

# Homologia e aplicações à ciência de dados

**Felipe Nadona**



Universidade Federal do ABC

**Título:** Homologia e aplicações à ciência de dados

**Autor:** Felipe Nadona

**Orientador:** Prof. Dr. Francisco J. Gozzi

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Daniel Mirando Machado**

Universidade Federal do ABC

**Profa. Dra. Dahisy Valadão de Souza Lima**

Universidade Federal do ABC

Santo André, 11 de dezembro de 2020.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares algébricas</b>	<b>2</b>
2.1	Álgebra linear . . . . .	2
2.2	Álgebra homológica . . . . .	3
2.3	Homologia . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Homologia singular</b>	<b>16</b>
3.1	Espaço vetorial da homologia singular . . . . .	16
3.2	Homologia e homotopia . . . . .	20
3.3	Homologia relativa . . . . .	21
3.4	Propriedades da homologia singular . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Complexos CW</b>	<b>30</b>
4.1	Definições iniciais . . . . .	30
4.2	Definição e exemplos de complexos CW . . . . .	32
4.3	Homologia de complexos CW . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Homologia persistente</b>	<b>38</b>
5.1	Motivação para a homologia persistente . . . . .	38
5.2	Complexo de Vietoris-Rips e persistência . . . . .	39
5.3	Diagrama de persistência e estabilidade . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>45</b>

# Resumo

A homologia é uma construção matemática que estuda invariantes por deformações contínuas capaz de fornecer informações estruturais de um espaço topológico, detectando “loops” e cavidades  $n$ -dimensionais presentes neste espaço. Este trabalho tem como objetivo discorrer sobre os principais resultados existentes sobre este tema, considerando os espaços de homologia de um espaço topológico sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Inicialmente, a homologia será apresentada do ponto de vista algébrico, mostrando algumas técnicas e resultados relevantes da área, como o Lema do cinco e o Lema da Serpente (Snake Lemma). Depois disso, estudaremos a homologia singular e a homologia de um complexo CW (um espaço construído de forma indutiva a partir de conjuntos chamados de  $n$ -esqueletos e homeomorfismos que “colam” estes conjuntos para formar o espaço desejado). Neste ponto, apresentaremos resultados importantes como o Teorema da Excisão, a sequência de Mayer-Vietoris e a equivalência entre a homologia singular e a homologia celular no caso de um complexo CW. Encerraremos o trabalho com a atual aplicação desta teoria na ciência de dados através do conceito de homologia persistente para a filtração de Vietoris-Rips construída a partir de uma nuvem de pontos.

**Palavras Chaves:** Homologia, Complexos de cadeia, Persistência, “Point clouds”

# Abstract

Homology is a mathematical construction that studies invariants by continuous deformations capable of providing structural insights about a topological space by detecting “loops” and  $n$ -dimensional “holes” present in this space. The aim of this work is to present the main results on this topic by considering the homology of a topological space over a field of coefficients  $\mathbb{K}$ . Initially, the homology will be presented from the algebraic point of view, showing some techniques and relevant results in the area, as the five Lemma and the Snake Lemma. Afterwards, we shall study the singular homology and the homology of a CW complex (a space built inductively from sets called  $n$ -skeleta and homeomorphisms that attach these sets to form the space desired). In this point, we will present important results as the Excision theorem, the Mayer-Vietoris sequence and the equivalence between singular homology and cellular homology in the case of CW space. We will finish with an application to data science by means of persistent homology of a Vietoris-Rips filtration over a point cloud data.

**Keywords:** Homology, Chain complexes, Persistence, Point clouds

# 1 Introdução

O estudo da teoria da homologia possui múltiplas origens, sendo uma delas durante o século XIX com Riemann como um esforço para se definir alguns invariantes topológicos chamados de *números de Betti* e *coeficientes de torção* de uma dada superfície, mantendo-se com este objetivo até os anos 30 do século XX, período no qual foram introduzidas as primeiras técnicas algébricas com propósito de cálculo [1]. Em meados da década de 40, ela passou a ser utilizada para se estudar alguns sistemas algébricos. De uma maneira geral, pode-se dizer que a homologia é uma área da topologia algébrica que associa a um dado espaço topológico  $X$  uma sequência de grupos abelianos  $H_n(X)$ , onde  $n$  é um inteiro não-negativo. Assim, para cada valor de  $n$ , o conjunto  $H_n(X)$  traz informações sobre certas características estruturais do espaço topológico  $X$ , como a quantidade de componentes conexas por caminhos e a presença de “buracos”  $n$ -dimensionais (por exemplo os “loops” bidimensionais ou cavidades tridimensionais) no espaço.

Este trabalho tem como objetivo estudar os espaços vetoriais de homologia sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Mais especificamente, serão estudadas a homologia singular de um espaço topológico qualquer e a homologia de complexos CW.

Este estudo tem como relevância a atual aplicação dos conceitos provenientes da topologia algébrica na ciência de dados, onde através de uma nuvem de dados, ao se utilizar da homologia, é possível inferir algumas características globais do objeto cuja nuvem se originou.

O trabalho é dividido em quatro partes, sendo que na Seção 2, serão apresentadas as ideias algébricas necessárias para o estudo da homologia do ponto de vista topológico. Nesta seção, definiremos complexos de cadeia, mapas entre complexos e homologia, além de apresentar importantes resultados como a existência do chamado morfismo de conexão e o Lema da serpente. Na Seção 3, apresentaremos o conceito de homologia dentro de um contexto topológico, definindo a homologia singular e a homologia singular de um par de espaços, junto do Teorema de Excisão e da sequência de Mayer-Vietoris. A Seção 4 definirá a ideia de complexos CW de um espaço topológico, sendo encerrada com o resultado que diz que a homologia de um complexo CW de um espaço  $X$  é equivalente a homologia singular deste mesmo espaço, o que facilitará este cômputo. Por fim, a Seção 5 apresentará menos rigorosidade matemática, prestando apenas a enunciar definições e resultados importantes de aplicações do conceito de homologia na ciência de dados. Neste ponto, serão definidos o complexo de Vietoris-Rips, a homologia persistente e, por último, a seção será encerrada com resultados relativos a estabilidade dos chamados diagramas de persistência.

## 2 Preliminares algébricas

Neste capítulo, serão adotadas algumas definições que podem ser encontradas em [2] e [3].

### 2.1 Álgebra linear

Para esta seção, adotaremos como convenção que  $\mathbb{K}$  representa um corpo,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais e que um espaço vetorial de dimensão nula será representado por 0. Usaremos também que as funções  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  são transformações lineares.

**Definição 2.1.1.** O kernel (ou núcleo) de uma transformação linear  $f : A \rightarrow B$ , representado por  $\ker(f)$ , é um subconjunto do domínio de  $f$  formado por todos os elementos de  $A$  que são levados no elemento nulo de  $B$ . Desta forma, se  $f(a) = 0$  para algum  $a \in A$ , então  $a \in \ker(f)$ .

**Definição 2.1.2.** A imagem de uma transformação linear  $f : A \rightarrow B$  é um subconjunto do contra-domínio de  $f$  dado por todos os elementos do conjunto  $f(A)$ . Este conjunto é representado por  $\text{Im}(f)$ .

**Definição 2.1.3.** O co-núcleo de uma transformação  $f$  é definido como o quociente entre o contra-domínio de  $f$  e a imagem de  $f$ . Ou seja,  $\text{coker}(f) := B/\text{Im}(f)$ .

Sendo assim, sejam

$$[x] = x + \text{Im}(f_n)$$

e

$$[y] = y + \text{Im}(f_n)$$

elementos do  $\text{coker}(f)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Então,

$$[x] + [y] = (x + y) + \text{Im}(f_n)$$

e

$$\alpha[x] = \alpha x + \text{Im}(f_n),$$

pois  $\text{Im}(f_n)$  é um subespaço de  $B$ .

Estas são importantes definições da álgebra linear para o conteúdo presente neste trabalho.

**Definição 2.1.4.** Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  transformações lineares. Dizemos que a composição  $g \circ f$  é exata em  $B$  se  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ .

Considere agora a sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

onde o mapa que vai de 0 em  $A$  é o mapa nulo injetivo e o mapa que vai de  $C$  em 0 é o mapa nulo sobrejetivo. Se esta sequência é exata em  $A$ ,  $B$  e  $C$ , então  $f$  é injetiva e  $g$  é sobrejetiva. Neste caso, este diagrama é conhecido como sequência exata curta, e será importante para este trabalho.

