t, g(y))) \cdot X(x^{-1} \circ F(t, y)) \\
&= X(h^{-1}(t, y))
\end{aligned}$$

para qualquer $(t, y) \in C$, ou seja, h^{-1} conjuga os campos X_C e X , como desejado. \square

Corolário 2.1.11. *Nas condições do Teorema 2.1.10, para cada $p \in g(A)$ existem $\epsilon(p) > 0$, uma vizinhança V_p de p e uma função $\tau_p : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{\min\{k, r\}}$ tais que $\tau_p(g(A) \cap V_p) = 0$. Além disso, a função $\xi_p : V_p \rightarrow g(A)$ definida por $\xi_p(q) = \varphi(\tau_p(q), q)$ para todo $q \in V_p$ é tal que*

- $\xi_p(q) \in g(A)$ é o único ponto onde $\varphi(\cdot, q)|_{(-\epsilon + \tau_p(q), \epsilon + \tau_p(q))}$ intersecta $g(A)$. Em particular, $q \in g(A) \cap V_p$ se e somente se $\tau(q) = 0$.
- ξ_p é de classe $C^{\min\{k, r\}}$.

Demonstração. Tome h, V_p e ϵ como no Teorema 2.1.10. Para cada $q \in V_p$, $h(q) \in (-\epsilon, \epsilon) \times B(0, \epsilon)$. Defina $\tau_p : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ como $\tau_p(q) = -\pi_1 \circ h(q)$. Como $h(g(A) \cap V_p) = \{0\} \times B(0, \epsilon)$ e h é bijeção, segue que $\tau_p(q) = 0$ se e somente se $q \in g(A) \cap V_p$. Note que $\xi_p(q) = \varphi(\tau_p(q), q) \in g(A)$, pois $h(\xi_p(q)) = h(\varphi(\tau_p(q), q)) = \bar{\varphi}(\tau_p(q), h(q))$ onde $\bar{\varphi}$ denota o fluxo de X_C . Pela definição do campo e de τ_p , temos que $\pi_1(h(\xi_p(q))) = 0$, ou seja, $\tau_p(q) = 0$, e segue que $\xi_p(q) \in g(A)$. As demais propriedades de ξ_p também seguem do fato de h conjugar os campos X e X_C . \square

Neste trabalho, estamos interessados em campos vetoriais que satisfazem certas condições de transversalidade.

Definição 2.1.12. Sejam M, N variedades diferenciáveis, $S \subset N$ uma subvariedade de classe C^r , e $f : M \rightarrow N$ uma função de classe C^k , $k, r \geq 1$. Dizemos que f é transversal a S em $p \in M$ se $f(p) \notin S$ ou

$$df(p)(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N.$$

Se isto é válido para todo $p \in M$, dizemos que f é transversal a S . Dizemos que duas subvariedades $S_1, S_2 \subset M$ são transversais quando a inclusão $i_1 : S_1 \rightarrow M$ é transversal a S_2 .

Proposição 2.1.13. *Sejam M, N variedades diferenciáveis, $S \subset N$ uma subvariedade, $f : M \rightarrow N$ uma função, $p \in f^{-1}(S)$, $\varphi_S : U \rightarrow V \times W$ o difeomorfismo (da definição de subvariedade) em $f(p)$ e $V_p \subset M$ uma vizinhança de p tal que $f(V_p) \subset U$. Temos que f é transversal a S em V_p se, e somente se, 0 é um valor regular de $\pi_2 \circ \varphi \circ f|_{V_p}$, onde $\pi_2 : V \times W \rightarrow W$ é a projeção.*

Demonstração. Primeiramente, notamos que $(\pi_2 \circ \varphi \circ f|_{V_p})^{-1}(0) = (\varphi \circ f|_{V_p})^{-1} \circ \pi_2^{-1}(0) = (\varphi \circ f|_{V_p})^{-1}(V \times \{0\})$. Pela definição de variedade, $\varphi(S \cap U) = V \times \{0\}$, e a injetividade de φ garante a igualdade $S \cap U = \varphi^{-1}(V \times \{0\})$. Logo,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ f|_{V_p})^{-1}(V \times \{0\}) &= (f|_{V_p})^{-1} \circ \varphi^{-1}(V \times \{0\}) \\ &= (f|_{V_p})^{-1}(S \cap U) \\ &= (f|_{V_p})^{-1}(S) \cap (f|_{V_p})^{-1}(U) \\ &= (f|_{V_p})^{-1}(S) \cap V_p \\ &= f^{-1}(S) \cap V_p. \end{aligned}$$

Agora, observamos que $d(\pi_2 \circ \varphi \circ f|_{V_p}) = d(\pi_2 \circ \varphi) \circ d(f|_{V_p})$. Como φ é difeomorfismo, $d\varphi$ é isomorfismo, e portanto $d\pi_2 \circ d\varphi = d(\pi_2 \circ \varphi)$ é sobrejetiva. Mas $\ker d(\pi_2 \circ \varphi)$ é justamente o espaço tangente a $S \cap U$ que, para cada ponto, é s -dimensional. Como o espaço tangente a 0 em W é $(n - s)$ -dimensional, em cada $q \in U$ $d(\pi_2 \circ \varphi)$ restrita ao subespaço de $T_q N$ ortogonal a $T_q S$ é isomorfismo. Assim, $d(\pi_2 \circ \varphi \circ f|_{V_p})$ é sobrejetiva se e só se a imagem de $df|_{V_p}$ cobre tal subespaço. Mas isto acontece se e só se $T_q S + \text{Im } f|_{V_p} = T_q N$, ou seja, se e só se f é transversal a S em $q \in V_p$, o que encerra a demonstração. \square

Corolário 2.1.14. *Se $f : M \rightarrow N$ é de classe C^r e transversal a uma subvariedade $S \subset N$ de classe C^r , então $f^{-1}(S)$ é subvariedade de classe C^r de M .*

Corolário 2.1.15. *Se $S_1, S_2 \subset M$ são subvariedades transversais, então $S_1 \cap S_2$ é subvariedade de M e $\dim S_1 \cap S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - n$.*

Vale notar que, se $\dim S_1 + \dim S_2 < n$, então $\dim(T_p S_1 + T_p S_2) \leq \dim S_1 + \dim S_2 < n = \dim T_p M$, para todo $p \in S_1 \cap S_2$. Logo, as subvariedades S_1 e S_2 não são transversais. Também tendo em vista o corolário anterior, é comum dizer que duas subvariedades *se intersectam transversalmente* quando forem transversais.

2.2 Teoria de Morse Clássica

Nesta seção, restringimos o estudo de fluxos em uma variedade para o estudo de fluxos gradientes de uma função de Morse. Estes fluxos possuem propriedades interessantes como o Lema 2.2.6 e o Teorema 2.2.8. O principal objetivo desta seção é investigar quais informações sobre a topologia de uma variedade M podem ser extraídas a partir do estudo de um fluxo gradiente de uma função de Morse em M . Os Teoremas 2.2.19 e 2.2.21 resumem o que chamamos de Teoria de Morse Clássica, veja [2]. As principais referências para esta seção são [1], [5], [14] e [22].

Fixaremos, a partir de agora, uma variedade (infinitamente) diferenciável, compacta e sem bordo M , de dimensão n . Além disso, assumiremos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ . Lembramos

que um ponto $x \in M$ é um *ponto crítico* de f quando $df(x) \equiv 0$. Denotaremos o conjunto dos pontos críticos de f por $\text{Crit}f$.

Definição 2.2.1. (Hessiana) Seja $p \in \text{Crit}f$, e (x, U) carta local de M em p . Definimos a matriz Hessiana de f em p , $S(f, p, x)$, como

$$S_{ij} := \frac{\partial^2 (f \circ x^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(x(p)), \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Como f é de classe C^2 , o teorema de Schwarz garante que a matriz é simétrica. Dizemos que p é ponto crítico *não degenerado* de f se a matriz S_{ij} é não singular. Chamamos de *Hessiana de f em p* a forma bilinear simétrica em correspondência com a matriz, isto é, $H_p^f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $H_p^f(u, v) = [dx_p(u)]^T S [dx_p(v)]$. Observamos que nenhuma definição aqui depende da carta local usada.

Definição 2.2.2. Dada a matriz Hessiana de f em $p \in \text{Crit}f$, $S(f, p)$, o *índice de Morse de p* , que denotamos por $\text{ind}_f(p)$, é o número de autovalores negativos da matriz Hessiana.

Proposição 2.2.3. *Todo ponto singular não degenerado de f é isolado.*

Demonstração. Seja p um ponto singular não degenerado. Tome (y, U) uma carta local de p . Definimos a função $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$F(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}(x) \right).$$

Note que $F(x) = 0$ se, e somente se, $x \in \text{Crit}f$. Particularmente, $F(p) = 0$. Temos que a matriz da derivada de F é justamente a matriz Hessiana de f , que é não singular em p por hipótese. Pelo Teorema da Função Inversa, F é um difeomorfismo em alguma vizinhança $V \subset U$. A injetividade garante que $F(x) \neq 0$, para todo $x \in V \setminus \{p\}$. Logo, p é isolado, como desejado. \square

Definição 2.2.4. Dizemos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é *função de Morse* se todos seus pontos críticos são não degenerados.

O teorema a seguir, que não será demonstrado neste trabalho, mostra que não há perda de generalidade em trabalharmos com funções de Morse. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1].

Teorema 2.2.5. *O conjunto das funções de Morse é aberto e denso em $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

O importante resultado a seguir mostra que, numa vizinhança de um ponto crítico não degenerado de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, existem coordenadas locais nas quais f é uma forma quadrática canônica.

Lema 2.2.6. (Lema de Morse) Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função de Morse e $p \in \text{Crit}f$. Então existe uma carta local (y, U) , $p \in U$, tal que $y(p) = 0$ e

$$f(q) = f(p) - (y_1)^2 - \cdots - (y_k)^2 + (y_{k+1})^2 + \cdots + (y_n)^2,$$

onde $k = \text{ind}_f(p)$.

Demonstração. Tome (x, V) carta local de p tal que $x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) = 0$. Diminuindo V se necessário, podemos considerar $f \circ x^{-1}(tx_1, \dots, tx_n)$, com $t \in \mathbb{R}$ num aberto que contém $[0, 1]$. Desta forma,

$$f(q) - f(p) = \int_0^1 \frac{d(f \circ x^{-1})}{dt}(tx_1, \dots, tx_n) dt = \int_0^1 \sum x_i \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

Definindo as funções suaves $g_i(q) := \int_0^1 \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt$, escrevemos f como a combinação

$$f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(q).$$

Note que $g_i(p) = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Repetindo o processo para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, obtemos funções h_{ij} , $j \in \{1, \dots, n\}$, tais que $g_i(q) = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(q)$. Substituindo na expressão anterior, obtemos

$$f(q) - f(p) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i x_j h_{ij}(q). \quad (2.2.1)$$

Como podemos supor que $h_{ij} = h_{ji}$ (bastaria definirmos $\bar{h}_{ij} = \frac{h_{ij} + h_{ji}}{2}$), o que obtemos foi uma representação local de f por uma forma quadrática simétrica (a menos da constante $f(p)$). Note que a matriz Hessiana de f em p é

$$S_{ij}(p) = \frac{\partial^2(f \circ x^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(0, \dots, 0) = 2h_{ij}(p). \quad (2.2.2)$$

Como p é ponto crítico não degenerado, podemos assumir que $\frac{\partial^2(f \circ x^{-1})}{\partial x_1^2}(0, \dots, 0) \neq 0$. Assim, $h_{11}(p) \neq 0$ e, pela continuidade, $h_{11}(q) \neq 0$ para todo q em uma vizinhança $U_1 \subset V$ de p . Faremos a mudança de coordenadas

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_1 = \sqrt{|h_{11}|} \left(x_1 + \sum_{i=2}^n x_i \frac{h_{1i}}{h_{11}} \right)$$

que satisfaz

$$y_1^2 = \begin{cases} h_{11}x_1^2 + 2\sum_{i=2}^n x_1x_ih_{1i} + \frac{1}{h_{11}}(\sum_{i=2}^n x_ih_{1i})^2 & \text{se } h_{11} > 0, \\ -h_{11}x_1^2 - 2\sum_{i=2}^n x_1x_ih_{1i} - \frac{1}{h_{11}}(\sum_{i=2}^n x_ih_{1i})^2 & \text{se } h_{11} < 0. \end{cases}$$

Podemos então manipular a expressão 2.2.1 e

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= h_{11}x_1^2 + \sum_{i=1}^n h_{1i}x_1x_i + \sum_{j=1}^n h_{j1}x_jx_1 + \sum_{i,j=2}^n h_{ij}x_ix_j \\ &= h_{11}x_1^2 + 2\sum_{i=1}^n h_{1i}x_1x_i + \sum_{i,j=2}^n h_{ij}x_ix_j. \\ f(q) - f(p) &= \begin{cases} y_1^2 - \frac{1}{h_{11}}(\sum_{i=2}^n x_ih_{1i})^2 + \sum_{i,j=2}^n h_{ij}x_ix_j & \text{se } h_{11} > 0, \\ -y_1^2 - \frac{1}{h_{11}}(\sum_{i=2}^n x_ih_{1i})^2 + \sum_{i,j=2}^n h_{ij}x_ix_j & \text{se } h_{11} < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

onde as somas do último termo dependem apenas de x_2, \dots, x_n . Através de indução finita, obtemos coordenadas (y_1, \dots, y_n) tais que

$$f(q) - f(p) = -y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2,$$

como desejado. Note que esta é a representação de f por uma forma bilinear em outro sistemas de coordenadas, assim, segue diretamente de 2.2.2 que $k = \text{ind}_f p$. \square

Proposição 2.2.7. *Se f é uma função de Morse em M , então $|\text{Crit}f| < \infty$.*

Demonstração. Suponha que existam infinitos pontos críticos e tome uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de tais pontos tais que $x_i \neq x_j, i \neq j$. Como M é compacta, passando para uma subsequência se necessário, podemos supor que existe $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Como f é C^∞ , df é contínua, portanto, $x \in \text{Crit}f$. Mas então x não é isolado, contradizendo a Proposição 2.2.3. \square

Seja g uma métrica Riemanniana, isto é, uma função que associa a cada $p \in M$ um produto interno $g_p(\cdot, \cdot) : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer X, Y campos vetoriais suaves em M , a função $p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ é suave. Note que, para cada $p \in M$, $df_p(\cdot)$ é um funcional linear contínuo em T_pM . Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único vetor v_p tal que $g_p(v_p, u) = df_p(u)$, para todo $u \in T_pM$. Definimos então o *campo gradiente de f* como $\nabla^g f : M \rightarrow \cup_{p \in M} T_pM$ dado por $\nabla^g f(p) = v_p \in T_pM$, que possui a mesma classe de diferenciabilidade que df . Chamaremos de *fluxo gradiente negativo* o fluxo global gerado por $-\nabla^g f$.