Como exemplo, dada uma transformação linear qualquer  $f : A \longrightarrow B$ , sejam as transformações  $i : \ker(f) \longrightarrow A$  o mapa de inclusão (injetor) e  $j : B \longrightarrow \text{coker}(f)$  o mapa quociente (sobrejetor). Então a sequência

$$0 \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j} \text{coker}(f) \longrightarrow 0$$

é exata.

**Definição 2.1.5.** *Considere os mapas  $f : A \longrightarrow B$ ,  $g : C \longrightarrow A$  e  $h : C \longrightarrow A$ . Dizemos que  $f$  é um monomorfismo se  $f \circ g = f \circ h$  implicar que  $g = h$ .*

*Analogamente, se temos os mapas  $f : A \longrightarrow B$ ,  $g : B \longrightarrow C$  e  $h : B \longrightarrow C$ , chamamos  $f$  de epimorfismo se  $g \circ f = h \circ f$ , então  $g = h$ .*

Vale ressaltar que se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são espaços vetoriais com  $f$  e  $g$  transformações lineares, então dizer que  $f$  é um monomorfismo equivale a dizer que  $f$  é injetiva, e dizer que  $g$  é um epimorfismo é equivalente a dizer que  $g$  é sobrejetiva.

## 2.2 Álgebra homológica

**Definição 2.2.1.** *Seja  $A_n$  uma sequência de  $\mathbb{K}$ -espaço vetoriais, com  $n \in \mathbb{Z}$ , e considere as funções  $\partial_n : A_n \longrightarrow A_{n-1}$  como transformações  $\mathbb{K}$ -lineares onde  $\partial_{n-1}(\partial_n) = 0$ . Dizemos que a sequência*

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

é um complexo de cadeias sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Este complexo é representado como  $(A, \partial)$ .

Como um exemplo de complexo, tome o espaço vetorial dos números reais  $\mathbb{R}$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , o espaço nulo  $0$  constituído pelo zero dos números reais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , a aplicação  $\partial : \mathbb{R} \longrightarrow 0$  e a aplicação  $\partial' : 0 \longrightarrow \mathbb{R}$ . Sendo  $\partial' \circ \partial = \partial \circ \partial' = 0$ , temos que a sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial'} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial'} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial'} \cdots$$

representa o complexo de cadeia  $(\mathbb{R}, \partial)$ . Esta sequência não é exata pois nos níveis representados por  $\mathbb{R}$  temos  $\ker(\partial) = \mathbb{R}$  e  $\text{Im}(\partial) = 0$ .

Outro exemplo de complexo de cadeias é dado pelo diagrama

$$\cdots \xrightarrow{\partial'} 0 \xrightarrow{\partial'} 0 \xrightarrow{\partial''} \mathbb{K} \xrightarrow{\partial} \mathbb{K} \xrightarrow{\partial'''} 0 \xrightarrow{\partial'} \cdots \quad (1)$$

onde  $\partial : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$  é o mapa identidade. Neste caso, temos que nos níveis que correspondem ao espaço nulo e no primeiro  $\mathbb{K}$ , o núcleo da transformação é dado por  $\ker(\partial) = 0$  e a sua imagem por  $\text{Im}(\partial) = 0$ , enquanto que no nível correspondente ao segundo  $\mathbb{K}$  temos  $\ker(\partial) = \mathbb{K}$  e  $\text{Im}(\partial) = \mathbb{K}$ . Logo, o complexo de cadeia do diagrama (1) é exato.



Sejam  $(A, \partial)$  e  $(B, \partial')$  complexos de cadeias. Agora, vamos considerar os seguintes mapas  $f_n : A_n \rightarrow B_n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , e o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\partial'_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Sendo cada  $f_n$  uma transformação linear e assumindo que cada quadrado do diagrama acima é comutativo (ou seja,  $\partial'_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ \partial_{n+1}$ ), podemos definir  $f : (A, \partial) \rightarrow (B, \partial')$  como sendo um mapa entre complexos, onde  $f$  é formada pelos mapas  $f_n$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Com estas definições, se tomarmos  $(A, \partial)$ ,  $(B, \partial')$  e  $(C, \partial'')$  como complexos de cadeias e  $f : (A, \partial) \rightarrow (B, \partial')$  e  $g : (B, \partial') \rightarrow (C, \partial'')$  como mapas entre complexos, podemos escrever a seguinte sequência:

$$0 \longrightarrow (A, \partial) \xrightarrow{f} (B, \partial') \xrightarrow{g} (C, \partial'') \longrightarrow 0 \quad (2)$$

Nesta sequência, os complexos  $(A, \partial)$ ,  $(B, \partial')$  e  $(C, \partial'')$  estão omitidos, mas se eles fossem escritos eles seriam as colunas deste diagrama.

**Definição 2.2.2.** Dizemos que uma composição entre os mapas de um complexo é exata quando a composição de todas as transformações lineares o forem.

**Definição 2.2.3.** Uma sequência exata curta de complexos de cadeia é dada pelo diagrama (2) quando as  $f_n$  são monomorfismos e  $g_n$  são epimorfismos para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Ou seja, nesta situação, as linhas do diagrama (2) são sequências exatas curtas.

**Definição 2.2.4.** Sejam  $(A, \partial)$  um complexo de cadeias sobre  $\mathbb{K}$  e  $B \subseteq A$ . Dizemos que  $(B, \partial')$  é um subcomplexo de  $(A, \partial)$  se para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , temos que  $B_n \subset A_n$ , e se  $x \in B_n$ , então  $\partial'_n(x) = \partial_n(x)$ .

Vamos agora restringir o domínio de  $\partial_n$  ao  $\ker(f_n)$  e definir  $\partial_{n|} : \ker(f_n) \rightarrow A_{n-1}$ .

**Lema 2.2.1.** O complexo  $(\ker(f), \partial_{|})$  é um sub-complexo de  $(A, \partial)$ .

*Demonstração.* Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \ker(f_n) & \xrightarrow{\partial_{n|}} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\partial'_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Tome  $a \in \ker(f_n)$ . Então  $f_n(a) = 0$ . Como  $\partial'_n(0) = 0$ , temos que esta imagem está em  $B_{n-1}$ . Agora, aplique  $\partial_{n|}$  em  $a$  e depois  $f_{n-1}$  em  $\partial_{n|}(a)$ . Esta imagem também está em  $B_{n-1}$ . Porém, como o diagrama acima é comutativo, temos que  $\partial'_n(f_n(a)) = f_{n-1}(\partial_{n|}(a))$ . Logo,  $f_{n-1}(\partial_{n|}(a)) = 0$  e, desta forma,  $\partial_{n|}(a) \in \ker(f_{n-1})$ . Assim, concluímos que  $\partial_{n|}$  leva  $\ker(f_n)$  no  $\ker(f_{n-1}) \subset A_{n-1}$  e, portanto, temos que  $(\ker(f), \partial_{|})$  é um subcomplexo  $(A, \partial)$ .  $\square$

Da mesma forma, se restringirmos o domínio do operador  $\partial'_n$  que leva  $B_n$  em  $B_{n-1}$  a  $Im(f_n)$ , temos o operador  $\partial'_{n|} : Im(f_n) \longrightarrow B_{n-1}$ .

**Lema 2.2.2.** *O complexo  $(Im(f), \partial')$  é um subcomplexo de  $(B, \partial')$ .*

*Demonstração.* Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Im(f_n) & \xrightarrow{\partial'_{n|}} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Seja  $a \in A_n$ . Se aplicarmos  $\partial_n$  a  $a$  e em seguida  $f_{n-1}$  a  $\partial_n(a)$ , temos que

$$f_{n-1}(\partial_n(a)) \in Im(f_{n-1}) \subset B_{n-1}.$$

Da mesma forma, temos que

$$\partial'_n(f_n(a)) \in B_{n-1}.$$

Mas como o diagrama é comutativo,

$$f_{n-1}(\partial_n(a)) = \partial'_n(f_n(a)).$$

Sendo assim, sendo  $f_n : A \longrightarrow Im(f_n)$  sobrejetora,

$$Im(\partial'_{n|}) \subset Im(f_{n-1}) \subset B_{n-1}.$$

Logo,

$$\cdots \longrightarrow Im(f_n) \xrightarrow{\partial'_{n|}} Im(f_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

é um subcomplexo de  $(B, \partial')$ .  $\square$

**Proposição 2.2.3.** *O operador  $\bar{\partial}_n : coker(f_n) \longrightarrow coker(f_{n-1})$  definido como*

$$\bar{\partial}_n(x + Im(f_n)) := \partial'_n(x) + Im(f_{n-1})$$

*está bem definido e é uma transformação linear.*

*Demonstração.* De fato, tome um representante  $x$  de  $y + Im(f_n)$  com  $y \in B_n$ . Sendo assim,

$$(x - y) \in Im(f_n),$$

o que implica que

$$\partial'_n(x - y) \in Im(f_{n-1})$$

pele Lema 2.2.2. Como  $\partial'_n$  é uma transformação linear, temos que

$$\partial'_n(x) \in (\partial'_n(y) + Im(f_{n-1})).$$

Ou seja, independentemente do representante de uma classe que seja escolhido, o resultado final será sempre o mesmo. Isso mostra que o mapa  $\bar{\partial}_n$  está bem definido.

Sabendo que  $\partial'_n$  é uma transformação linear, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n([x] + [y]) &= \bar{\partial}_n(x + y + Im(f_n)) \\ &= \partial'_n(x + y) + Im(f_{n-1}) \\ &= \partial'_n(x) + Im(f_{n-1}) + \partial'_n(y) + Im(f_{n-1}) \\ &= \bar{\partial}_n([x]) + \bar{\partial}_n([y]) \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_n(\alpha[x]) &= \bar{\partial}_n(\alpha x + \text{Im}(f_n)) \\
&= \alpha \partial'_n(x) + \text{Im}(f_{n-1}) \\
&= \alpha(\partial'_n(x) + \text{Im}(f_{n-1})) \\
&= \alpha(\bar{\partial}_n([x]))
\end{aligned}$$

Logo,  $\bar{\partial}_n$  é uma transformação linear.  $\square$

**Lema 2.2.4.** *A seqüência*

$$\cdots \longrightarrow \text{coker}(f_n) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} \text{coker}(f_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

define um complexo.

*Demonstração.* Pela definição de  $\bar{\partial}_n$ , temos que se  $[x] \in \text{coker}(f_n)$  com  $[x] = x + \text{Im}(f_n)$ , a aplicação deste operador bordo na classe  $[x]$  gera  $(\partial'_n(x) + \text{Im}(f_{n-1})) \in \text{coker}(f_{n-1})$ . Logo, se aplicarmos  $\bar{\partial}_{n-1}$  em  $\bar{\partial}_n([x])$ , temos  $\bar{\partial}_{n-1}(\partial'_n(x) + \text{Im}(f_{n-1})) = \partial'_{n-1}(\partial'_n(x) + \text{Im}(f_{n-2}))$ . Porém, pela definição de  $\partial'_n$ , sabemos que  $\partial'_{n-1}(\partial'_n) = 0$ , o que nos leva a concluir que  $\bar{\partial}_{n-1}(\partial'_n(x) + \text{Im}(f_{n-1})) = 0 + \text{Im}(f_{n-2}) = [0]$ . Portanto  $\bar{\partial}_{n-1}(\bar{\partial}_n) = [0]$ .  $\square$

Com estes lemas é possível visualizar que se escrevermos a seqüência

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \text{coker}(f) \longrightarrow 0$$

na verdade estamos lidando com um diagrama mais complexo, onde as linhas verticais correspondem a complexos de cadeias e as linhas horizontais correspondem a seqüências exatas. Este diagrama pode ser visualizado a seguir:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial'_{n+1} & & \downarrow \bar{\partial}_{n+1} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \ker(f_n) & \xrightarrow{i_n} & A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{j_n} & \text{coker}(f_n) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \bar{\partial}_n & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \ker(f_{n-1}) & \xrightarrow{i_{n-1}} & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & \text{coker}(f_{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \partial'_{n-1} & & \downarrow \bar{\partial}_{n-1} & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Neste diagrama, a função  $i_n$  é uma inclusão e a função  $j_n$  toma um elemento de  $B_n$  e o leva na sua classe dentro do  $\text{coker}(f_n)$ . Ou seja, é uma função que “quocienta”  $B_n$  com a imagem  $(f_n)$ , sendo ela sobrejetiva.

Para encerrar esta seção, vamos mostrar um lema muito útil conhecido como Lema dos Cinco.

**Lema 2.2.5.** *Considere o seguinte diagrama formado por espaços vetoriais e transformações lineares, onde cada linha é uma sequência exata e cada quadrado é comutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_2 & \xrightarrow{i_2} & A_3 & \xrightarrow{i_3} & A_4 & \xrightarrow{i_4} & A_5 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
 B_1 & \xrightarrow{j_1} & B_2 & \xrightarrow{j_2} & B_3 & \xrightarrow{j_3} & B_4 & \xrightarrow{j_4} & B_5
 \end{array}$$

Se  $f_1$  for um epimorfismo,  $f_5$  for um monomorfismo e  $f_2$  e  $f_4$  forem isomorfismos, então  $f_3$  é um isomorfismo.

*Demonstração.* Vamos mostrar primeiro que  $f_3$  é um monomorfismo. Para isso, mostraremos que  $\ker(f_3) = \{0\}$ .

Tome  $a_3 \in A_3$  tal que  $a_3 \in \ker(f_3)$ . Então, temos que  $f_3(a_3) = 0$ . Com isso, se aplicarmos  $j_3$  neste resultado, chegamos que  $j_3(f_3(a_3)) = 0$ . Contudo, cada quadrado do diagrama é comutativo, então  $f_4(i_3(a_3)) = 0$ , e sabendo que  $f_4$  é um isomorfismo, temos que ela também é monomorfismo, o que implica que  $i_3(a_3) = 0$ . Usando que a sequência é exata, como  $a_3 \in \ker(i_3)$ , temos que existe  $a_2 \in A_2$  tal que  $i_2(a_2) = a_3$  e  $f_3(i_2(a_2)) = 0$ . Usando novamente a comutatividade dos quadrados do diagrama, chegamos em  $j_2(f_2(a_2)) = 0$ , e concluímos que  $f_2(a_2) \in \ker(j_2)$ . Sendo a sequência exata, deve existir  $b_1 \in B_1$  tal que  $j_1(b_1) = f_2(a_2)$ . Porém,  $f_1$  é um epimorfismo e, sendo assim, existe  $a_1 \in A_1$  tal que  $f_1(a_1) = b_1$  e portanto  $j_1(f_1(a_1)) = f_2(a_2)$ . Como o quadrado é comutativo, temos que  $f_2(i_1(a_1)) = f_2(a_2)$  e usando que  $f_2$  é um isomorfismo, concluímos que  $i_1(a_1) = a_2$ . Desta forma, concluímos que  $a_2 \in \text{Im}(i_1) = \ker(i_2)$ , pois a sequência é exata. Logo,  $a_3 = i_2(a_2) = 0$ , e  $f_3$  é um monomorfismo.

Para mostrar que  $f_3$  é um epimorfismo, tome  $b_3 \in B_3$  e aplique  $j_3$ , o que nos leva no conjunto  $B_4$ . Sabendo que  $f_4$  é um isomorfismo, deve existir  $a_4 \in A_4$  tal que  $f_4(a_4) = j_3(b_3)$ . Como a sequência é exata,  $j_3(b_3) \in \ker(j_4)$  e portanto,  $j_4(j_3(b_3)) = 0$ . Sendo cada quadrado do diagrama comutativo, temos que  $f_5(i_4(a_4)) = 0$ , e como  $f_5$  é um monomorfismo, conclui-se que  $i_4(a_4) = 0$ . Desta forma,  $a_4 \in \ker(i_4) = \text{Im}(i_3)$ , pois a sequência é exata. Logo, suponha que  $i_3(a_3) = a_4$ , o que nos leva a concluir que  $f_4(i_3(a_3)) = j_3(f_3(a_3)) = j_3(b_3)$ , pois o quadrado é comutativo. Agora, sendo  $j_3$  uma transformação linear, temos que  $j_3(f_3(a_3)) - j_3(b_3) = 0$  e  $j_3(f_3(a_3) - b_3) = 0$ , e daí conclui-se que  $(f_3(a_3) - b_3) \in \ker(j_3)$ . Novamente, usando a exatidão da sequência, temos que deve existir  $b_2 \in B_2$  tal que  $j_2(b_2) = (f_3(a_3) - b_3)$ . Contudo, temos que  $f_2$  é isomorfismo e, sendo assim, existe  $a_2 \in A_2$  tal que  $f_2(a_2) = b_2$ . Usando a comutatividade do quadrado, temos que  $(f_3(a_3) - b_3) = j_2(f_2(a_2)) = f_3(i_2(a_2))$ , e, desta forma,  $f_3(a_3) - f_3(i_2(a_2)) = b_3$ . Como  $f_3$  é uma transformação linear, temos que  $f_3(a_3 - i_2(a_2)) = b_3$ , e concluímos que  $f_3$  é um epimorfismo.