Teorema 2.2.8. *O fluxo gradiente negativo de uma função de Morse f em M satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Seja $p \in M \setminus \text{Crit}f$. Então f é estritamente decrescente na órbita $\mathcal{O}(p)$. Além disso, $\mathcal{O}(p)$ é não fechada, intersecta $f^{-1}(f(p))$ apenas uma vez, e a interseção é ortogonal com respeito a g .*

2. $\alpha(p) \cup \omega(p) \subset \text{Crit}f$.

Demonstração. Para mostrar 1, basta calcular a variação de f nas órbitas, isto é, se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ é tal que $\gamma'(t) = -\nabla^g f(\gamma(t))$, então

$$\frac{df \circ \gamma}{dt} = df_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) = g(\nabla^g f(\gamma(t)), \gamma'(t)) = -|\nabla^g f(\gamma(t))|^2 \leq 0.$$

Temos que a igualdade vale apenas se $-\nabla^g f(\gamma(t)) = 0$, ou seja, $\gamma(t) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que equivale a dizer que p é um ponto crítico. Logo, em órbitas não singulares, f é estritamente decrescente. Se $\mathcal{O}(p)$ órbita fechada, teríamos que $\gamma(0) = \gamma(T)$, onde $T > 0$ é o período da órbita, mas $f(\gamma(0)) > f(\gamma(T))$, absurdo. Por motivo análogo, γ não pode intersectar $f(p)$ mais de uma vez. A interseção é ortogonal pois, notando que $f^{-1}(f(p))$ é (localmente) subvariedade de dimensão $n - 1$ e tomando u no espaço tangente a esta em p , $df_p(u) = 0$, logo, $g_p(\nabla^g f(p), u) = 0$.

Para mostrar 2, suponha que exista $q \in \omega(p)$ tal que $-\nabla^g f(q) \neq 0$. Seja $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ o fluxo gradiente negativo e tome sequência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p) = q$. Como $-\nabla^g f(q) \neq 0$, a órbita de q é regular. Temos agora dois casos a considerar: as órbitas de q e p são iguais ou não. O primeiro caso é impossível pois, caso contrário,

$$f(q) = f(\varphi(t_0, p)) > f(\varphi(t_0 + 1, p)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi(t_n, p)) = f(q), \quad (2.2.3)$$

o que é uma contradição. Considere então a subvariedade (local) de dimensão $n - 1$ dada por $S = f^{-1}[f(q)] \cap U$, para alguma vizinhança U de q que não contenha nenhum ponto crítico. Como $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$, tomando n tal que $\varphi(t_n, p) \in U$, o Teorema do Fluxo Tubular garante que $\varphi(\cdot, p)|_{[t_n, \infty)}$ intersecta S , digamos, em $\varphi(t_0, p)$. Mas então repetimos a desigualdade 2.2.3 e geramos a outra contradição desejada. Concluimos que $\omega(p) \subseteq \text{Crit}f$. A demonstração para $\alpha(p)$ é análoga. \square

Corolário 2.2.9. *Se f é uma função de Morse então, para todo $p \in M$, temos que $\alpha(p) = \{\bar{q}\}$ e $\omega(p) = \{q\}$, onde q e \bar{q} são pontos críticos de f .*

Demonstração. Seja $q \in \omega(p)$. Pelo teorema anterior temos que $-\nabla^g f(q) = 0$. Pelo Teorema 2.1.9, $\omega(p)$ é conexo. Como f é função de Morse, q é isolado, logo existe vizinhança aberta V_q de q tal que $V_q \cap \omega(p) = \{q\}$. Se $\omega(p)$ tivesse pelo menos dois pontos diferentes, poderíamos tomar $q_0 \in \omega(p)$ e

$$\omega(p) = \cup_{q \in \omega(p)} \{q\} = \cup_{q \in \omega(p)} (V_q \cap \omega(p)) = (V_{q_0} \cap \omega(p)) \cup (\cup_{q \neq q_0} V_q \cap \omega(p)),$$

o que contradiz a conexidade de $\omega(p)$. Logo, $\omega(p) = \{q\}$, e o resultado é análogo para $\alpha(p)$. \square

Observação 2.2.10. No corolário anterior, se $p \notin \text{Crit}f$, temos sempre que $q \neq \bar{q}$. De fato, se $q = \bar{q}$, então para todo x na órbita de p , $f(q) = f(\bar{q}) \leq f(x) \leq f(q)$, logo, $-\nabla^g f(x) = 0$. Dessa forma, teríamos infinitos pontos críticos, o que contradiz a Proposição 2.2.7.

Definição 2.2.11. Seja $p \in \text{Crit}f$.

- A variedade instável de p é $W^u(p) := \{q \in M : \alpha(q) = p\}$;
- A variedade estável de p é $W^s(p) := \{q \in M : \omega(q) = p\}$.

O teorema a seguir garante que, para qualquer $p \in \text{Crit}f$, $W^u(p)$ e $W^s(p)$ são de fato subvariedades sem bordo de M .

Teorema 2.2.12. (Teorema da Variedade Estável) *Sejam f uma função de Morse, $p \in \text{Crit}f$ e $k = \text{ind}_f(p)$. Então $W^s(p)$ é uma subvariedade de M , sem bordo, e seu espaço tangente em p é o espaço estável do fluxo, o subespaço $E^s \subseteq T_pM$, gerado pela derivada (linearização) de $-\nabla^g f$. Além disso, $W^s(p)$ é imagem de uma imersão de um disco aberto $(n - k)$ -dimensional em M .*

A demonstração deste teorema encontra-se em [22]. Notamos também que, se f é função de Morse, $-f$ também é e, como $\omega_f(q) = \alpha_{-f}(q)$, temos que $W_f^s(p) = W_{-f}^u(p)$. Logo, o resultado acima é válido para $W^u(p)$, com espaço tangente $E^u(p) \subset T_pM$, sendo uma imersão de um disco k -dimensional.

Corolário 2.2.13. *Nas condições do Teorema 2.2.12, temos*

$$\dim W^s(p) = n - \text{ind}_f(p) = \dim E^s(p), \quad \dim W^u(p) = \text{ind}_f(p) = \dim E^u(p).$$

Definição 2.2.14. Dados $p, q \in \text{Crit}f$, com f de Morse, definimos a *variedade conectante de p e q* como:

$$\mathcal{M}_{pq} = \mathcal{M}_{pq}(f, g) = W^u(p) \cap W^s(q).$$

Se a é um valor regular entre $f(q)$ e $f(p)$, definimos o *espaço moduli* entre x e y como $\widehat{\mathcal{M}}_{pq} := \mathcal{M}_{pq} \cap f^{-1}(a)$.

Note que, quando $W^u(p)$ e $W^s(q)$ são subvariedades transversais, o Corolário 2.1.15 garante que \mathcal{M}_{pq} é uma subvariedade de M .

Definição 2.2.15. O campo gradiente negativo $-\nabla^g f$ de uma função de Morse f satisfaz a *condição de Morse-Smale* quando $W^u(p)$ intersecta transversalmente $W^s(q)$, para quaisquer $p, q \in \text{Crit}f$. Nesse caso, dizemos que (f, g) é um *par de Morse-Smale*.

O teorema seguinte mostra que não perdemos muito quando escolhemos trabalhar apenas com campos que satisfazem a condição de Morse-Smale. Sua demonstração pode ser encontrada em [20].

Teorema 2.2.16. *Sejam f uma função de Morse e g uma métrica Riemanniana suave em M . Então $-\nabla^g f$ pode ser C^1 -aproximado por um campo vetorial suave $X = -\nabla^{\widehat{g}} \widehat{f}$, sendo $(\widehat{f}, \widehat{g})$ um par Morse-Smale.*

Teorema 2.2.17. *Seja f uma função de Morse tal que $-\nabla^g f$ satisfaz a condição de Morse-Smale. Então, para quaisquer $p, q \in \text{Crit}f$, temos:*

1. \mathcal{M}_{pq} e $\widehat{\mathcal{M}}_{pq}$ são subvariedades de M , sem bordo;
2. Se $\text{ind}_f(p) \geq \text{ind}_f(q)$ então $\dim \mathcal{M}_{pq} = \text{ind}_f(p) - \text{ind}_f(q)$ e $\dim \widehat{\mathcal{M}}_{pq} = \dim \mathcal{M}_{pq} - 1$;
3. Se $\text{ind}_f(p) < \text{ind}_f(q)$, então $\mathcal{M}_{pq} = \emptyset$;
4. $\mathcal{M}_{pp} = \{p\}$;
5. Se $\text{ind}_f(p) = \text{ind}_f(q)$ e $p \neq q$, então $\mathcal{M}_{pq} = \emptyset$;
6. Se $\mathcal{M}_{pq} \neq \emptyset$ e $p \neq q$, então $\text{ind}_f(p) > \text{ind}_f(q)$.

Demonstração. (1), (2) e (3) seguem da condição de transversalidade, do Corolário 2.1.15 e do Teorema 2.2.12.

(4) Se p é ponto crítico então $\omega(p) = \alpha(p) = \{p\}$ e, portanto, $p \in \mathcal{M}_{pp}$. Por outro lado, suponha que exista $q \in \mathcal{M}_{pp}$, $q \neq p$. Então $\alpha(q) = \omega(q) = \{p\}$, o que é uma contradição pela Observação 2.2.10.

(5) Suponha que \mathcal{M}_{pq} não seja vazio. Então existe $x \in \mathcal{M}_{pq}$, com $x \notin \text{Crit}f$. Logo $\mathcal{O}(x) \subset \mathcal{M}_{pq}$, já que o conjunto ω -limite é o mesmo para cada ponto da órbita, e analogamente para o conjunto α -limite. Como x não é ponto crítico, $\mathcal{O}(x)$ é regular, e portanto é a imagem de uma imersão de \mathbb{R} em M , ou seja, $\mathcal{O}(x)$ tem dimensão 1. Isto contradiz o fato que $\dim \mathcal{M}_{pq} = 0$ pelo item 2, portanto, $\mathcal{M}_{pq} = \emptyset$.

(6) Segue diretamente de (3) e (5). □

Observe que obtemos algumas decomposições interessantes do espaço quando (f, g) é Morse-Smale: segue do Corolário 2.2.9 que, para todo $x \in M$ existe $p \in \text{Crit}f$ com $x \in W^u(p)$ e, se $p \neq q \in \text{Crit}f$, então $W^u(p) \cap W^u(q) = \emptyset$. Assim, as variedades instáveis do fluxo gradiente negativo formam uma cobertura disjunta $M = \dot{\bigcup}_{p \in \text{Crit}f} W^u(p)$. Pelos mesmos motivos, temos que $M = \dot{\bigcup}_{p \in \text{Crit}f} W^s(p)$. Combinando as duas igualdades, obtemos ainda a decomposição $M = \cup_{p, q \in \text{Crit}f} (W^u(p) \cap W^s(q))$. Além disso, como $W^u(p)$ intersecta transversalmente $W^s(q)$ e $W^u(p) \cap W^s(p) = \{p\}$, então $T_p M = T_p W^u(p) \oplus T_p W^s(p)$.

Proposição 2.2.18. *Se $\text{ind}_f(p) - \text{ind}_f(q) = 1$ e não existem valores críticos em $(f(q), f(p))$, então $|\widehat{\mathcal{M}}_{pq}| < \infty$.*

Demonstração. Se \mathcal{M}_{pq} é vazio, não há o que demonstrar. Suponha então $\mathcal{M}_{pq} \neq \emptyset$. Tome $a \in (f(q), f(p))$ valor regular e assim $\widehat{\mathcal{M}}_{pq} = \mathcal{M}_{pq} \cap f^{-1}(a)$. Tomando ϵ como o mínimo entre $\frac{f(p)-f(a)}{2}$ e $\frac{f(a)-f(q)}{2}$, defina

$$S^u = f^{-1}(f(p) - \epsilon) \cap W^u(p), \quad S^s = f^{-1}(f(q) + \epsilon) \cap W^s(q).$$

Como não há valores críticos em $(f(q), f(p))$, existe T_1 suficientemente grande tal que $f(\varphi(T_1, s_u)) > a$ para todo $s_u \in S^u$. Da mesma forma, tomamos T_2 tal que $f(\varphi(-T_2, s_s)) < a$, para todo $s_s \in S^s$. Assim, se $T = \max\{T_1, T_2\}$, temos $f^{-1}(a) \cap W^u(p) \subset \varphi_{[0, T]} S^u$ e $f^{-1}(a) \cap W^s(q) \subset \varphi_{[-T, 0]} S^s$ pela continuidade da f . Com isso,

$$f^{-1}(a) \cap \varphi_{[0, T]} S^u \cap \varphi_{[-T, 0]} S^s = f^{-1}(a) \cap W^u(p) \cap W^s(q) = \widehat{\mathcal{M}}_{pq}.$$

Como os conjuntos $f^{-1}(a)$, $\varphi_{[0, T]} S^u$ e $\varphi_{[-T, 0]} S^s$ são fechados, sua interseção $\widehat{\mathcal{M}}_{pq}$ é fechada. Sendo M compacta, temos que $\widehat{\mathcal{M}}_{pq}$ é compacto. Como sua dimensão é zero, segue que $|\widehat{\mathcal{M}}_{pq}| < \infty$. \square

Agora, estudaremos relações entre a topologia de uma variedade fechada M e algumas propriedades do fluxo gradiente gerado por uma função de Morse f em M . Demonstraremos alguns teoremas importantes que constituem uma teoria que hoje é conhecida como Teoria Clássica de Morse.

Nas demonstrações dos resultados desta e das próximas seções, permitiremos algumas alterações oportunas em uma função de Morse f , que não alterem significativamente o fluxo. Mais especificamente, em alguns resultados, assumiremos que f possui uma ou mais entre as propriedades listadas a seguir:

1. Dados $p, q \in \text{Crit} f$, podemos assumir que $f(p) \neq f(q)$.

Caso tivéssemos p, q pontos críticos com imagens iguais sob f , poderíamos tomar uma vizinhança aberta V_p de p tal que não há outros pontos críticos em $\overline{V_p}$, tomar outra vizinhança aberta $U_p \subset V_p$ de p , e definir uma função suave $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça $\rho(U_p) = 1$ e $\rho(\overline{V_p}^c) = 0$.