Como  $f_3$  é um monomorfismo e um epimorfismo, então este mapa é um isomorfismo.  $\square$

## 2.3 Homologia

A motivação para o estudo da homologia é que o complexo

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \longrightarrow \cdots$$

não precisa ser exato. Sendo assim, a homologia estudaria o “defeito” de tal complexo.

**Proposição 2.3.1.** *Seja  $(A, \partial)$  um complexo. Então, temos que  $Im(\partial_{n+1}) \subseteq ker(\partial_n)$ .*

*Demonstração.* Tome  $x \in A_{n+1}$ . Então, conclui-se que  $\partial_{n+1}(x) \in A_n$ . Como a sequência  $(A, \partial)$  é um complexo,  $\partial_n(\partial_{n+1}) = 0$ . Logo,  $\partial_n(\partial_{n+1}(x)) = 0$ , o que implica que  $\partial_{n+1}(x) \in ker(\partial_n)$ . Portanto,  $Im(\partial_{n+1}) \subseteq ker(\partial_n)$ .  $\square$

**Definição 2.3.1.** *Se  $Z_n(V) = ker(\partial_n)$  e  $D_n(V) = Im(\partial_{n+1})$ , então o espaço vetorial da homologia de  $A$  é definido como  $H_n(A) = Z_n(A) / D_n(A)$ .*

Se calcularmos a homologia do complexo apresentado no diagrama (1), temos que  $H_n(A) = 0$ , pois para todo  $n$  o núcleo e a imagem da aplicação  $\partial$  coincidem.

Agora, se tomarmos o complexo

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \mathbb{K} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{K} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \cdots$$

onde a aplicação  $\partial$  é o mapa nulo, temos que nos níveis representados pelo espaço nulo o núcleo de  $\partial$  é o próprio espaço nulo, assim como a imagem desta aplicação. Sendo assim, nestes níveis,  $H_n(A) = 0/0 = 0$ . Já nos níveis representados por  $\mathbb{K}$ , temos que  $ker(\partial) = \mathbb{K}$  e  $Im(\partial) = 0$ , implicando em  $H_m(A) = \mathbb{K}/0 = \mathbb{K}$ .

**Proposição 2.3.2.** *Considere o mapa entre complexos  $f : (A, \partial) \longrightarrow (B, \partial')$ . Este mapa induz a transformação linear  $f_* : H_n(A) \longrightarrow H_n(B)$  definida como  $f_{*n}([x]) = f_n(x) + D_n(B)$ .*

*Demonstração.* Como  $f$  é um mapa entre complexos, temos que

$$f_n(Z_n(A)) \subseteq Z_n(B).$$

Se

$$f_{*n}([x]) = f_n(x) + D_n(B),$$

temos que mostrar que esta função é bem definida e que ela é uma transformação linear. De fato, se tomarmos

$$[x] = x + D_n(A), \quad x \in Z_n(A),$$

e  $a$  como um representante de  $[x]$  teremos que  $(a - x) \in D_n(A)$ , o que implica que existe  $b \in A_{n+1}$  tal que  $\partial_{n+1}(b) = (a - x)$ . Sendo assim,

$$f_n(a - x) = f_n(\partial_{n+1}(b)) = \partial'_n(f_{n+1}(b))$$

pois o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\partial'_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

comuta. Sendo  $f_n$  uma transformação linear, temos que

$$f_n(a) - f_n(x) = \partial'_n(f_{n+1}(b)) \in B_n(B)$$

e portanto  $f_n(a) \in (f_n(x) + D_n(B))$ . Se tomarmos um representante  $c$  de  $[x]$  e usarmos o mesmo argumento anterior, chegaremos a conclusão que  $f_n(c) \in (f_n(x) + D_n(B))$ . Logo, temos que o resultado não depende do representante tomado de uma dada classe. Sendo assim, cada  $f_{*n}$  é bem definida.

Para mostrarmos que cada  $f_{*n}$  é uma transformação linear, basta seguir o mesmo raciocínio que o feito na Proposição 2.2.3. Sendo assim, temos que  $f_{*n}$  é uma transformação linear.  $\square$

**Proposição 2.3.3.** *Considere os mapas entre complexos*

$$f : (A, \partial) \longrightarrow (B, \partial')$$

e

$$g : (B, \partial') \longrightarrow (C, \partial'').$$

Então, os mapas induzidos satisfazem a igualdade  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

*Demonstração.* Temos que a composição  $g \circ f$  é um mapa entre os complexos  $(A, \partial)$  e  $(C, \partial'')$ . Então, pela Proposição 2.3.2, sabemos que esta composição induz a transformação linear

$$(g \circ f)_* : H_n(A) \longrightarrow H_n(C),$$

onde  $(g \circ f)_{*n}([a]) = (g \circ f)_n(a) + D_n(C)$ .

Agora, considere a composição  $g_* \circ f_*$  sendo aplicada em  $[a] \in H_n(A)$ . Sendo assim,

$$g_{*n} \circ f_{*n}([a]) = g_{*n}(f_n(a) + D_n(B)) = g_{*n}([f_n(a)])$$

Logo,

$$g_{*n} \circ f_{*n}([a]) = g_n(f_n(a)) + D_n(C) = (g \circ f)_n(a) + D_n(C)$$

Portanto, temos o resultado  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$   $\square$

Seja o diagrama (3) uma sequência exata curta de complexos.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & (3) \\ & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial'_{n+1} & & \downarrow \partial''_{n+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial''_n & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \partial'_{n-1} & & \downarrow \partial''_{n-1} & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Considere os mapas  $f_n|$  e  $g_n|$  como sendo as restrições de  $f$  e de  $g$  à  $\ker(\partial_n)$  e  $\ker(\partial'_n)$  respectivamente. É importante notar que

$$f(\ker(\partial_n)) \subseteq \ker(\partial'_n)$$

e

$$g(\ker(\partial'_n)) \subseteq \ker(\partial''_n)$$

devido à comutatividade de cada quadrado do diagrama que ocorre pois as linhas são seqüências exatas.

Sejam as transformações  $\bar{f}_{n-1} : \text{coker}(\partial_n) \longrightarrow \text{coker}(\partial'_n)$  e  $\bar{g}_{n-1} : \text{coker}(\partial'_n) \longrightarrow \text{coker}(\partial''_n)$ , onde

$$\bar{f}_{n-1}([x]) = f_{n-1}(x) + \text{Im}(\partial'_n)$$

e

$$\bar{g}_{n-1}([y]) = g_{n-1}(y) + \text{Im}(\partial''_n).$$

A demonstração de que esses mapas são bem definidos e que são de fato transformações lineares segue a mesma ideia do que foi feito na Proposição 2.3.2.