O conjunto $W_p := \overline{V_p} - U_p$ é compacto, não possui pontos críticos de f e as funções f e ρ são suaves, logo $\inf_{W_p} |-\nabla^g f| = \min_{W_p} |-\nabla^g f| > 0$, $\sup_{W_p} |\nabla^g \rho| = \max_{W_p} |\nabla^g \rho| < \infty$. Tomando $\epsilon < \frac{\min_{W_p} |-\nabla^g f|}{\max_{W_p} |\nabla^g \rho|}$, consideremos a função $\bar{f}(x) = f(x) + \epsilon \rho(x)$ definida em M . Em U_p e em $\overline{V_p}^c$ ρ é constante, $\nabla^g \rho = 0$, então $-\nabla^g \bar{f} = -\nabla^g f$ e os pontos críticos coincidem com os de f nestes conjuntos, sendo todos também não degenerados. Agora, em W_p ,

$$|-\nabla^g \bar{f}| = |-\nabla^g f - \epsilon \nabla^g \rho| \geq |-\nabla^g f| - \epsilon |\nabla^g \rho| > 0,$$

e portanto todos os pontos críticos em M de \bar{f} coincidem com os de f . Mas $\bar{f}(p) = f(p) + \epsilon \rho(p) = f(p) + \epsilon > f(q) = \bar{f}(q)$, e portanto \bar{f} tem a propriedade $\bar{f}(p) \neq \bar{f}(q)$, sem alterações significativas na dinâmica. Como f tem finitos pontos críticos, por indução finita podemos assumir que, para todo $p_1, p_2 \in \text{Crit} f$, $f(p_1) \neq f(p_2)$.

2. Sejam $p, q \in \text{Crit} f$ tais que $\text{ind}_f(q) = \text{ind}_f(p) - 1$ e $\mathcal{M}_{pq} \neq \emptyset$. Se $-\nabla^g f$ satisfaz a condição de Morse-Smale, podemos assumir que p e q são os únicos pontos críticos em $f^{-1}([f(q), f(p)])$. Podemos supor que f não assume valores negativos, pois já que a variedade é compacta,

bastaria tomarmos $\bar{f}(x) = f(x) - \inf_M f(x)$. Seja $S = \{z_i\}$ o conjunto dado por todos os pontos $z_i \in \text{Crit}f$, $z \neq p$, tais que $\text{ind}_f(z) \geq \text{ind}_f(p)$, juntamente com todas as órbitas conectantes $\mathcal{M}_{z_i z_j}$. Tome $C > f(p) - \inf_M f(x)$ e, semelhantemente ao item anterior, tome V_S vizinhança aberta de S que não contém nenhum outro ponto crítico além daqueles em S , $U_S \subset V_S$ outra vizinhança aberta de S e $W_S = \bar{V}_S - U_S$. Se $\epsilon^* < \min_{z \in \text{Crit}f \cap S} \{f(z) - \inf_{x \in U_S} f(x)\}$, tome $\theta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ suave com

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t \geq \epsilon^* \end{cases}$$

e monótona em $(0, 1)$. Tome $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave satisfazendo $\rho(U_S) = 1$, $\rho(V_S^c) = 0$ e $\langle \nabla^g \rho, \nabla^g f \rangle > 0$ em W_S , o que é possível pelo fato de $-\nabla^g f$ satisfazer a condição de Morse-Smale, e portanto $\mathcal{M}_{pz} = \emptyset$ para cada $z \in \text{Crit}f \cap S$. Defina a função $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \rho(x)f(x) - \inf_{x \in U_S} f(x).$$

Assim, g é suave e $U_S \subset g^{-1}([0, \infty)) \subset V_S$. Consideremos

$$\bar{f}(x) = f(x) + C\theta(g(x)).$$

Temos que $\bar{f}(x) = f(x)$ em V_S^c e

$$\bar{f}(z) = f(z) + C\theta(g(z)) = f(z) + C\theta(f(z) - \inf_{U_S} f) = f(z) + C > f(p)$$

para $z \in \text{Crit}f \cap S$. Além disso, $-\nabla^g \bar{f} = -\nabla^g f$ em $(g^{-1}(0, \epsilon^*))^c$ e

$$\begin{aligned} -\nabla^g \bar{f}(x) &= -\nabla^g f(x) - C(\theta' \circ g)(x) \nabla^g g(x) \\ &= -\nabla^g f(x) - C(\theta' \circ g)(x)(f(x) \nabla^g \rho(x) + \rho(x) \nabla^g f(x)) \\ &= -\nabla^g f(x)(1 + C\rho(x)(\theta' \circ g)(x)) - C(\theta' \circ g)(x)f(x) \nabla^g \rho(x) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

pela condição colocada em $\nabla^g \rho$. Então \bar{f} possui os mesmos pontos críticos de f e $S \subset f^{-1}(f(q), \infty)$, como desejado. Note que todos os pontos críticos de \bar{f} e f pertencem ao interior de $(g^{-1}(0, \epsilon^*))^c$, portanto, como os gradientes são iguais neste conjunto, os pontos críticos de \bar{f} também são não degenerados. Analogamente, podemos fazer com que o conjunto dos pontos $z \in \text{Crit}f$ tais que $\text{ind}_f(z) \leq q$ e $z \neq q$ esteja contido em $f^{-1}(-\infty, f(q))$.

3. Se $p \in \text{Crit}f$ e $\text{ind}_f(p) = k$, podemos assumir que $f(p) = k$.

Neste caso, dizemos que f é uma função de Morse *auto indexante*. Esta demonstração pode ser encontrada em [20].

Teorema 2.2.19. *Sejam f uma função de Morse, $a < b \in \mathbb{R}$ valores regulares de f , $M(a) := f^{-1}((-\infty, a])$ e $M(b) = f^{-1}((-\infty, b])$. Se não houver ponto crítico em $f^{-1}([a, b])$, então $M(a)$ é difeomorfo a $M(b)$ e a subvariedade $f^{-1}([a, b])$ é difeomorfa a $f^{-1}(a) \times I$ e $f^{-1}(b) \times I$.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{df \circ \alpha}{dt}(0) \leq c < 0$ para toda curva integral $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) \in f^{-1}([a, b])$. Como $\frac{df \circ \alpha}{dt}(0) < 0$, se não existisse tal c , poderíamos construir uma sequência de curvas α_n tais que $\frac{df \circ \alpha_n}{dt}(0) \rightarrow 0$. Como $[a, b]$ é compacto e f é contínua, passando para subsequência se necessário, teríamos que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(0) \in f^{-1}([a, b])$. Consequentemente, $\varphi(t, p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde φ é o fluxo gradiente negativo. Como $p \in f^{-1}([a, b])$, teríamos que $f(p) \in [a, b]$, contradizendo a hipótese.

Assim, para todo $x \in f^{-1}(b)$, existe $\tau(x) > 0$ tal que $\varphi(\tau(x), x) \in f^{-1}(a)$, pois, tomando α curva integral com $\alpha(0) = x$ e $t \in [0, \frac{a-b}{c}]$, temos que

$$f(\alpha(t)) = f(\alpha(0)) + \int_0^t \frac{df \circ \alpha}{dt}(s) ds \leq b + tc < a,$$

e a continuidade da função (Teorema do Valor Intermediário) garante a existência de $\tau(x)$. Como $\tau(x)$ é suave em x , temos que a função $h_b : f^{-1}(b) \times I \rightarrow f^{-1}([a, b])$ dada por $h(x, t) = \varphi(t\tau(x), x)$ é difeomorfismo, com inversa $h^{-1}(y) = (\varphi(\alpha(y), y), -\alpha(y))$, onde $\alpha(y) < 0$ é tal que $\varphi(\alpha(y), y) \in f^{-1}(b)$. Restringindo α a $f^{-1}(a)$, obtemos $h_a : f^{-1}(a) \times I \rightarrow f^{-1}([a, b])$ dada por $h_a(x, t) = \varphi(t\alpha(x), x)$, que analogamente é um difeomorfismo. Notamos que as aplicações $x \rightarrow h_a(x, 0)$ e $x \rightarrow h_b(x, 0)$ coincidem com a identidade em $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$, respectivamente.

Como o número de pontos críticos de f é finito, existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \min\{a - d\}$, para d variando entre valores críticos de f menores que a . Então $[a - \epsilon, b]$ e $[a - \epsilon, a]$ estão nas mesmas hipóteses que $[a, b]$, e podemos obter difeomorfismos $h_{a-\epsilon} : f^{-1}(a - \epsilon) \times I \rightarrow f^{-1}([a - \epsilon, b])$ e $h_{a-\epsilon}^* : f^{-1}(a - \epsilon) \times I \rightarrow f^{-1}([a - \epsilon, a])$ tais que as aplicações $x \rightarrow h_{a-\epsilon}(x, 0)$ e $x \rightarrow h_{a-\epsilon}^*(x, 0)$ coincidem com a identidade em $f^{-1}(a - \epsilon)$. Desta forma, $h_{a-\epsilon}^* \circ h_{a-\epsilon}^{-1}$ é difeomorfismo entre $f^{-1}([a - \epsilon, b])$ e $f^{-1}([a - \epsilon, a])$ que fixa $f^{-1}(a - \epsilon)$. Obtemos então um difeomorfismo $h : M(b) \rightarrow M(a)$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in f^{-1}((-\infty, a - \epsilon)), \\ h_{a-\epsilon}^* \circ h_{a-\epsilon}^{-1}(x), & x \in f^{-1}([a - \epsilon, b]). \end{cases}$$

□

O Teorema 2.2.19 diz que a topologia de $M(a)$ não muda quando a passa por valores regulares. Mostraremos a seguir que as alterações ocorrem justamente quando a passa através de um valor crítico de f .

Definição 2.2.20. Sejam f uma função de Morse, $p \in \text{Crit}f$ e $k = \text{ind}_f p$. Tomando coordenadas locais como no Lema 2.2.6 em uma vizinhança U de p tal que $U \cap \text{Crit}f = \{p\}$, definimos uma

alça para o ponto p como um conjunto da forma

$$H(\epsilon) = \{(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n) \in U : |x|^2 \leq 2\epsilon, |y|^2 \leq \epsilon\},$$

onde $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_k^2$ e $|y|^2 = y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2$.

Uma alça para um ponto crítico p de índice k é simplesmente uma vizinhança de p que é difeomorfa a $D^k \times D^{n-k}$. Esta será usada para descrever a mudança na topologia que ocorre entre $M(c - \epsilon)$ e $M(c + \epsilon)$, onde $c = f(p)$. Veja Figura 2.2.1.

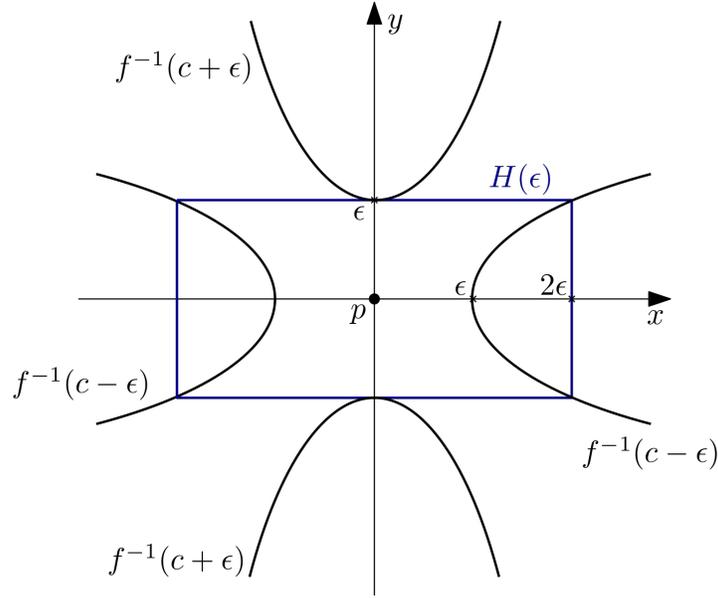


Figura 2.2.1: A alça $H(\epsilon)$ para o ponto crítico p .

Teorema 2.2.21. *Sejam f função de Morse, $p \in \text{Crit}f$ e $c = f(p)$. Tomando $\epsilon > 0$ de forma que p seja o único ponto crítico em $f^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$, temos que $M(c + \epsilon)$ é homeomorfo a $M(c - \epsilon) \cup H(\epsilon)$.*

Demonstração. Usaremos coordenadas locais numa vizinhança U de p como no Lema 2.2.6. Definimos, para $0 < r \leq 1$, o conjunto

$$M'(\epsilon, r) = M(c - \epsilon) \cup \{(x, y) : |x|^2 \leq (1 + r)\epsilon \text{ e } |y|^2 \leq r\epsilon\}.$$

Claramente, $M'(\epsilon, 1) = M(c - \epsilon) \cup H(\epsilon)$. Queremos agora estudar o bordo de $M'(\epsilon, r)$. Da definição de $M(c - \epsilon)$ segue que seu bordo é $f^{-1}(c - \epsilon)$ e, usando coordenadas locais, $\partial M(c - \epsilon) \cap U = \{(x, y) : |y|^2 - |x|^2 = -\epsilon\}$. Porém, se (x_0, y_0) neste conjunto é tal que $|y_0|^2 < r\epsilon$, temos

$$-\epsilon = |y_0|^2 - |x_0|^2 < r\epsilon - |x_0|^2$$

e portanto $|x_0|^2 < (1+r)\epsilon$. Logo, $(x_0, y_0) \in \text{Int} \{(x, y) : |x|^2 \leq (1+r)\epsilon \text{ e } |y|^2 \leq r\epsilon\} \subseteq \text{Int}M'(\epsilon, r)$. Assim, o conjunto dos pontos de $M(c-\epsilon) \cap U$ que estão no bordo de $M'(\epsilon, r)$ é $\{(x, y) : |y|^2 - |x|^2 = -\epsilon, |y|^2 \geq r\epsilon\}$. Além disso, todo ponto de $f^{-1}(c-\epsilon) \cap M \setminus U$ pertence a $\partial M'(\epsilon, r)$. Note que o bordo do conjunto $\{(x, y) : |x|^2 \leq (1+r)\epsilon \text{ e } |y|^2 \leq r\epsilon\}$ é dado por

$$\{(x, y) : |x|^2 = (1+r)\epsilon \text{ e } |y|^2 \leq r\epsilon\} \cup \{(x, y) : |x|^2 \leq (1+r)\epsilon \text{ e } |y|^2 = r\epsilon\}.$$

Mas, para (x_0, y_0) em $\{(x, y) : |x|^2 = (1+r)\epsilon \text{ e } |y|^2 \leq r\epsilon\}$, temos que $|y_0|^2 - |x_0|^2 \leq r\epsilon - (1+r)\epsilon = -\epsilon$, e assim os pontos desse conjunto que possivelmente estão no bordo de $M'(\epsilon, r)$ também estão no bordo de $M(c-\epsilon)$. O bordo $\partial M'(\epsilon, r)$ é, então

$$\begin{aligned} \partial M'(\epsilon, r) \cap U &= \{(x, y) : |y|^2 - |x|^2 = -\epsilon, |y|^2 \geq r\epsilon\} \cup \{(x, y) : |x|^2 \leq (1+r)\epsilon \text{ e } |y|^2 = r\epsilon\}, \\ \partial M'(\epsilon, r) \cap M \setminus U &= f^{-1}(c-\epsilon) \cap M \setminus U. \end{aligned}$$

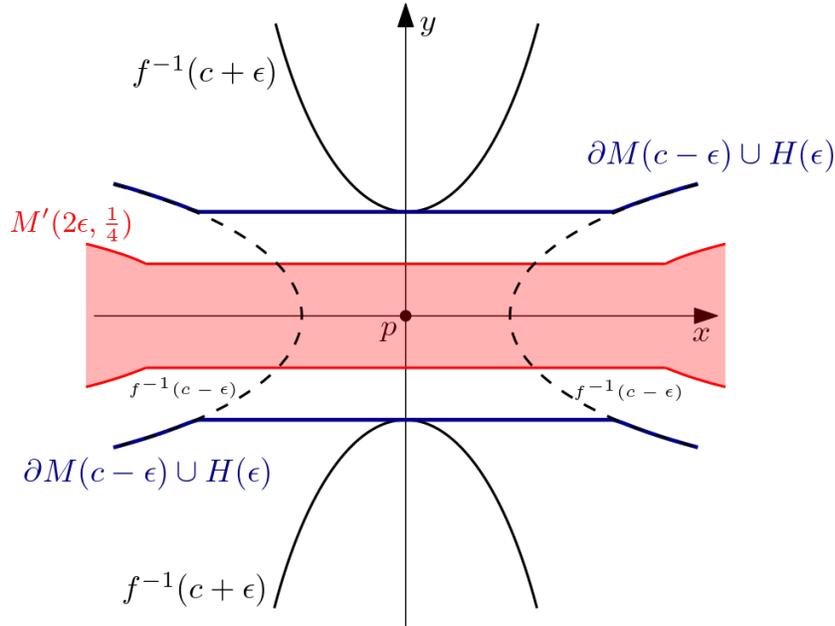


Figura 2.2.2: Representação de $\partial M(c-\epsilon) \cup H(\epsilon)$, $f^{-1}(c+\epsilon)$ e $M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$.

Mostraremos que $\partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ é transversal ao fluxo; veja Figura 2.2.2. Seja $x \in \partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$. Se $x \in f^{-1}(c-2\epsilon)$, a ortogonalidade em x segue do Teorema 2.2.8. Se $x \in \{(x, y) : |x|^2 \leq \frac{5\epsilon}{2} \text{ e } |y|^2 = \frac{\epsilon}{2}\}$, escreva $x = (x'_1, \dots, x'_k, y'_{k+1}, \dots, y'_n)$ e suponha que $-\nabla^g f(x) \in T_x \{(x, y) : |x|^2 \leq \frac{5\epsilon}{2} \text{ e } |y|^2 = \frac{\epsilon}{2}\}$. Então $y'_i = 0$ para todo $i \in \{k+1, \dots, n\}$ pois, na vizinhança onde as coordenadas fornecidas pelo Lema de Morse são válidas,

$$-\nabla^g f = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum y_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Segue que $x \in W^u(p) \subseteq \text{Int}M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$, o que é uma contradição. Agora, $\partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ é localmente

a imagem contínua de uma função $k : A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M$, pois $f^{-1}(c - 2\epsilon)$ é uma subvariedade de dimensão $n - 1$ e $\{(x, y) : |x|^2 \leq \frac{5\epsilon}{2} \text{ e } |y|^2 \leq \frac{\epsilon}{2}\}$ é difeomorfo a $D^k \times D^{n-k}$. Mostramos que estamos nas hipóteses do Teorema 2.1.10 e, pelo Corolário 2.1.11, para cada $q \in \partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ existem uma vizinhança V_q e funções $\tau_q : V_q \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi_q(y) = \varphi(\tau_q(y), y)$ contínuas tais que $\xi_q(y) \in \partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ é o único ponto no conjunto $\varphi(\mathbb{R}, y) \cap \partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ para cada $y \in V_q$. Note que, se $y \in V_q \cap V_{q'}$ para $q, q' \in \partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$, temos que $\tau_q(y) = \tau_{q'}(y)$ e portanto $\xi_q(y) = \xi_{q'}(y)$. Como $\partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ é compacto, obtemos uma cobertura $V_{q_1}, \dots, V_{q_\ell}$ de $\partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ e funções τ_{q_i}, ξ_{q_i} , $i \in \{1, \dots, \ell\}$ que coincidem nas interseções $V_{q_i} \cap V_{q_j}$. Definindo $V = \cup_i V_{q_i}$, obtemos funções contínuas $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi : V \rightarrow \partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ tais que $\tau|_{V_{q_i}} = \tau_{q_i}$, $\xi|_{V_{q_i}} = \xi_{q_i}$, para todo $i \in \{1, \dots, \ell\}$.

Para cada ponto $y \in f^{-1}(c + \epsilon)$, temos que ou $\varphi(t, y) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow \infty$ ou $f(\varphi(t_0, y)) = c - \epsilon$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ pelo Teorema 2.2.8 e pelo fato de p ser o único ponto crítico em $f^{-1}(c - 2\epsilon, c + 2\epsilon)$. Em ambos os casos, $\varphi(\mathbb{R}, y)$ intersecta $\partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$, e portanto intersecta V . Como o fluxo é contínuo, podemos encontrar $\bar{\tau} : f^{-1}(c + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua tal que $\bar{\xi}(y) := \varphi(\bar{\tau}(y), y) \in V$, $y \in f^{-1}(c + \epsilon)$. Obtemos $\alpha : f^{-1}(c + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua tal que $\xi \circ \bar{\xi}(y) := \varphi(-\alpha(y), y) \in \partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ para todo $y \in f^{-1}(c + \epsilon)$. Logo, $h : \partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4}) \times I \rightarrow M(c + \epsilon) \setminus \text{Int} M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ dada por $h(y, s) = \varphi(s\alpha(y), y)$ mapeia continuamente $\partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ em $f^{-1}(c + \epsilon)$.

Como $f^{-1}(c + \epsilon)$ também é ortogonal ao fluxo, compacto e é localmente a imagem contínua de um subconjunto de \mathbb{R}^{n-1} , e todo ponto de $\partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ passa por $f^{-1}(c + \epsilon)$ em tempo negativo, as funções obtidas possuem inversas contínuas, ou seja, h é um homeomorfismo. Repetindo os argumentos do parágrafo anterior, como $M(c - \epsilon) \cup H(\epsilon)$ também satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1.10 e todo ponto deste conjunto passa por $\partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$ pela ação do fluxo, obtemos homeomorfismo $\bar{h} : \partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4}) \times I \rightarrow M(c - \epsilon) \cup H(\epsilon) \setminus \text{Int} M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$. Como $h(\cdot, 0)$ e $\bar{h}(\cdot, 0)$ são a identidade em $\partial M'(2\epsilon, \frac{1}{4})$, podemos estender a composição $h \circ \bar{h}^{-1}$ assim como na demonstração do Teorema 2.2.19 e obter um homeomorfismo entre $M(c - \epsilon) \cup H(\epsilon)$ e $M(c + \epsilon)$, como desejado. \square

Sendo $p \in \text{Crit} f$, subentendidas as coordenadas fornecidas pelo Lema de Morse, denotaremos por $W_\epsilon^u(p)$ o conjunto $\{(x, y) : y = 0, |x|^2 \leq \epsilon\} = W^u(p) \cap H(\frac{\epsilon}{2})$.

Corolário 2.2.22. *Nas condições do teorema anterior, $M(c - \epsilon) \cup W_\epsilon^u(p)$ é um retrato de deformação forte de $M(c + \epsilon)$.*

Demonstração. Note que $M(c - \epsilon) \cup W_\epsilon^u(p)$ é um retrato de deformação de $M(c - \epsilon) \cup H(\epsilon)$, mapeando cada ponto $(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n) \in H(\epsilon) \setminus M(c - \epsilon)$ em $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ se $|x|^2 \geq \epsilon$ e em $(x_1, \dots, x_k, y'_{k+1}, \dots, y'_n)$ tal que $|y'|^2 - |x|^2 = -\epsilon$ se $|x|^2 < \epsilon$ e $|y|^2 - |x|^2 > -\epsilon$. O resultado então segue do Teorema 2.2.21. \square

Corolário 2.2.23. *Seja f uma função de Morse auto indexante, com $\{p_1, \dots, p_m\}$ pontos críticos de índice k . Se $0 < \epsilon < 1$, então $M(k + \epsilon)$ é homeomorfo a $M(k - \epsilon) \cup (\cup_{i=1}^m H_i(\epsilon))$, onde $H_i(\epsilon)$ é uma alça para p_i . Além disso, $M(k + \epsilon)$ possui $M(k - \epsilon) \cup (\cup_{i=1}^m W_\epsilon^u(p_i))$ como retrato de deformação forte.*

Capítulo 3

Homologia de Morse

Neste capítulo, continuamos a estudar relações entre a topologia de uma variedade fechada M e o fluxo gerado pelo campo gradiente negativo de uma função de Morse f em M . Mais especificamente, construiremos um complexo de cadeias a partir dos pontos críticos de f , cuja homologia é isomorfa à homologia singular de M . O operador bordo deste complexo depende de orientações de subvariedades de M , assunto contemplado na Seção 3.1. A construção do complexo e um exemplo são apresentados na Seção 3.2. Para demonstrar que o complexo de cadeias é, de fato, um complexo que possui a mesma homologia que a variedade M , introduzimos na Seção 3.3 a Teoria do Índice de Conley.

3.1 Orientação

Nosso objetivo nesta seção é obter orientações para as variedades conectantes e espaços moduli de um fluxo gradiente negativo gerado por uma função de Morse. As principais referências são [11], [12] e [22].

Lembramos que, dadas duas bases de um espaço vetorial V n -dimensional, a matriz de mudança de base tem determinante não-nulo. Duas bases são ditas equivalentes quanto o determinante de tal matriz é positivo. Segue então que há duas classes de equivalência de bases de V . Uma *orientação* para V é uma escolha de uma destas classes. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ordenada representante da classe escolhida, denotamos por (V, ω) o “espaço orientado”, onde $\omega = [v_1, \dots, v_n]$ é a classe de equivalência da base ordenada. A orientação padrão de \mathbb{R}^n é $\alpha_n = [e_1, \dots, e_n]$, onde $\{e_i\}$ é a base canônica. Uma transformação linear $T : (V, \omega) \rightarrow (V', \omega')$ induz uma orientação $T\omega = [Tv_1, \dots, Tv_n]$ em V' . Dizemos que T *preserva orientação* se $T\omega = \omega'$; caso contrário, dizemos que T *reverte orientação*.

Definição 3.1.1. Seja M uma variedade n -dimensional diferenciável. Uma orientação para M é uma orientação para seu fibrado tangente ξ , ou seja, é uma família $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ de orientações dos espaços tangentes, $(T_p M, \omega_p)$ tais que, tomando (x, U) carta local de M , a transformação

$dx_p : (T_p M, \omega_p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \alpha_n)$ preserva orientação para todo $p \in U$ ou reverte orientação para todo $p \in U$.

Uma outra possibilidade para definir orientação para uma variedade n -dimensional é utilizando seu n -ésimo grupo de homologia. Uma orientação em um ponto $p \in M$ pode ser definida como a escolha de um gerador do grupo de homologia $H_n(M, M - \{p\})$, que é isomorfo a \mathbb{Z} . De fato, pelo Teorema da Excisão, se (x, U) é uma carta local para p , $H_n(M, M - \{p\})$ é isomorfo a $H_n(U, U - \{p\})$, e como x é difeomorfismo, $H_n(U, U - \{p\}) \cong H_n(x(U), x(U) - \{0\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$. Usando a sequência exata longa do par, e que $H_n(\mathbb{R}^n) = H_{n-1}(\mathbb{R}^n) = 0$, obtemos

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z},$$

onde o segundo isomorfismo é dado pela homotopia $H : \mathbb{R}^n - \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, $H(x, t) = tx + (1-t)\frac{x}{|x|}$, sendo $|\cdot|$ qualquer norma de \mathbb{R}^n .

Para notar que as duas definições são equivalentes, tome uma orientação local para M em p , ou seja, uma orientação para o espaço vetorial $T_p M$, naturalmente isomorfo a \mathbb{R}^n . Isto significa que temos uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ que gera tal orientação. Considere o seguinte n -simplexo em \mathbb{R}^n :

$$\sigma := \left[-\sum_{i=1}^n v_i, v_1, \dots, v_n \right].$$

Podemos identificar seu bordo com S^{n-1} . Como σ contém $\{0\}$, $\sigma \not\subseteq \mathbb{R}^n - \{0\}$ e portanto $\partial\sigma \not\subseteq \text{Im } \partial|_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$. Logo, $\partial\sigma$ é um gerador de $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Pelo isomorfismo $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong H_n(M, M - \{p\})$, obtemos um gerador para $H_n(M, M - \{p\})$. A recíproca é análoga.

Pode-se mostrar que toda variedade simplesmente conexa é orientável (veja [11]). Pelo Teorema 2.2.12, temos que para todo ponto crítico x de uma função de Morse f , $W^u(x)$ e $W^s(x)$ são simplesmente conexas. Segue que $W^u(x)$ e $W^s(x)$ são variedades orientáveis. Mostraremos agora que, se f satisfaz a condição de Morse-Smale, então para quaisquer $x, y \in \text{Crit } f$, \mathcal{M}_{xy} e $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ são variedades orientáveis. Para isso, construiremos orientações em \mathcal{M}_{xy} e $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ induzidas pelas orientações nas variedades instáveis de todos os pontos críticos com índice de Morse maior que 0. O seguinte lema, encontrado em [11], será necessário na demonstração.