**Lema 2.3.4.** *Considere a seqüência exata curta de complexos apresentada no diagrama 3. Então, existe uma seqüência de transformações lineares  $\delta_n : \ker(\partial''_n) \longrightarrow \text{coker}(\partial_n)$ , onde  $n$  é um inteiro positivo. Este é chamado de morfismo de conexão e é dado por  $\delta_n = f_{n-1}^{-1} \circ \partial'_n \circ g_n^{-1}$ .*

*Demonstração.* Tome  $x \in \ker(\partial''_n)$ . Então, sendo  $g_n$  um epimorfismo, existe  $w \in B_n$  tal que  $g_n(w) = x$ . Porém, como cada quadrado do diagrama formado pelas seqüências exatas curtas são comutativos, temos que

$$\partial''_n(g_n(w)) = g_{n-1}(\partial'_n(w)).$$

Sendo assim,

$$\partial'_n(w) \in \ker(g_{n-1}).$$

Contudo, as linhas do diagrama 3 são seqüências exatas curtas, o que implica que existe  $v \in A_{n-1}$  tal que

$$f_{n-1}(v) = \partial'_n(w)$$

sendo tal  $v$  único devido ao fato de  $f_{n-1}$  ser um monomorfismo. Entretanto, temos que  $v$  não necessariamente está em  $\text{Im}(\partial_n)$ . Com isto, podemos definir  $\delta_n : \ker(\partial''_n) \longrightarrow \text{coker}(\partial_n)$  como sendo

$$\delta_n(x) = v + \text{Im}(\partial_n),$$

ou

$$\delta_n = f_{n-1}^{-1} \circ \partial'_n \circ g_n^{-1}$$

Para mostrar que  $\delta_n$  está bem definida, tome outro elemento  $w' \in B_n$  tal que  $g_n(w') = x$ . Usando o mesmo argumento utilizado anteriormente, deve existir um único  $v' \in A_{n-1}$  tal que  $f_{n-1}(v') = \partial'_n(w')$ . Além disso, temos que

$$g_n(w') = g_n(w),$$

o que implica em

$$g_n(w' - w) = 0.$$

Portanto,

$$(w' - w) \in \ker(g_n).$$

Contudo, as linhas do diagrama 3 são seqüências exatas curtas e, portanto, deve existir um único  $a \in A_n$  tal que  $f_n(a) = (w' - w)$ . Além das linhas serem seqüências exatas, temos que as colunas são complexos de cadeia e  $f$  é um mapa entre complexos, implicando que cada quadrado do diagrama 3 é comutativo. Sendo assim,

$$f_{n-1}(\partial_n(a)) = \partial'_n(f_n(a)) = \partial'_n(w' - w) = \partial'_n(w') - \partial'_n(w)$$

Porém, sendo  $f_{n-1}$  uma transformação linear injetiva e

$$f_{n-1}(v') = \partial'_n(w')$$

e

$$f_{n-1}(v) = \partial'_n(w),$$

podemos concluir que

$$f_{n-1}(v' - v) = \partial'_n(w') - \partial'_n(w)$$

e

$$\partial_n(a) = (v' - v).$$

Logo,

$$v' = v + \partial_n(a).$$

Por fim, como  $\partial_n(a) \in \text{Im}(\partial_n)$ , temos que

$$[v'] = v + \text{Im}(\partial_n) = [v].$$

e concluímos que  $\delta_n$  está bem definida.

Para mostrar que  $\delta_n$  é uma transformação linear, basta seguir o mesmo que foi feito na demonstração da Proposição 2.2.3.  $\square$

Chamamos  $\delta_n$  de morfismo de conexão pois ele conecta a seqüência exata formada pelos núcleos das transformações  $\partial_n$ ,  $\partial'_n$  e  $\partial''_n$  à seqüência exata formada pelos co-núcleos das mesmas transformações anteriores. Isto pode ser visto no diagrama (4).

**Lema 2.3.5.** (*Snake Lemma*) *Considere a seqüência exata curta de complexos*

$$0 \longrightarrow (A, \partial) \xrightarrow{f} (B, \partial') \xrightarrow{g} (C, \partial'') \longrightarrow 0$$

Então, a seqüência mostrada no diagrama (4) é exata.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(\partial_n) & \xrightarrow{f_{n|}} & \ker(\partial'_n) & \xrightarrow{g_{n|}} & \ker(\partial''_n) \\ & & & & \delta_n & \nearrow & \\ \text{coker}(\partial_n) & \xleftarrow{f_{n-1|}} & \text{coker}(\partial'_n) & \xrightarrow{\bar{g}_{n-1|}} & \text{coker}(\partial''_n) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4)$$

*Demonstração.* Vamos dividir em quatro partes a demonstração.

**I)**  $\text{Im}(f_{n|}) = \ker(g_{n|})$ :

Seja  $x \in \text{Im}(f_{n|}) \subseteq \ker(\partial'_n)$ . Sabendo que as linhas do diagrama 3 são seqüências exatas, temos que  $g_n(f_n(y)) = 0$ . Logo,  $g_{n|}(x) = 0$ , e  $x \in \ker(g_{n|})$ , que nos leva a concluir que  $\text{Im}(f_{n|}) \subseteq \ker(g_{n|})$ .

Agora, se  $x \in \ker(g_{n|})$ , temos que  $x \in \ker(g_n)$ , e como as linhas do diagrama 3 são seqüências exatas curtas, deve existir um único  $y \in A_n$  tal que  $f_n(y) = x$ . Sabendo que os



quadrados do diagrama 3 são comutativos, temos que

$$0 = \partial'_n(x) = \partial'_n(f_n(y)) = f_{n-1}(\partial_n(y)).$$

Entretanto,  $f_{n-1}$  é uma transformação linear injetiva e, desta forma, seu núcleo é constituído apenas pelo elemento neutro. Portanto,  $\partial_n(y) = 0$ , e concluímos que  $y \in \ker(\partial_n)$  e  $f_n(y) = x$ . Logo,  $x \in \text{Im}(f_n)$  e  $\ker(g_n) \subseteq \text{Im}(f_n)$ . Como  $\ker(g_n) \subseteq \text{Im}(f_n)$  e  $\text{Im}(f_n) \subseteq \ker(g_n)$ , temos que

$$\text{Im}(f_n) = \ker(g_n)$$

**II)**  $\ker(\bar{g}_{n-1}) = \text{Im}(\bar{f}_{n-1})$ :

Tome  $[x] \in \ker(\bar{g}_{n-1})$ , onde  $[x] = x + \text{Im}(\partial'_n)$ , com  $x \in B_{n-1}$ . Então,  $\bar{g}_{n-1}([x]) = [0]$ , o que implica que  $g_{n-1}(x) \in \text{Im}(\partial'_n)$ . Logo, existe  $c \in C_n$  tal que  $\partial''_n(c) = g_{n-1}(x)$ . Porém,  $g_n$  é um epimorfismo e, sendo assim, existe  $w \in B_n$  tal que  $g_n(w) = c$ , o que nos leva a concluir que  $\partial''_n(g_n(w)) = g_{n-1}(x)$ . Mas como os quadrados do diagrama comutam, temos que  $g_{n-1}(x) = g_{n-1}(\partial'_n(w))$  e, sendo  $g_{n-1}$  uma transformação linear,  $g_{n-1}(x - \partial'_n(w)) = 0$ . Com isso, chegamos a conclusão de que

$$(x - \partial'_n(w)) \in \ker(g_{n-1}).$$

Sendo esta linha do diagrama uma sequência exata curta, existe  $y \in A_{n-1}$  tal que

$$f_{n-1}(y) = (x - \partial'_n(w)).$$

Então,  $x = f_{n-1}(y) + \partial'_n(w)$ . Como  $\partial'_n(w) \in \text{Im}(\partial'_n)$  e  $[x] = x + \text{Im}(\partial'_n)$ , concluímos que  $[x] = f_{n-1}(y) + \text{Im}(\partial'_n)$ . Portanto, existe  $[y] = y + \text{Im}(\partial_n)$  sendo que  $[y] \in \text{coker}(\partial_n)$ , tal que  $\bar{f}_{n-1}([y]) = [x]$ . Logo  $[x] \in \text{Im}(\bar{f}_{n-1})$ , o que implica em  $\ker(\bar{g}_{n-1}) \subseteq \text{Im}(\bar{f}_{n-1})$ .

Considere agora que  $[x] \in \text{Im}(\bar{f}_{n-1})$ . Logo, existe  $[y] \in \text{coker}(\partial_n)$ , tal que

$$\bar{f}_{n-1}([y]) = [x],$$

onde  $[y] = y + \text{Im}(\partial_n)$ . Se aplicarmos  $\bar{g}_{n-1}$  em  $\bar{f}_{n-1}([y])$ , temos  $\bar{g}_{n-1}(f_{n-1}(y) + \text{Im}(\partial'_n))$ , que é um representante da classe  $g_{n-1}(f_{n-1}(y)) + \text{Im}(\partial''_n)$ . Como esta linha no diagrama 3 é exata, temos que  $\text{Im}(f_{n-1}) = \ker(g_{n-1})$  e, portanto,  $g_{n-1}(f_{n-1}(y)) = 0$ . Com isso,  $\bar{g}_{n-1}([x]) = [0]$ , o que implica que  $[x] \in \ker(\bar{g}_{n-1})$ . Logo,  $\text{Im}(\bar{f}_{n-1}) \subseteq \ker(\bar{g}_{n-1})$ .