Lema 3.1.2. *Considere a sequência exata curta de fibrados tangentes*

$$0 \longrightarrow \xi_1 \longrightarrow \xi \longrightarrow \xi_2 \longrightarrow 0.$$

Se dois dos fibrados são orientáveis, o terceiro também é. Além disso, orientações de dois deles induzem uma orientação no terceiro.

Teorema 3.1.3. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse que satisfaz a condição de Morse-Smale. Fixadas orientações arbitrárias para $W^u(x)$, para todo $x \in \text{Crit}f$ com $\text{ind}_f(x) > 0$, existem orientações induzidas para as variedades \mathcal{M}_{xy} e $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, $x, y \in \text{Crit}f$.*

Demonstração. Se $\text{ind}_f(x) \leq \text{ind}_f(y)$, então $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$ pelo Teorema 2.2.17. Assuma que $\text{ind}_f(x) > \text{ind}_f(y)$.

Primeiramente, encontraremos uma decomposição para $T_p W^u(x)$, para todo $p \in \mathcal{M}_{xy}$. Denote por $\mathcal{V}_p W^s(y)$ o espaço tangente a M que é normal a $W^s(y)$ em p . Como $W^u(x)$ e $W^s(y)$ se intersectam transversalmente, temos

$$T_p W^u(x) \cong T_p \mathcal{M}_{xy} \oplus \mathcal{V}_p W^s(y),$$

para todo $p \in \mathcal{M}_{xy}$. Assim, obtemos a decomposição para o fibrado tangente

$$T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x) \cong T\mathcal{M}_{xy} \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{M}_{xy}} W^s(y). \quad (3.1.1)$$

Como a soma é direta, considerando a inclusão $i : T\mathcal{M}_{xy} \rightarrow T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x)$ e a projeção $\rho : T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{M}_{xy}} W^s(y)$, obtemos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow T\mathcal{M}_{xy} \xrightarrow{i} T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x) \xrightarrow{\rho} \mathcal{V}_{\mathcal{M}_{xy}} W^s(y) \longrightarrow 0.$$

Assim, pelo Lema 3.1.2, $T\mathcal{M}_{xy}$ será orientável (e herdará uma orientação) se os outros dois fibrados forem orientáveis. Fixemos uma orientação arbitrária para $TW^u(x)$. Restringindo o fibrado $TW^u(x)$ a \mathcal{M}_{xy} , obtemos uma orientação para $T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x)$. O fibrado $\mathcal{V}W^s(y)$ é orientável pela contratibilidade de $W^s(y)$ e sua orientação é determinada pela orientação da fibra $\mathcal{V}_y W^s(y)$, que é dada pelo isomorfismo

$$T_y W^u(y) \oplus T_y W^s(y) \cong T_y M \cong \mathcal{V}_y W^s(y) \oplus T_y W^s(y).$$

Fazendo a restrição para $\mathcal{V}_{\mathcal{M}_{xy}} W^s(y)$, obtemos a segunda orientação desejada. As orientações em $T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x)$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{M}_{xy}} W^s(y)$ induzem uma orientação em $T\mathcal{M}_{xy}$.

Para determinarmos a orientação de $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, lembramos primeiramente que $\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = \mathcal{M}_{xy} \cap f^{-1}(a)$, para a valor regular em $(f(y), f(x))$. Mas pelo Teorema 2.2.8 $f^{-1}(a)$ é ortogonal às órbitas do fluxo gradiente, assim, $-\nabla^g f(p) \notin T\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ para $p \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. Como $\dim \mathcal{M}_{xy} = \dim \widehat{\mathcal{M}}_{xy} + 1$, temos

$$T_{\widehat{\mathcal{M}}_{xy}} \mathcal{M}_{xy} \cong \mathbb{R} \oplus T\widehat{\mathcal{M}}_{xy},$$

onde \mathbb{R} é orientado de acordo com $-\nabla^g f$, e a orientação de $T_{\widehat{\mathcal{M}}_{xy}} \mathcal{M}_{xy}$ é dada pela restrição do fibrado orientado $T\mathcal{M}_{xy}$. Obtemos então uma orientação para $T\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, como desejado. \square

Se $x, y \in \text{Crit}f$, as orientações induzidas em \mathcal{M}_{xy} e $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ pelo teorema anterior serão denotadas

respectivamente por $[\mathcal{M}_{xy}]_{\text{ind}}$ e $[\widehat{\mathcal{M}}_{xy}]_{\text{ind}}$.

3.2 Complexo de Morse-Witten

Sejam f função de Morse, g uma métrica Riemanniana em M tais que (f, g) é um par Morse-Smale. Fixe orientações arbitrárias para $W^u(x)$ para todo $x \in \text{Crit}f$, e denote o conjunto destas orientações por Or . O objetivo desta seção é construir um complexo de cadeias $(CM(f), \partial^c)$ associado a M , utilizando informações do fluxo gerado por $-\nabla^g f$. Os grupos das cadeias deste complexo são gerados por pontos críticos de f de um mesmo índice de Morse.

Definição 3.2.1. O grupo de k -cadeias de Morse (com coeficientes em \mathbb{Z}) associado a f é o grupo abeliano livre gerado pelos pontos críticos de f de índice k , isto é,

$$CM_k(f) = CM_k := \left\{ \sum_i \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{Z}, x_i \in \text{Crit}f \text{ e } \text{ind}_f(x_i) = k \right\}.$$

O próximo passo é construir o operador bordo do complexo, que conta as órbitas entre pontos críticos de índices de Morse consecutivos, considerando as orientações. Sejam $x, y \in \text{Crit}f$, com $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) = 1$, e seja $u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. A órbita $\mathcal{O}(u) \subset \mathcal{M}_{xy}$ é conexa, portanto recebe uma orientação induzida por $[\mathcal{M}_{xy}]_{\text{ind}}$, a qual denotaremos por $[\mathcal{O}(u)]_{\text{ind}}$. A órbita $\mathcal{O}(u)$ também recebe uma orientação induzida pelo fluxo, denotada por $[\dot{u}]$. Definimos o *sinal característico* $n_u = n_u(Or)$ como

$$[\mathcal{O}(u)]_{\text{ind}} = n_u [\dot{u}], \quad (3.2.1)$$

isto é, $n_u = 1$ se as orientações concordarem e $n_u = -1$ caso contrário. O número inteiro

$$n(x, y) := \sum_{u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}} n_u$$

é denominado *número de intersecção entre x e y* . O Teorema 2.2.18 garante que a soma é finita. Estamos prontos para definir o operador bordo; intuitivamente, o operador conta a quantidade de órbitas entre pontos críticos de índices consecutivos, considerando as orientações destas.

Definição 3.2.2. O operador bordo de Morse-Witten $\partial_k^c : CM_k(f) \rightarrow CM_{k-1}(f)$ é dado, em um gerador $x \in \text{Crit}f$, por:

$$\partial_k^c x = \sum_{y \in \text{Crit}f, \text{ind}_f(y)=k-1} n(x, y)y,$$

e estendido para uma cadeia qualquer por linearidade.

Como M é compacta e $\text{Crit}f$ é finito, o operador está bem definido. Os dois teoremas seguintes garantem que $(CM(f), \partial^c)$ é um complexo de cadeias que recupera a homologia singular de

variedade M . Chamamos este complexo de cadeias de *Complexo de Morse-Witten*. A homologia deste complexo é chamada *Homologia de Morse* de M .

Teorema 3.2.3. *O operador bordo de Morse-Witten satisfaz $\partial_k^c \circ \partial_{k+1}^c = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Teorema 3.2.4. *A homologia singular do Complexo de Morse-Witten $(CM(f), \partial^c)$ coincide com a homologia singular de M , ou seja, para todo $k \geq 0$,*

$$H_k(CM(f), \partial^c) \cong H_k(M).$$

Estes dois importantes resultados serão demonstrados na próxima seção, onde introduziremos o que hoje é conhecido como Teoria do Índice de Conley. Além de serem relevantes por si próprios, podemos obter como consequência uma importante estimativa para os pontos críticos de uma função de Morse definida em M .

Teorema 3.2.5. *(Desigualdades de Morse) Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, com c_k pontos críticos de índice de Morse k , então para todo $k \geq 0$*

$$c_k - c_{k-1} + \cdots \pm c_0 \geq \beta_k - \beta_{k-1} + \cdots \pm \beta_0,$$

onde $\beta_k = \dim H_k(M)$ é a dimensão do k -ésimo grupo de homologia singular de M . A igualdade vale quando $k = n = \dim M$.

Demonstração. Seja $(CM(f), \partial^c)$ o Complexo de Morse-Witten. Como ∂_k^c é um homomorfismo, temos que $c_k = \dim CM_k = \gamma_k + b_k$, onde $\gamma_k = \dim \ker \partial_k^c$ e $b_k = \dim \text{Im } \partial_k^c$, sendo que $b_0 = b_{n+1} = 0$. Usando o Teorema 3.2.4, temos

$$\beta_k = \dim H_k(M) = \dim H_k(CM(f), \partial^c) = \dim \frac{\ker \partial_k^c}{\text{Im } \partial_{k+1}^c} = \gamma_k - b_{k+1}.$$

Mostraremos por indução finita que $c_k - c_{k-1} + \cdots \pm c_0 = b_{k+1} + \beta_k - \beta_{k-1} + \cdots + \pm \beta_0$. Para o caso base, $c_0 = \gamma_0 + b_0 = \gamma_0 = b_1 + \beta_0$. Suponha o resultado válido para k . Então

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \gamma_{k+1} + b_{k+1} = b_{k+2} + \beta_{k+1} + b_{k+1} \\ c_{k+1} - (c_k - \cdots \pm c_0) &= b_{k+2} + \beta_{k+1} + b_{k+1} - (b_{k+1} + \beta_k - \cdots \pm \beta_0) \\ c_{k+1} - c_k + \cdots \pm c_0 &= b_{k+2} + \beta_{k+1} - \beta_k + \cdots \pm \beta_0, \end{aligned}$$

e as desigualdades de Morse seguem do fato que $b_k = \dim \text{Im } \partial_k^c \geq 0$. A igualdade vale para $k = n$ pois $b_{n+1} = 0$. \square

Exemplo 3.2.6. (Toro topológico \mathcal{T}^2)

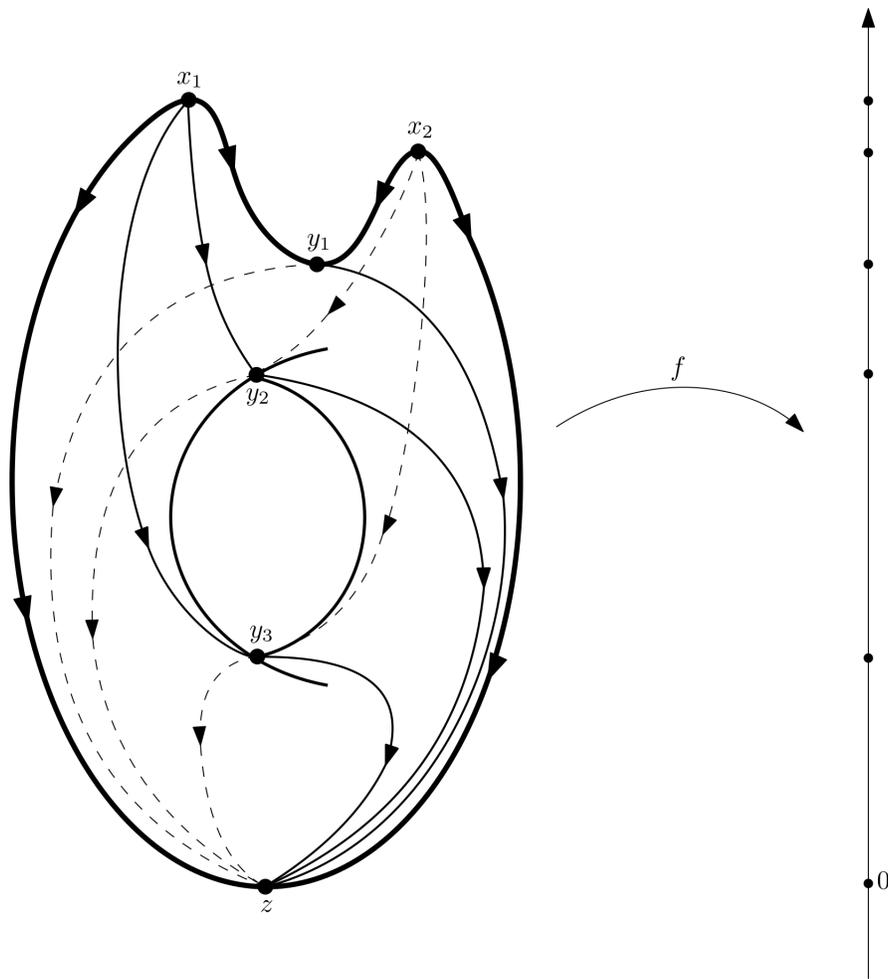


Figura 3.2.1: \mathcal{T}^2 e uma pequena perturbação da função altura $f : \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Considere o fluxo gradiente negativo associado a uma perturbação da função altura $f : \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ em \mathcal{T}^2 , como apresentado na Figura 3.2.1. Note que f satisfaz a condição de Morse-Smale. Temos que x_1, x_2 são pontos críticos de índice 2, y_1, y_2, y_3 são pontos críticos de índice 1, z é ponto crítico de índice 0, e não há outros pontos críticos de f em \mathcal{T}^2 . Assim, os grupos das cadeias de Morse são

$$CM_2(f) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad CM_1(f) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad CM_0(f) = \mathbb{Z}, \quad CM_k(f) = 0, \quad k \neq 0, 1, 2.$$

Fixaremos orientações para as variedades instáveis dos pontos críticos. A orientação em z é a trivial. Para cada y_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, precisamos escolher apenas um vetor não nulo em $T_{y_i} W_u(y_i)$ para determinar uma orientação da variedade instável. Quanto a x_1 e x_2 , escolhamos uma base ordenada para o espaço vetorial de dimensão 2, $T_{x_i} W^u(x_i)$, determinando a orientação. Todas estas orientações estão indicadas na Figura 3.2.2.