Como temos que  $\text{Im}(\bar{f}_{n-1}) \subseteq \ker(\bar{g}_{n-1})$  e  $\ker(\bar{g}_{n-1}) \subseteq \text{Im}(\bar{f}_{n-1})$ , então

$$\ker(\bar{g}_{n-1}) = \text{Im}(\bar{f}_{n-1}).$$

**III)**  $\text{Im}(g_n) = \ker(\delta_n)$ :

Seja  $x \in \text{Im}(g_n)$ . Então,  $x \in \ker(\partial''_n)$  e existe  $w \in \ker(\partial'_n)$  tal que  $g_n(w) = x$ . Sendo assim,  $\partial''_n(g_n(w)) = 0$  e, sabendo que cada quadrado do diagrama 3 comuta,  $g_{n-1}(\partial'_n(w)) = 0$ , o que nos leva a concluir que  $\partial'_n(w) \in \ker(g_{n-1})$ . Como as linhas do diagrama 3 são sequências exatas curtas, então existe um único  $y \in A_{n-1}$  tal que  $f_{n-1}(y) = \partial'_n(w)$ . Porém, como  $w \in \ker(\partial'_n)$ , temos que  $\partial'_n(w) = 0$  e  $y \in \ker(f_{n-1})$ . Entretanto,  $f_{n-1}$  é uma transformação linear injetiva e, com isso concluímos que  $y = 0$ , o que implica em  $y \in \text{Im}(\partial_n)$ . Logo,  $\delta_n(x) = y + \text{Im}(\partial_n) = [0]$  e, portanto,  $x \in \ker(\delta_n)$  e  $\text{Im}(g_n) \subseteq \ker(\delta_n)$ .

Tome agora  $x \in \ker(\delta_n)$ . Como  $g_n$  é um epimorfismo, então existe  $w \in B_n$  tal que

$$g_n(w) = x.$$

Sabemos também que  $\delta_n(x) = v + \text{Im}(\partial_n) = [0]$  e, sendo assim,  $v \in \text{Im}(\partial_n)$ , implicando que existe  $a \in A_n$  tal que  $\partial_n(a) = v$ , com  $f_{n-1}(v) = \partial'_n(w)$  pela definição de  $\delta_n$ . Usando

a comutatividade do diagrama 3, chegamos em  $\partial'_n(f_n(a)) = \partial'_n(w)$ . Desta forma, temos  $\partial'_n(w - f_n(a)) = 0$  e concluímos que  $(w - f_n(a)) \in \ker(\partial'_n)$ .

Ao aplicarmos  $g_n$  em  $(w - f_n(a))$ , e considerando que as linhas do diagrama 3 são seqüências exatas curtas, temos

$$g_n(w - f_n(a)) = g_n(w) - g_n(f_n(a)) = g_n(w) = x$$

Logo,  $\ker(\delta_n) \subseteq \text{Im}(g_n)$ .

Com esses resultados, chegamos a conclusão de que  $\text{Im}(g_n) = \ker(\delta_n)$ .

**IV)**  $\ker(\bar{f}_{n-1}) = \text{Im}(\delta_n)$ :

Tome  $[y] \in \text{Im}(\delta_n)$ . Então, temos  $\bar{f}_{n-1}([y]) = f_{n-1}(y) + \text{Im}(\partial'_n)$ . Porém, pela definição de  $\delta_n$  dada na demonstração do lema 2.3.4,  $f_{n-1}(y)$  deve ser um elemento de  $\text{Im}(\partial'_n)$ . Logo,  $\bar{f}_{n-1}([y]) = \text{Im}(\partial'_n) = [0]$ . Sendo assim,  $[y] \in \ker(\bar{f}_{n-1})$  e  $\text{Im}(\delta_n) \subseteq \ker(\bar{f}_{n-1})$ .

Agora, seja  $[y] \in \ker(\bar{f}_{n-1})$ . Então,  $f_{n-1}(y) \in \text{Im}(\partial'_n)$ . Desta forma, existe  $w \in B_n$ , tal que  $\partial'_n(w) = f_{n-1}(y)$ . Além disso, seja  $x \in C_n$  tal que  $g_n(w) = x$ . Se aplicarmos  $\partial''_n$  em  $x$ , teremos  $\partial''_n(g_n(w)) = g_{n-1}(\partial'_n(w))$ , pois os quadrados do diagrama 3 comutam. Logo,  $g_{n-1}(\partial'_n(w)) = g_{n-1}(f_{n-1}(y)) = 0$ , pois  $\text{Im}(f_{n-1}) = \ker(g_{n-1})$ , devido ao fato de que as linhas do diagrama 3 são seqüências exatas curtas. Com isso, deve existir  $a \in A_{n-1}$  tal que  $f_{n-1}(a) = f_{n-1}(y)$ . Porém, como  $f_{n-1}$  é monomorfismo, temos que  $y = a$ . Mas isto que foi descrito é exatamente a definição de  $\delta_n$  aplicada em algum  $x \in \ker(\partial''_n)$ . Portanto  $[y] \in \text{Im}(\delta_n)$  e  $\ker(\bar{f}_{n-1}) \subseteq \text{Im}(\delta_n)$ .

Sendo  $\text{Im}(\delta_n) \subseteq \ker(\bar{f}_{n-1})$  e  $\ker(\bar{f}_{n-1}) \subseteq \text{Im}(\delta_n)$ , então  $\ker(\bar{f}_{n-1}) = \text{Im}(\delta_n)$ .

Com o que foi feito, concluímos que a seqüência apresentada no diagrama (4) é exata.  $\square$

**Teorema 2.3.6.** (*Seqüência exata longa na homologia*) Uma seqüência exata de complexos de cadeia induz a seqüência

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\delta_{*n+1}} & H_n(A) & \xrightarrow{f_{*n}} & H_n(B) & \xrightarrow{g_{*n}} & H_n(C) \\ & & & & \searrow^{\delta_{*n}} & & \\ H_{n-1}(A) & \xleftarrow{f_{*n-1}} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{g_{*n-1}} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{\delta_{*n-1}} & \cdots \end{array}$$

na homologia, sendo esta seqüência exata. Ela é chamada de seqüência exata longa.

*Demonstração.* Considere a seguinte seqüência exata curta de cadeias:

$$0 \longrightarrow (A, \partial) \xrightarrow{f} (B, \partial') \xrightarrow{g} (C, \partial'') \longrightarrow 0$$

Pelo Lema 2.3.4, temos que existe uma transformação linear  $\delta_n$  de  $\ker(\partial''_n)$  para  $\text{coker}(\partial_n)$ . Além disso, aplicando o lema 2.3.5, podemos escrever o seguinte diagrama com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{coker}(\partial_{n+1}) & \xrightarrow{\bar{f}_n} & \text{coker}(\partial'_{n+1}) & \xrightarrow{\bar{g}_n} & \text{coker}(\partial''_{n+1}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial''_n & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\partial_{n-1}) & \xrightarrow{f_{n-1}} & \ker(\partial'_{n-1}) & \xrightarrow{g_{n-1}} & \ker(\partial''_{n-1}) \end{array}$$

Vamos mostrar que o operador  $\partial_n$  está bem definido. De fato, se tomarmos um representante  $v'$  de  $[v] = v + \text{Im}(\partial_{n+1}) \in \text{coker}(\partial_{n+1})$ , temos que  $(v' - v) \in \text{Im}(\partial_{n+1})$ . Logo, existe  $\bar{v} \in A_{n+1}$

tal que  $\partial_{n+1}(\bar{v}) = (v' - v)$ , o que implica que  $\partial_n(v' - v) = \partial_n(\partial_{n+1}(\bar{v})) = 0$ . Sendo assim, como  $\partial_n$  é uma transformação linear, temos  $\partial_n(v' - v) = \partial_n(v') - \partial_n(v) = 0$ , e concluímos que  $\partial_n(v') = \partial_n(v)$ . Se tomarmos  $v''$  como outro representante de  $[v]$  e seguirmos o mesmo raciocínio anterior, chegaremos que  $\partial_n(v'') = \partial_n(v)$ . Ou seja, o operador  $\partial_n$  está bem definido pois não depende do representante que se tome de uma classe, sendo que o mesmo vale para  $\partial'_n$  e  $\partial''_n$ .

Para mostrar que cada quadrado do diagrama comuta, tome  $[v] \in \text{coker}(\partial_{n+1})$ , onde  $[v] = v + \text{Im}(\partial_{n+1})$ . Então

$$\bar{f}_n([v]) = [w] \in \text{coker}(\partial'_{n+1}).$$

Se aplicarmos  $\partial'_n$  em  $[w] = w + \text{Im}(\partial_{n+1})$ , temos  $\partial'_n([w]) = \partial'_n(w)$ . Mas pela definição de  $\bar{f}_n$ , sabemos que  $\bar{f}_n([v]) = f_n(v) + \text{Im}(\partial'_{n+1})$ , e, portanto  $\partial'_n(\bar{f}_n([v])) = \partial'_n(f_n(v))$ . Porém, da sequência exata curta de cadeias inicial, sabemos que  $\partial'_n(f_n) = f_{n-1}(\partial_n)$ , o que implica que

$$\partial'_n(\bar{f}_n([v])) = \partial'_n(f_n(v)) = f_{n-1}(\partial_n(v)) = f_{n-1}(\partial_n(v + \text{Im}(\partial_{n+1}))) = f_{n-1}(\partial_n([v])).$$

Sendo assim, concluímos que cada quadrado do diagrama comuta ao aplicarmos a mesma ideia para  $\bar{g}_n, g_{n-1}, \partial'_n$  e  $\partial''_n$ .

Sendo o diagrama comutativo e as colunas complexos de cadeia, com as linhas sequências exatas, podemos aplicar o lema 2.3.5 novamente e chegarmos na seguinte sequência exata:

$$\begin{array}{ccccc} \ker(\text{coker}(\partial_n)) & \xrightarrow{f_{*n}} & \ker(\text{coker}(\partial'_n)) & \xrightarrow{g_{*n}} & \ker(\text{coker}(\partial''_n)) \\ & & \delta_{*n} & & \\ \text{coker}(\ker(\partial_n)) & \xrightarrow{\bar{f}_{*n-1}} & \text{coker}(\ker(\partial'_n)) & \xrightarrow{\bar{g}_{*n-1}} & \text{coker}(\ker(\partial''_n)) \end{array}$$

Nesta sequência, temos que se  $[v] \in \text{coker}(\ker(\partial_n))$ , então  $[v] = v + \text{Im}(\partial_n)$ , onde  $v \in \ker(\partial_{n-1})$ . Porém, essa é a definição do  $(n-1)$ -ésimo espaço vetorial da homologia de  $A$ . Logo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \text{coker}(\ker(\partial_n)) &= H_{n-1}(A), \\ \text{coker}(\ker(\partial'_n)) &= H_{n-1}(B) \end{aligned}$$

e

$$\text{coker}(\ker(\partial''_n)) = H_{n-1}(C).$$

Temos também que  $\ker(\text{coker}(\partial_n)) \subset \text{coker}(\partial_{n+1})$ . Então, um elemento de  $\ker(\text{coker}(\partial_n))$  é da forma  $v + \text{Im}(\partial_{n+1})$ , onde  $v \in A_n$  e  $\partial_n(v) = 0$ . Contudo, novamente estamos descrevendo o  $n$ -ésimo espaço vetorial da homologia de  $A$ . Sendo assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \ker(\text{coker}(\partial_n)) &= H_n(A), \\ \ker(\text{coker}(\partial'_n)) &= H_n(B) \end{aligned}$$

e

$$\ker(\text{coker}(\partial''_n)) = H_n(C).$$

Pela Proposição 2.3.2, temos que as funções  $f_{*n}$  e  $g_{*n}$  induzidas por  $f_n$  e  $g_n$  são transformações lineares bem definidas.

Sendo assim, temos que a sequência

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta_{*n+1}} & H_n(A) & \xrightarrow{f_{*n}} & H_n(B) & \xrightarrow{g_{*n}} & H_n(C) \\ & & & & \delta_{*n} & \nearrow & \\ H_{n-1}(A) & \xleftarrow{f_{*n-1}} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{g_{*n-1}} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{\delta_{*n-1}} & \dots \end{array}$$

é exata.  $\square$

### 3 Homologia singular

Nesta seção pretende-se discorrer sobre o conceito de homologia singular, assim como apresentar os principais teoremas relativos a este assunto e exemplos de como calcular os espaços vetoriais de homologia. As principais referências utilizadas foram [4] e [5]. Quando não informado, deixaremos subentendido que os coeficientes das combinações lineares são elementos de um corpo  $\mathbb{K}$ .

#### 3.1 Espaço vetorial da homologia singular

Sejam  $I$  o intervalo fechado  $[0, 1]$  e  $I^n$  o produto cartesiano de  $n$  fatores de  $I$ . Por definição,  $I^0$  representa um ponto. Para  $n$  um inteiro não-negativo, temos que uma função contínua

$$T : I^n \longrightarrow X$$

é chamada de  $n$ -cubo singular.

**Definição 3.1.1.** Chamaremos de  $Q_n(X)$  o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial gerado por todos os  $n$ -cubos singulares com base em  $X$ , sendo que qualquer elemento deste espaço pode ser escrito como uma combinação linear finita com coeficientes em  $\mathbb{K}$  de  $n$ -cubos de  $X$ . Ou seja, se  $u \in Q_n(X)$  e  $T_i$  são  $n$ -cubos, então

$$u = \sum_i \alpha_i T_i \quad , \alpha_i \in \mathbb{K} .$$

Um  $n$ -cubo é dito degenerado quando existe  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  tal que  $T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  não depende de  $x_i$ . Considere o subespaço  $D_n(X) \subset Q_n(X)$  formado pelos  $n$ -cubos degenerados. Com este espaço, podemos definir o quociente  $C_n(X) = Q_n(X)/D_n(X)$ . Os elementos que formam este espaço vetorial são chamados de  $n$ -cadeias cúbicas singulares de  $X$ , sendo este o espaço mais importante para a definição de homologia. A classe nula deste conjunto é constituída por uma soma dos  $n$ -cubos degenerados de  $X$ .

**Definição 3.1.2.** A  $i$ -face de um  $n$ -cubo é dada pela função  $\beta_i^a T : I^{n-1} \longrightarrow X$ , com  $a \in \{0, 1\}$ , onde  $\beta_i^a T(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_i, \dots, x_{n-1})$ , com  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Se  $a = 0$  temos a  $i$ -face dianteira e se  $a = 1$  temos a  $i$ -face traseira.

Para uma ideia intuitiva desta definição, no caso de  $n = 2$  e  $X$  um quadrado unitário com coordenadas não-negativas e com um dos vértices na origem, as  $i$ -faces são as arestas do quadrado. Considere agora  $n = 3$  e  $X$  como um cubo unitário do  $\mathbb{R}^3$  com um dos seus vértices na origem e com todas as coordenadas não-negativas. Então temos que as  $i$ -faces são as intersecções do cubo unitário com os planos  $xy$ ,  $yz$ ,  $xz$ ,  $z = 1$ ,  $x = 1$  e  $y = 1$ .

No caso de  $n > 1$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$  e  $a, b \in \{0, 1\}$ , através de um cômputo direto concluímos que as  $i$ -faces de um  $n$ -cubo possuem a seguinte propriedade:

$$\beta_i^a \beta_j^b (T) = \beta_{j-1}^b \beta_i^a (T) . \tag{5}$$

**Definição 3.1.3.** A transformação linear  $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ , com  $n \geq 1$ , onde

$$\partial_n(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (\beta_i^0 T - \beta_i^1 T),$$

é conhecida como operador bordo ou operador fronteira.