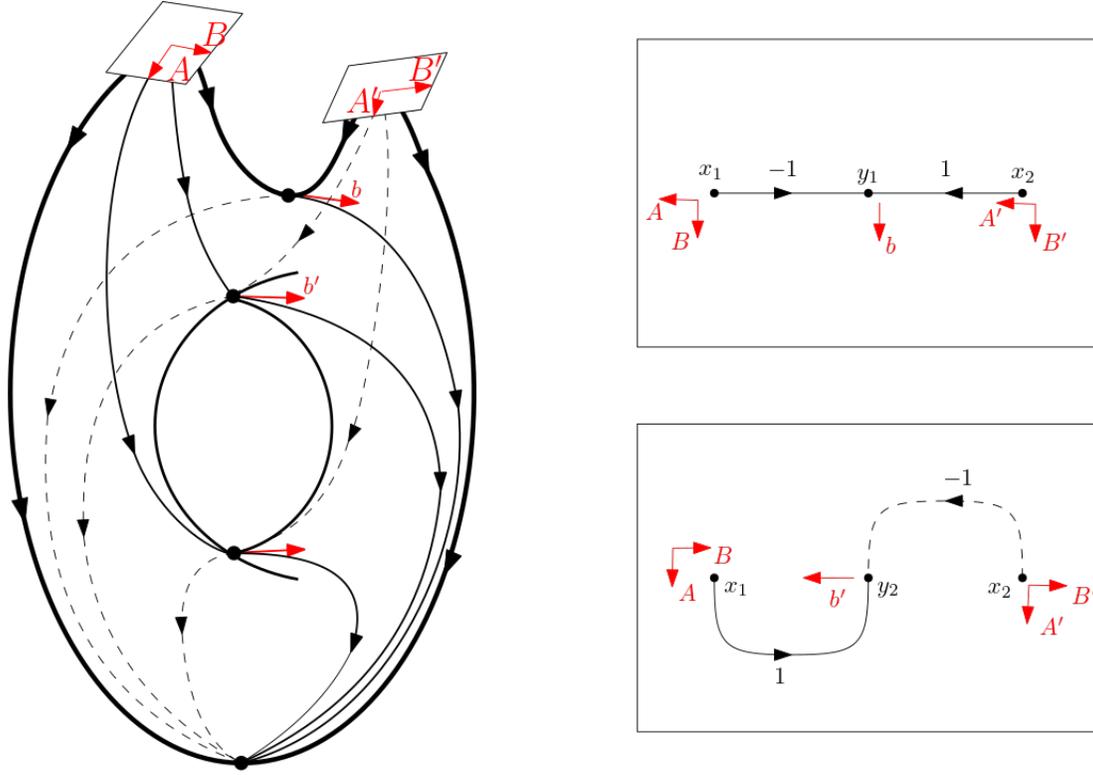


Figura 3.2.2: Fluxo gerado por $-\nabla^g f$, orientações fixadas para as variedades instáveis dos pontos críticos e planificações de algumas órbitas.

Para obter as orientações induzidas nas variedades conectantes usamos a demonstração do Teorema 3.1.3. Seja $u_{11} \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_1 y_1}$. A orientação $[\mathcal{O}(u_{11})]_{\text{ind}}$ é a escolha de um vetor v em $T_{u_{11}} \mathcal{M}_{x_1 y_1}$ da seguinte forma: dada $\{b\}$ uma base para $\mathcal{V}_{y_1} W^s(y_1)$ com orientação induzida pela orientação de $T_{y_1} W^u(y_1)$, $\{v, b\}$ possui orientação compatível com a orientação $\{A, B\}$ de $T_{x_1} W^u(x_1)$ através do isomorfismo 3.1.1. Analogamente, para $u_{21} \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_2 y_1}$, queremos v' tal que $\{v', b\}$ tem a mesma orientação que $\{A', B'\}$. Assim, vemos que

$$[\mathcal{O}(u_{11})]_{\text{ind}} = -[\dot{u}_{11}] \text{ e } [\mathcal{O}(u_{21})]_{\text{ind}} = [\dot{u}_{21}],$$

ou seja, v gera a orientação contrária à do vetor tangente ao fluxo $-\nabla^g f(u_{11})$, enquanto v' gera uma orientação compatível com $-\nabla^g f(u_{21})$. O processo é análogo para $\mathcal{M}_{x_1 y_2}$ e $\mathcal{M}_{x_2 y_2}$. Na Figura 3.2.2, apresentamos uma “planificação” do fluxo, evidenciando que, para $u_{12} \in \mathcal{M}_{x_1 y_2}$ e $u_{22} \in \mathcal{M}_{x_2 y_2}$,

$$[\mathcal{O}(u_{12})]_{\text{ind}} = [\dot{u}_{12}] \text{ e } [\mathcal{O}(u_{22})]_{\text{ind}} = -[\dot{u}_{22}],$$

Analogamente, determinamos as orientações $[\mathcal{O}(u_{13})]_{\text{ind}}$ e $[\mathcal{O}(u_{23})]_{\text{ind}}$ para $u_{13} \in \mathcal{M}_{x_1 y_3}$ e $u_{23} \in \mathcal{M}_{x_2 y_3}$. Particularmente, note que $n_{u_{13}} = -1$ e $n_{u_{23}} = 1$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, sejam $v_i, v'_i \in \mathcal{M}_{y_i z}$ como na Figura 3.2.3. Note que a orientação induzida pelo vetor $-\nabla^g f(v_i)$ em $T\mathcal{M}_{y_i z}$ é compatível com a induzida pela orientação fixada de cada variedade instável $W^u(y_i)$, pelo isomorfismo do

Teorema 3.1.3. Analogamente, $-\nabla^g f(v'_i)$ induz orientação contrária à orientação fixada de $W^u(y_i)$. Desta forma,

$$[\mathcal{O}(v_i)]_{\text{ind}} = [\dot{v}_i], \quad [\mathcal{O}(v'_i)]_{\text{ind}} = -[\dot{v}'_i].$$

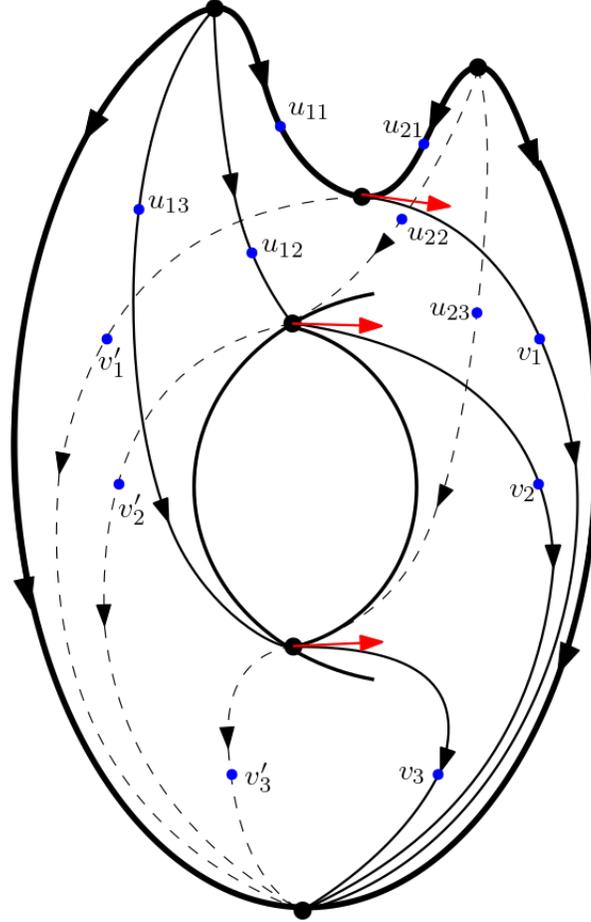


Figura 3.2.3: Ilustração dos espaços Moduli entre pontos com índices de Morse consecutivos.

Calculemos os grupos de homologia de Morse. Para os pontos críticos de índice 2, $\partial x_1 = -y_1 + y_2 - y_3$, $\partial x_2 = y_1 - y_2 + y_3$. Logo, $\partial(x_1 + x_2) = 0$ e temos que $x_1 + x_2 \in \ker \partial_2^c$. Agora, se $\sigma \in CM_2(f)$ é tal que $\partial\sigma = 0$, como x_1 e x_2 são os geradores deste grupo, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha x_1 + \beta x_2 = \sigma$. Mas então

$$\begin{aligned} \partial\sigma = 0 &\implies \alpha\partial x_1 + \beta\partial x_2 = 0 \\ &\implies (-\alpha + \beta)y_1 + (\alpha - \beta)y_2 + (-\alpha + \beta)y_3 = 0 \end{aligned}$$

e a última equação só é satisfeita quando $\alpha = \beta$. Concluimos então que $\ker \partial_2^c = \langle x_1 + x_2 \rangle$. Como não há pontos críticos de índice 3, $\text{Im } \partial_3^c = 0$, logo, $H_2(CM(f), \partial^c) = \ker \partial_2^c / \text{Im } \partial_3^c = \langle x_1 + x_2 \rangle \cong \mathbb{Z}$.

A imagem de ∂_2^c tem dimensão 1 e, portanto, é gerada por $-y_1 + y_2 - y_3$. Basta então estudarmos $\ker \partial_1^c$. Para cada y_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{M}_{y_{iz}}$ possui duas órbitas, uma com sinal característico 1 e outra

com -1 . Como não há outros pontos críticos de índice 0 ,

$$\partial y_1 = \partial y_2 = \partial y_3 = 0.$$

Como o grupo $CM_1(f)$ é gerado pelos três elementos, $\ker \partial_1^c = CM_1(f) = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Portanto,

$$H_1(CM(f), \partial^c) = \ker \partial_1^c / \text{Im } \partial_2^c \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Como $CM_1(f) = \ker \partial_1^c$, a imagem do operador ∂^c é trivial. Sendo z o gerador de $CM_0(f)$ e $\partial_0 \equiv 0$, temos

$$H_0(CM(f), \partial^c) = \langle z \rangle / 0 \cong \mathbb{Z}.$$

3.3 Teoria do Índice de Conley e aplicação à Teoria de Morse

Nesta seção introduziremos a Teoria do Índice de Conley. O Índice de Conley pode ser visto como uma generalização do índice de Morse para conjuntos invariantes mais gerais do que pontos críticos não degenerados. Estes conjuntos surgem no estudo fluxos que não sejam gerados pelo gradiente de uma função de Morse. Usaremos alguns resultados desta teoria para demonstrar os Teoremas 3.2.3 e 3.2.4. As principais referências desta seção são [3], [7], [17] e [18].

Fixemos $X : M \rightarrow TM$ um campo vetorial na variedade n -dimensional M compacta e sem bordo e φ o fluxo global gerado por X , que existe pela Proposição 2.1.6. Dados $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, utilizamos a notação e $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$ e, se $A \subseteq \mathbb{R}$, denotamos $\varphi_A(x) = \{\varphi_t(x) : t \in A\}$.

Definição 3.3.1. Um subconjunto $S \subset M$ é *invariante* em relação ao fluxo φ se $\varphi_t(S) = S$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $N \subseteq M$, o *conjunto invariante maximal* de N em relação ao fluxo φ é definido como

$$\text{Inv}(N) = \{x \in M : \varphi_{\mathbb{R}}(x) \subseteq N\}.$$

Segue da definição acima que se $S \subseteq N$ é um conjunto invariante, então $S \subseteq \text{Inv}(N)$.

Definição 3.3.2. Seja $S \subset M$. Dizemos que S é um *conjunto invariante isolado* se existe uma vizinhança compacta N tal que $S \subset \text{Int}N$ e $S = \text{Inv}(N)$. Neste caso dizemos N é uma *vizinhança isolante* para S .

Note que, se X é o campo gradiente negativo de uma função de Morse f , então todo ponto crítico de f é um conjunto invariante isolado. De fato, se $x \in \text{Crit}f$, $\varphi_{\mathbb{R}}(x) = \{x\}$ e a Proposição 2.2.7 garante que x é isolado. Portanto, para qualquer vizinhança V de x que não contenha outros pontos críticos, existe U aberto tal que $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq V$, e segue que \bar{U} é uma vizinhança isolante para x .

Definição 3.3.3. Seja $S \subseteq M$ um conjunto invariante isolado. Um *par índice* (N, L) para S é um par de compactos, $L \subseteq N$, tais que:

(PI_1) $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L}) \subseteq \text{Int}(N \setminus L)$;

(PI_2) Se $x \in L$ e $\varphi_{[0,t]}(x) \subseteq N$, então $\varphi_t(x) \in L$;

(PI_3) Se $x \in N \setminus L$ então existe $t > 0$ tal que $\varphi_{[0,t]}(x) \subseteq N$.

Na definição acima, dizemos que L é o *conjunto de saída*. Pela propriedade PI_2 , se o fluxo “entra” em L , o mesmo não retorna para $N \setminus L$. Neste caso, dizemos que L é positivamente invariante em N . Além disso, se o fluxo “sai” de N , isto deve acontecer por $L \subseteq N$, pois caso contrário o fluxo sairia por um ponto $p \in \partial(N \setminus L) \subset N$, que não pode existir devido a propriedade PI_3 .

Apresentamos na Figura 3.3.1 alguns exemplos de conjuntos invariantes isolados, juntamente com respectivos pares índice. Em cada exemplo, o conjunto de saída L é representado em vermelho, enquanto $N \setminus L$ é representado em azul. Em (a) e (b), o conjunto invariante isolado é a sela no centro da figura. Em (c), o conjunto invariante isolado S é formado pela união de um ponto crítico, uma órbita periódica e todas as órbitas entre estes. O exemplo (d) mostra uma propriedade interessante do par índice: mesmo que o conjunto invariante isolado seja complexo, basta saber o comportamento do fluxo “ao redor” do conjunto para obtermos um par índice e, conseqüentemente, seu índice de Conley, veja Definição 3.3.5.

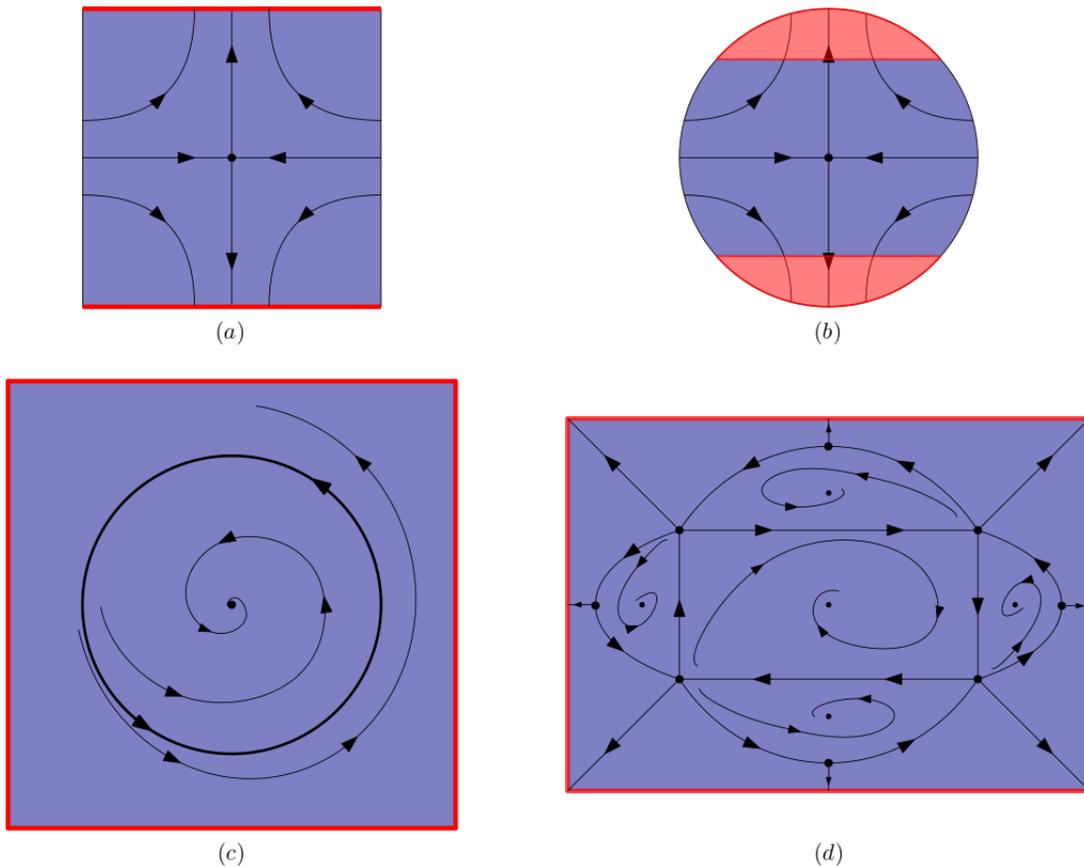


Figura 3.3.1: Exemplos de conjuntos invariantes isolados e seus respectivos pares índice.

Na Figura 3.3.2 apresentamos “candidatos” a pares índice para alguns conjuntos invariantes isolados, com L representado em vermelho e $N \setminus L$ em azul. Em (a), existem órbitas saindo de $N \setminus L$ sem passar por L , portanto (N, L) não satisfaz PI_3 . Em (b), além de PI_3 não ser satisfeita, existem pontos de L que “retornam” para $N \setminus L$, logo, o par não satisfaz PI_2 . Já em (c), o par (N, L) é um par índice para o ponto crítico, mas não é um par índice para o conjunto invariante isolado S , formado pela união do ponto crítico, da órbita periódica e de todas as órbitas entre estes. De fato, $S \not\subseteq \text{Int}(N \setminus L)$, e portanto o par não satisfaz PI_1 .

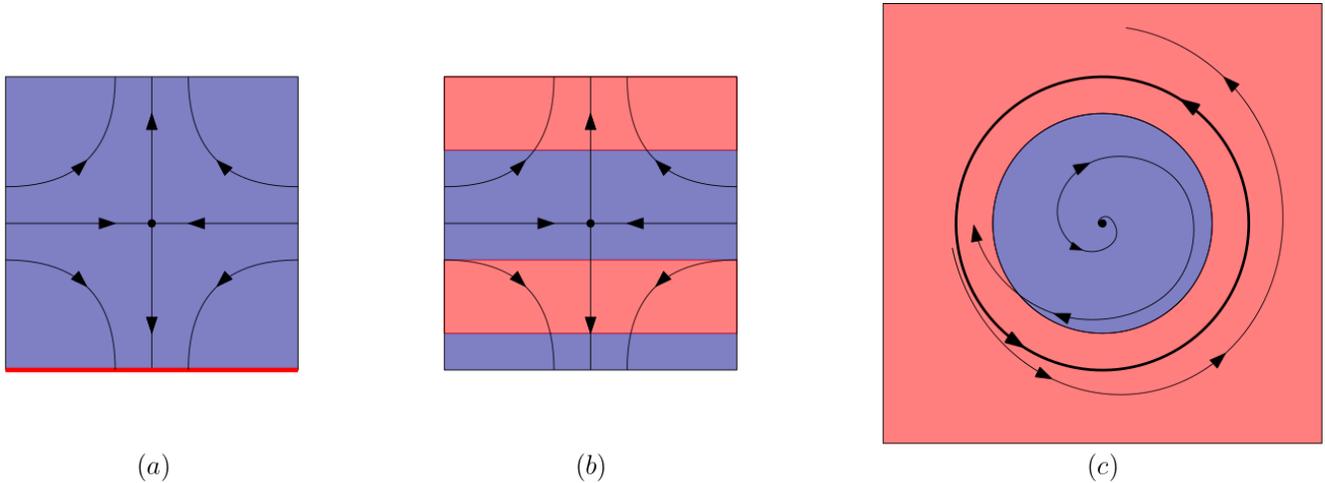


Figura 3.3.2: Exemplos de pares (N, L) que falham em ser pares índice para alguns conjuntos invariantes isolados.

No contexto da Teoria de Morse, o índice de Morse é um número dado pelos autovalores negativos da matriz hessiana nos pontos críticos. Veremos que o índice de Conley de um conjunto invariante isolado S toma a forma de um tipo de homotopia, baseado em algum par índice (N, L) de S . Para definirmos o índice de Conley, necessitamos do seguinte teorema, que reúne as duas principais propriedades do par índice.

Teorema 3.3.4. *Todo conjunto invariante isolado $S \subseteq M$ admite um par índice (N, L) . Além disso, se (N_a, L_a) e (N_b, L_b) são pares índice para S , então N_a/L_a e N_b/L_b são homotopicamente equivalentes. Consequentemente, as homologias singulares relativas $H(N_a/L_a, [L_a])$ e $H(N_b/L_b, [L_b])$ coincidem.*

A demonstração do Teorema 3.3.4 pode ser encontrada em [17].

Definição 3.3.5. *O índice de Conley homotópico de um conjunto invariante isolado S , denotado por $h(S)$, é o tipo de homotopia de N/L , para algum par índice (N, L) . O índice de Conley homológico de S é a homologia singular relativa $H(N/L, [L])$.*

Exemplo 3.3.6. Considere agora as condições do Teorema 2.2.21. Note que $(f^{-1}[c - 2\epsilon, c + \epsilon], f^{-1}[c - 2\epsilon, c - \epsilon]) =: (N_0, L_0)$ é um par índice para p . Tomando um par índice

(N, L) qualquer de p , temos, para $k = \text{ind}_f(p)$, que

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_j(N/L) &\cong \tilde{H}_j(N_0/L_0) \\
&\cong H_j(N_0, L_0), \text{ pelo Teorema 3.3.4,} \\
&\cong H_j(M(c+\epsilon), M(c-\epsilon)), \text{ por Excisão para } Z = M(c-2\epsilon) \setminus f^{-1}(c-2\epsilon), \\
&\cong H_j(M(c-\epsilon) \cup W_\epsilon^u(p), M(c-\epsilon)), \text{ pelos Corolários 2.2.22 e 1.1.13,} \\
&\cong H_j(W_\epsilon^u(p), \partial W_\epsilon^u(p)), \text{ por Excisão para } Z = M(c-\epsilon) \setminus W_\epsilon^u(p), \\
&\cong \tilde{H}_j(S^k), \text{ pelo Teorema 2.2.12,} \\
&\cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & j = k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

O exemplo anterior mostra como o índice de Conley generaliza o índice de Morse: se x é um ponto crítico não degenerado de f e k é o índice de Morse de x , então o índice de Conley de $\{x\}$ é o tipo de homotopia da esfera S^k .

O restante desta seção será dedicado às demonstrações dos Teorema 3.2.3 e 3.2.4. Fixe φ um fluxo gradiente negativo de uma função de Morse f que satisfaz a condição de Morse-Smale. Dado $y \in \text{Crit}f$, uma orientação para $E^u(y) = T_y W^u(y)$ determina um gerador para $H_k(N_y, L_y)$, onde (N_y, L_y) é um par índice fixado para y e $k = \text{ind}_f(y)$. Assim, $CM_k(f)$ pode ser identificado com

$$CM_k(f) = \bigoplus_{\text{ind}_f(p)=k} H_k(N_p, L_p).$$

Sejam $x, y \in \text{Crit}f$, com $\text{ind}_f(x) = k+1$ e $\text{ind}_f(y) = k$. Considerando a variedade conectante \mathcal{M}_{xy} , defina $S_{xy} := \mathcal{M}_{xy} \cup \{x, y\}$. S_{xy} é um conjunto invariante isolado. Tome então (N_2, N_0) par índice para S_{xy} e defina $N_1 := N_0 \cup (N_2 \cap M(c))$, onde $c \in (f(y), f(x))$ é um valor regular de f . Verificaremos que (N_2, N_1) é um par índice para x e (N_1, N_0) é um par índice para y .

Claramente $x \in \text{Inv}(\overline{N_2 \setminus N_1})$ e $y \in \text{Inv}(\overline{N_1 \setminus N_0})$. Tomando $z \in \text{Inv}(\overline{N_2 \setminus N_0}) \setminus \{x, y\}$, ou seja, $z \in \mathcal{M}_{xy}$, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, z) &= y, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(\varphi(t, z)) = f(y), \\
\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, z) &= x, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(\varphi(t, z)) = f(x).
\end{aligned}$$

Assim, existe $T > 0$ tal que $f(\varphi(T, z)) < c$ e $f(\varphi(-T, z)) > c$, o que implica que $z \notin \text{Inv}(\overline{N_2 \setminus N_1})$ e $z \notin \text{Inv}(\overline{N_1 \setminus N_0})$. Concluimos que $\{x\} = \text{Inv}(\overline{N_2 \setminus N_1})$ e $\{y\} = \text{Inv}(\overline{N_1 \setminus N_0})$.

Agora, suponha que $z \in N_1$ e $\varphi_{[0,t]}(z) \subseteq N_2$ para algum $t > 0$. Então $z \in N_0$ ou $z \in N_2 \cap M(c)$. Se $z \in N_0$ e $\varphi_{[0,t]}(z) \subseteq N_2$, como (N_2, N_0) é par índice, vale que $\varphi_t(z) \in N_0$, logo $\varphi_t(z) \in N_1$. Se $z \in N_2 \cap M(c)$, como $\varphi_{[0,t]}(z) \subseteq N_2$ e $f(\varphi_t(z)) \leq f(z) \leq c$, segue que $\varphi_t(z) \in N_2 \cap M(c)$,

logo $\varphi_t(z) \in N_1$. Concluimos que (N_2, N_1) satisfaz PI_2 . Semelhantemente, suponha que $z \in N_0$ e $\varphi_{[0,t]}(z) \subseteq N_1$. Como $N_1 \subset N_2$, e (N_2, N_0) é par índice, segue que $\varphi_t(z) \in N_0$. Assim, (N_1, N_0) satisfaz PI_2 .

Se $z \in N_2 \setminus N_1$, então $z \in N_2 \setminus N_0$ e, como (N_2, N_0) é par índice, existe $t > 0$ tal que $\varphi_{[0,t]}(z) \subseteq N_2$, o que mostra PI_3 para (N_2, N_1) . Tome agora $z \in N_1 \setminus N_0$. Então $z \in N_2 \setminus N_0$ e existe $t > 0$ tal que $\varphi_{[0,t]}(z) \subset N_2$. Mas para todo $s \in (0, t)$, temos que $f(\varphi(s, z)) \leq f(z) \leq c$, logo $\varphi_{[0,t]}(z) \subseteq N_2 \cap M(c)$ e, portanto, $\varphi_{[0,t]}(z) \subset N_1$, mostrando PI_3 para (N_1, N_0) . Concluimos que (N_2, N_1) e (N_1, N_0) são pares índice para x e y , respectivamente.

Definiremos agora o homomorfismo $\Delta_{k+1} : CM_{k+1}(f) \rightarrow CM_k(f)$. Dado $x \in \text{Crit} f$ com $\text{ind}_f(x) = k+1$ um gerador de $CM_{k+1}(f)$, construa para cada $y \in CM_k(f)$ a tripla N_2^y, N_1^y, N_0^y como fizemos acima. Tome os isomorfismos $\alpha_x^y : H_{k+1}(N_x, L_x) \rightarrow H_{k+1}(N_2^y, N_1^y)$ e $\beta_y : H_k(N_y, L_y) \rightarrow H_k(N_1^y, N_0^y)$ entre as homologias pares índices dados pelo Teorema 3.3.4 e o bordo $\partial_{*k+1}(x, y)$ da sequência exata da tripla (N_2^y, N_1^y, N_0^y) em homologia relativa. A composição $\beta_y^{-1} \circ \partial_{*k+1}(x, y) \circ \alpha_x^y$ leva o gerador de $H_{k+1}(N_x, L_x)$ num múltiplo do gerador de $H_k(N_y, L_y)$, sendo o coeficiente denotado por $n^*(x, y)$. Definimos então $\Delta_{k+1}(x) = \sum_{\text{ind}_f(y)=k} n^*(x, y)y$, e estendemos por linearidade para todo $CM_{k+1}(f)$.

Lema 3.3.7. *Sejam Δ_k o operador construído acima e ∂_k^c o operador bordo de Morse-Witten. Então $\Delta_k = \partial_k^c$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \text{Crit} f$, $\text{ind}_f(x) = k+1$ e $\text{ind}_f(y) = k$. Sem perda de generalidade, assumamos que $f(x) = b$, $f(y) = a$, $a < b$ e que x e y são os únicos pontos críticos de $f^{-1}[a, b]$. Tome $\epsilon > 0$ tal que esta propriedade continua válida para $f^{-1}[a - \epsilon, b + \epsilon]$ e tome $c \in (a, b)$. Para $T > 0$ suficientemente grande (explicaremos adiante), defina os conjuntos

$$\begin{aligned} N_x &= f^{-1}[c, \infty) \cap \{z \in M : f(\varphi_{-T}(z)) \leq b + \epsilon\}, \quad L_x = f^{-1}(c) \cap N_x, \\ N_y &= M(c) \cap \{z \in M : f(\varphi_T(z)) \geq a - \epsilon\}, \quad L_y = \{z \in M : f(\varphi_T(z)) = a - \epsilon\} \cap N_y. \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades do fluxo φ , é imediato verificar que (N_x, L_x) e (N_y, L_y) são pares índice para x e y , respectivamente. Defina a tripla

$$N_2 = N_x \cup N_y, \quad N_1 = L_x \cup N_y, \quad N_0 = L_y \cup \overline{L_x \setminus N_y}.$$

Temos que (N_2, N_0) é um par índice para S_{xy} , (N_2, N_1) é um par índice para x e (N_1, N_0) é um

par índice para y . Note que nossa escolha para N_1 foi coerente com a construção de Δ_k , pois:

$$\begin{aligned}
N_0 \cup (N_2 \cap M(c)) &= L_y \cup \overline{L_x \setminus N_y} \cup ((N_x \cup N_y) \cap M(c)) \\
&= L_y \cup \overline{L_x \setminus N_y} \cup ((N_x \cap M(c)) \cup (N_y \cap M(c))) \\
&= L_y \cup \overline{L_x \setminus N_y} \cup (L_x \cup N_y) \\
&= L_x \cup N_y \\
&= N_1
\end{aligned}$$

onde usamos que $L_y \subseteq N_y$, e que L_x é um conjunto compacto tal que $\overline{L_x \setminus N_y} \subseteq L_x$.

Pensando nos conjuntos como funções de T , note que tomando o limite $T \rightarrow \infty$, contraímos N_x em $W^u(x) \cap f^{-1}[c, \infty)$ e N_y em $W^s(y) \cap f^{-1}(-\infty, c]$. Assim, quando $T \rightarrow \infty$, o conjunto $N_y \cap W^u(x) \cap f^{-1}(c)$ é deformado no espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ entre x e y . Mas $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ consiste em finitos pontos, digamos z_1, \dots, z_m . Portanto, $N_y \cap W^u(x) \cap f^{-1}(c)$ deve, para T suficientemente grande, ser composto de m componentes conexas, que serão contraídas a z_j para cada $1 \leq j \leq m$. De fato, $N_y \cap W^u(x)$ é a união de vizinhanças compactas para cada órbita conectante entre x e y . Aqui determinamos o quão “suficientemente grande” $T > 0$ deve ser, na definição de N_y . Assuma então que

$$N_y \cap W^u(x) \cap f^{-1}(c) = V_1 \cup \dots \cup V_m$$

tal que existe um único $z_i \in V_i \cap \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. Pelo Teorema de Hartman-Grobman para y , obtemos (para vizinhanças que podem ser “corrigidas” para as nossas pelo Teorema do Fluxo Tubular) um difeomorfismo $\Psi_y : N_y \rightarrow D^k \times D^{n-k}$ satisfazendo:

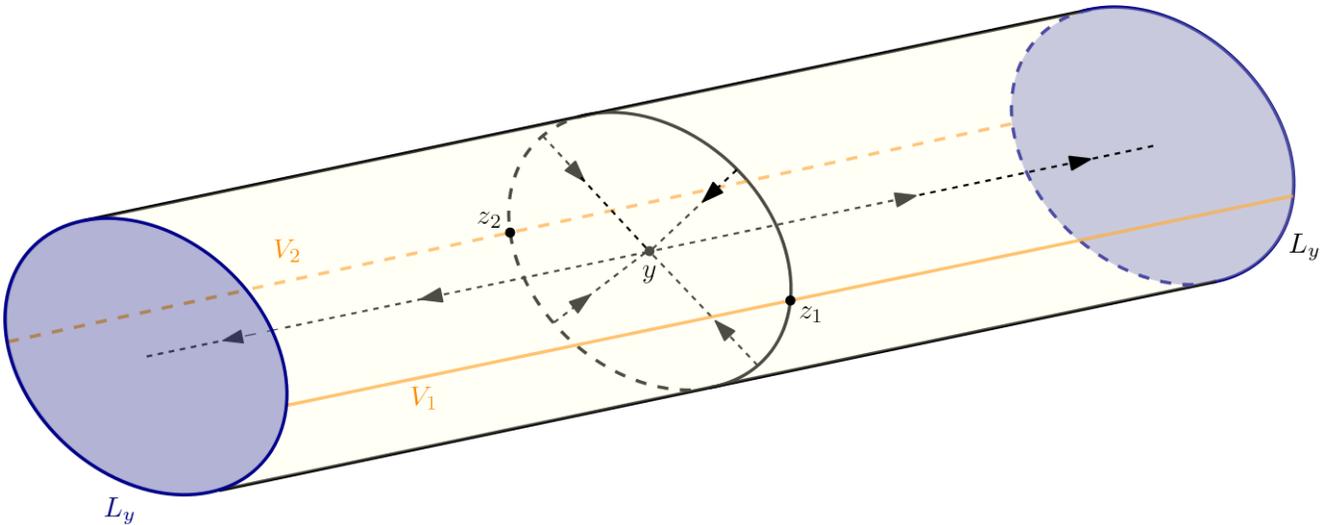


Figura 3.3.3: Imagem de N_y pelo difeomorfismo Ψ_y .

$$\Psi_y(L_y) = \partial D^k \times D^{n-k}, \quad \Psi_y(W^s(y) \cap N_y) = \{0\} \times D^{n-k}, \quad \Psi_y(V_j) = D^k \times \{\theta_j\},$$

onde $\theta_j \in \partial D^{n-k}$. Veja Figura 3.3.3. Pela última condição, temos que V_j é difeomorfo a D^k , portanto é uma k -subvariedade de M . Seu bordo é dado por

$$W_j := \partial V_j = \Psi_y^{-1}(\partial D^k \times \{\theta_j\}) = \Psi_y^{-1}(\partial D^k \times D^{n-k} \cap D^k \times \{\theta_j\}) = L_y \cap V_j.$$

Observando que D^{n-k} é contrátil a um ponto, a projeção $\pi_1 : D^k \times D^{n-k} \rightarrow D^k$ gera um isomorfismo em homologia. Como Ψ_y é um difeomorfismo, temos que $\pi_1 \circ \Psi_y : N_y \rightarrow D_k$ gera o isomorfismo

$$H_k(N_y, L_y) \xrightarrow{(\pi_1 \circ \Psi_y)_*} H_k(D^k, \partial D^k) \xrightarrow{(\Psi_y^{-1})_*} H_k(V_j, W_j). \quad (3.3.1)$$

Uma orientação pré-determinada de $W^u(y)$ determina um gerador $\alpha \in H_k(N_y, L_y) \cong \mathbb{Z}$. Este gerador é levado pelo isomorfismo acima em um gerador α_j em $H_k(V_j, W_j)$. A classe α_j é determinada da seguinte forma: temos que

$$T_{z_j} W^u(x) = \langle -\nabla^g f \rangle \oplus T_{z_j} V_j \quad (3.3.2)$$

e, como $\dim \mathcal{M}_{xy} = 1$, $\langle -\nabla^g f(z_j) \rangle \cong T\mathcal{M}_{xy}$. Assim, pela decomposição de $T_{z_j} W^u(x)$ no Teorema 3.1.3 (pois $z_j \in \mathcal{M}_{xy}$), obtemos um isomorfismo $T_{z_j} V_j \cong \mathcal{V}_{z_j} W^s(y)$. Vemos na demonstração do Teorema 3.1.3 que $\mathcal{V}_{z_j} W^s(y)$ tem orientação induzida pela orientação (pré-determinada) de $T_y W^u(y)$, logo, através desse isomorfismo, temos uma orientação em $T_{z_j} V_j$ induzida pela orientação de $T_y W^u(y)$. Esta orientação pode ou não ser compatível com aquela determinada pela orientação de $W^u(x)$, através da inclusão, utilizando a equação (3.3.2), que é obtida escolhendo o primeiro vetor da base de $T_{z_j} W^u(x)$ como $-\nabla^g f(z_j)$, completando-a para que concorde com a orientação pré-determinada, e tomando este completamento como base para $T_{z_j} V_j$.

Em suma, utilizamos as duas decomposições para $T_{z_j} W^u(x)$ para obter

$$\langle -\nabla^g f(z_j) \rangle \oplus T_{z_j} V_j \cong T_{z_j} \mathcal{M}_{xy} \oplus \mathcal{V}_{z_j} W^s(y).$$

Portanto, os respectivos primeiros termos das duas somas concordam em orientação se e só se os segundos termos também o fazem. Assim, as orientações descritas acima concordam se e só se $n_{z_j} = 1$, onde n_{z_j} é o sinal característico da Equação (3.2.1).

Fixe α_j gerador de $H_k(V_j, W_j)$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ induzido pela orientação de $W^u(y)$. Lembramos que N_x é contraído em $W^u(x) \cap f^{-1}[c, \infty) = W^u(x) \cap N_x$ e L_x é contraído em $W^u(x) \cap f^{-1}(c) = W^u(x) \cap L_x$. Utilizando agora a orientação de $W^u(x)$, obtemos um gerador

$$\beta \in H_{k+1}(W^u(x) \cap N_x, W^u(x) \cap L_x) \cong H_{k+1}(N_x, L_x).$$

A classe de homologia $\partial_j \beta \in H_k(W^u(x) \cap L_x, \overline{W^u(x) \cap L_x} \setminus V_j) \cong H_k(V_j, W_j)^1$ é um gerador de

¹Se $A \subseteq X$, X/A é Hausdorff e $\overline{X-A}$ é compacto, temos o homeomorfismo $X/A \approx \overline{X-A}/\partial(X-A)$. Pelo Teorema 1.3.9, $H(X, A) \cong H(\overline{X-A}, \partial(X-A))$.

e portanto $H_j(N_k) \cong H_j(N_{k-1})$ se $j \neq k, k-1$. Tomando $j < k < k+1 < \dots < n$, temos

$$H_j(N_k) \cong H_j(N_{k+1}) \cong \dots \cong H_j(N_n) = H_j(M)$$

e, tomando $j > k > k-1 > \dots > -1$, temos

$$H_j(N_k) \cong H_j(N_{k-1}) \cong \dots \cong H_j(N_{-1}) = H_j(\emptyset) = 0.$$

Este último resultado garante que a seqüência horizontal e a seqüência vertical do seguinte diagrama comutativo são exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H_k(N_k) & \xrightarrow{\pi_*} & H_k(N_k, N_{k-1}) & \xrightarrow{\widehat{\partial}_{*k}} & H_{k-1}(N_{k-1}) \\
 & & & & \downarrow \widehat{\pi}_* & & \downarrow \widehat{\pi}_* \\
 & & & & & & H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2}) \\
 & & & & \downarrow \partial_{*k} & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

Note que a seqüência horizontal é justamente uma parte da seqüência exata longa do par (N_k, N_{k-1}) , já que $H_k(N_{k-1}) = 0$. Analogamente, a seqüência vertical é parte da seqüência exata longa do par (N_{k-1}, N_{k-2}) . Segue que $\widehat{\pi}_*$ é injetora, e a comutatividade do diagrama garante que $\ker \partial_{*k} = \ker \widehat{\partial}_{*k}$. Pelo Lema 3.3.7, $\ker \partial_{*k} \cong \ker \partial_k^c$. Como a seqüência horizontal é exata, $\ker \widehat{\partial}_{*k} \cong H_k(N_k)$ e concluímos $\ker \partial_k^c \cong H_k(N_k)$.

Segue que a seqüência exata curta

$$H_{k+1}(N_{k+1}, N_k) \xrightarrow{\partial_{*k+1}^c} H_k(N_k) \xrightarrow{i_*} H_k(N_{k+1}) \longrightarrow 0$$

que é parte da seqüência do par (N_{k+1}, N_k) , é isomorfa à seqüência

$$CM_{k+1}(f) \xrightarrow{\partial_{k+1}^c} \ker \partial_k^c \longrightarrow H_k(M) \longrightarrow 0.$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{\ker \partial_k^c}{\text{Im } \partial_{k+1}^c} \cong H_k(M).$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] BANYAGA, A.; HURTUBISE, D. *Lectures on Morse Homology*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [2] BOTT, R. *Morse Theory Indomitable*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1988.
- [3] CONLEY, C. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*. CMBS Regional Conference Series in Mathematics, n. 38. Providence: American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [4] FLOER, A. *Witten's complex and infinite-dimensional Morse theory*. Journal of Differential Geometry, vol. 30, n. 1, p. 207-221, 1989.
- [5] FRANKS, J. *Homology and dynamical systems*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, n. 49. Providence: American Mathematical Society, R.I., 1982.
- [6] FRANKS, J. *Morse-Smale flows and homotopy theory*. Topology, vol. 18, p. 199-215, 1979.
- [7] FRANZOSA, R.D. *Index filtrations and the homology index braid for partially ordered Morse decompositions*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 298, n. 1, p. 193-213, November 1986.
- [8] GALLIER, J.; QUANTAINCE, J. *Homology, Cohomology, and Sheaf Cohomology*. Disponível em: <https://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/sheaf-coho.html>. Acesso em: 24 mar. 2021.
- [9] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [10] HATCHER, A. *Algebraic topology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- [11] HIRSCH, M.W. *Differential Topology*. Springer, 1976.
- [12] LIMA, D.V. *Matrizes de Conexão via o Complexo de Morse-Witten*. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/307542>.
- [13] MILNOR, J. *Lectures on the H-Cobordism Theorem*. Princeton University Press, Princeton, 2015. <https://doi.org/10.1515/9781400878055>

- [14] MILNOR, J. *Morse Theory* Princeton University Press, New Jersey, 1969.
- [15] MUNKRES, J.R. *Elements of algebraic topology*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- [16] PALIS, J.; MELO, W. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [17] SALAMON, D.A. *Connected Simple Systems and The Conley Index of Isolated Invariant Sets*. Transactions of the American Mathematical Society, vol 291, n. 1, p. 1-41, 1985. doi:10.2307/1999893.
- [18] SALAMON, D.A. *Morse Theory, The Conley Index and Floer Homology*. *Bull. London Math. Soc.* 22, no. 2, p. 113-140, 1990.
- [19] SMALE, S. *Generalized Poincare's Conjecture in Dimensions Greater Than Four*. *Annals of Mathematics*, vol. 74, n. 2, second series, p. 391-406, 1961. doi:10.2307/1970239
- [20] SMALE, S. *On Gradient dynamical systems*, *Annals of Mathematics*, vol. 74, n. 2, p. 199-206, 1961.
- [21] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [22] WEBER, J. *The Morse-Witten complex via dynamical systems*. *Expositiones Mathematicae* n. 24, p. 127-159, 2006.
- [23] WITTEN, E. *Supersymmetry and Morse theory*. *Journal of Differential Geometry* vol. 17, n. 4, p. 661-692, 1982.