Uma propriedade importante do operador bordo é dada pela seguinte proposição:

**Proposição 3.1.1.** Para  $n > 1$ ,  $\partial_{n-1}(\partial_n(T)) = 0$ .

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\partial_n(T) &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [\beta_j^0\beta_i^0 - \beta_j^0\beta_i^1 - \beta_j^1\beta_i^0 + \beta_j^1\beta_i^1](T) + \\ &\quad \sum_{i\leq j} (-1)^{i+j} [\beta_j^0\beta_i^0 - \beta_j^0\beta_i^1 - \beta_j^1\beta_i^0 + \beta_j^1\beta_i^1](T) \end{aligned}$$

No segundo somatório, vamos usar a identidade (5) como  $\beta_i^a\beta_{j+1}^b = \beta_j^b\beta_i^a$ . Com isso, chegamos em:

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\partial_n(T) &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [\beta_j^0\beta_i^0 - \beta_j^0\beta_i^1 - \beta_j^1\beta_i^0 + \beta_j^1\beta_i^1](T) + \\ &\quad \sum_{i\leq j} (-1)^{i+j} [\beta_i^0\beta_{j+1}^0 - \beta_i^0\beta_{j+1}^1 - \beta_i^1\beta_{j+1}^0 + \beta_i^1\beta_{j+1}^1](T) \end{aligned}$$

Agora, chamando  $j+1$  de  $j'$ , temos:

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\partial_n(T) &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [\beta_j^0\beta_i^0 - \beta_j^0\beta_i^1 - \beta_j^1\beta_i^0 + \beta_j^1\beta_i^1](T) + \\ &\quad \sum_{i<j'} (-1)^{i+j'-1} [\beta_i^0\beta_{j'}^0 - \beta_i^0\beta_{j'}^1 - \beta_i^1\beta_{j'}^0 + \beta_i^1\beta_{j'}^1](T) \end{aligned}$$

Por último, chamando  $i$  de  $j$  e  $j'$  de  $i$ , chegamos no resultado esperado, como pode ser visto a seguir:

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\partial_n(T) &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [\beta_j^0\beta_i^0 - \beta_j^0\beta_i^1 - \beta_j^1\beta_i^0 + \beta_j^1\beta_i^1](T) - \\ &\quad \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [\beta_j^0\beta_i^0 - \beta_j^0\beta_i^1 - \beta_j^1\beta_i^0 + \beta_j^1\beta_i^1](T) \end{aligned}$$

$$\partial_{n-1}\partial_n(T) = 0 \quad \square$$

A partir desta propriedade e pelo que foi descrito na Definição 2.2.1 da Seção 2.2, obtemos uma sequência de cadeias  $n$ -dimensionais para o espaço vetorial  $C_n(X)$ , ou seja, temos o complexo de cadeias  $(C(X), \partial)$  dado pelo seguinte diagrama:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

**Definição 3.1.4.** O espaço vetorial gerado por todos os ciclos singulares  $n$ -dimensionais de  $X$  é definido como  $Z_n(X) \equiv \ker(\partial_n)$ , para  $n \geq 0$ . Temos também que o espaço vetorial gerado pelas bordas  $n$ -dimensionais de  $X$  é dado por  $B_n(X) \equiv \text{Im}(\partial_{n+1})$ , com  $n \geq 0$ .

Um resultado derivado da Definição 3.1.4 e da Proposição 3.1.1 é que  $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$ , como mostrado no Lema 2.3.1 da Seção 2.3. Desta forma, a Definição 2.3.1 nos fornece o conceito do espaço vetorial da homologia singular e, com isso, temos que este espaço é dado pelo quociente dos ciclos  $n$ -dimensionais de  $X$  pelos bordos  $n$ -dimensionais de  $X$ . Ou seja,  $H_n(X)$  é um espaço cujas classes nulas são bordos  $n$ -dimensionais e as classes não-nulas são  $n$ -ciclos.

Outra definição importante no estudo da homologia é a de homologia reduzida. Para isto, considere a transformação linear  $\epsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{K}$  chamada de augmentação, onde  $\epsilon(T) = 1$  para qualquer cubo singular  $T$ . Desta forma, para  $u = \sum_i n_i T_i$ , com  $n_i \in \mathbb{K}$ ,  $\epsilon(u) = \sum_i n_i$ . Com esta transformação, temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.1.2.** Para  $\epsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{K}$ , onde  $\epsilon(T) = 1$ , temos  $\epsilon(\partial_1) = 0$ .

*Demonstração.* Para  $n = 1$ ,  $\partial_1(T) = 1.T(1) - 1.T(0)$ . Então,  $\epsilon(\partial_1(T)) = 1 - 1 = 0$ .  $\square$

Fazendo  $\tilde{Z}_0 = \ker(\epsilon)$  e pela Proposição 3.1.2,  $B_0 \subseteq \tilde{Z}_0$ . Com isto, temos a seguinte definição:

**Definição 3.1.5.** O espaço vetorial da homologia reduzida de  $X$  é definido por  $\tilde{H}_0(X) \equiv \tilde{Z}_0(X)/B_0(X)$ .

Por esta definição, como  $\tilde{Z}_0(X)$  é subespaço de  $Z_0(X)$ , então  $\tilde{H}_0(X)$  é subespaço de  $H_0(X)$ . Se definirmos o mapa  $\iota_* : \tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X)$ , induzido pela inclusão  $\iota : \tilde{Z}_0(X) \rightarrow Z_0(X)$ , podemos enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 3.1.3.** A sequência

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\iota_*} H_0(X) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

é exata.

*Demonstração.* Tome  $[x] \in \text{Im}(\iota_*)$ , onde  $[x] = x + \text{Im}(\partial_1)$  e  $x \in \ker(\epsilon)$ . Sendo  $\epsilon(\iota(x)) = 0$  (pois  $\iota$  é uma inclusão) e  $\iota_*$  um mapa induzido por  $k$ , temos que  $\epsilon_*(\iota_*([x])) = 0$  e  $[x] \in \ker(\epsilon_*)$ . Logo,  $\text{Im}(\iota_*) \subseteq \ker(\epsilon_*)$ .

Se  $[x] \in \ker(\epsilon_*)$ , temos que  $x \in \ker(\epsilon)$ . Sendo assim  $[x] \in \tilde{H}_0(X)$ , e  $[x] \in \text{Im}(\iota_*)$ , implicando que  $\ker(\epsilon_*) \subseteq \text{Im}(\iota_*)$ .

Com isso concluímos que  $\text{Im}(\iota_*) = \ker(\epsilon_*)$  e a sequência do enunciado é exata.  $\square$

Como consequência desta proposição, temos que  $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{K}$ .

**Exemplo 3.1.1.** Vamos supor que o espaço topológico  $X$  seja constituído de um único ponto  $\{p\}$ . Neste caso, existe apenas um  $n$ -cubo neste espaço, sendo que para  $n > 0$  ele é degenerado. Desta forma, com  $n > 0$ , temos que  $Q_n(X) = \langle p \rangle$  e  $D_n(X) = \langle p \rangle$ , o que nos leva a concluir que

$$C_n(X) = 0, \forall n > 0.$$

Se  $n = 0$ , então  $Q_0(X) = \langle p \rangle$  e  $D_0(X) = \{0\}$  e, portanto,

$$C_0(X) = \langle p \rangle,$$

que é isomorfo a  $\mathbb{K}$ . Com estes resultados obtemos que  $\ker(\partial_n) = \{0\}$  e  $\text{Im}(\partial_{n+1}) = \{0\}$  para  $n > 0$ , o que implica que  $H_n = \{0\}$  para  $n > 0$ . Já para o caso de  $n = 0$ ,  $\ker(\partial_0) = \langle p \rangle$  e  $\text{Im}(\partial_1) = \{0\}$ . Logo,

$$H_0(X) = \langle p \rangle / \{0\} = \langle p \rangle \approx \mathbb{K}.$$

Este resultado pode ser generalizado para um conjunto composto por uma quantidade finita (ou infinita) de componentes conexas, como mostrado na seguinte proposição:

**Proposição 3.1.4.** *Seja um espaço topológico  $X$  formado pela união de  $X_\lambda$  com  $\lambda \in \Lambda$ , onde cada  $X_\lambda$  representa uma componente arcoconexa de  $X$ . Então, temos que  $H_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda)$ .*

Além disso,  $H_0(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{K}$ .

*Demonstração.* Suponha um espaço topológico  $X$  dado como nas hipóteses do enunciado do teorema. Temos que cada  $n$ -cubo está contido inteiramente em apenas uma componente conexa por caminhos do espaço  $X$ . Desta forma, da mesma maneira feita na demonstração do Teorema 3.1.4, as cadeias são dadas por  $C_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_n(X_\lambda)$  e, como a borda de um elemento de  $C_n(X_\lambda)$  deve estar em  $C_{n-1}(X_\lambda)$ , temos que  $Z_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Z_n(X_\lambda)$  e  $B_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_n(X_\lambda)$ . Portanto, a homologia de  $X$  é dada por  $H_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda)$ .

Agora, vamos considerar o caso para  $n = 0$ . Neste caso, temos que  $Z_0(X) = C_0(X)$ . Tome a transformação de augmentação  $\epsilon_\lambda : C_0(X_\lambda) \rightarrow \mathbb{K}$ . Como mostrado na Proposição 3.1.2, temos que  $\text{Im}(\partial_1) \subset \ker(\epsilon_\lambda)$ . Tome  $T \in C_0(X_\lambda)$  tal que  $\sum_i \alpha_i t_i = T$ , onde  $t_i$  são 0-cubos de  $X_\lambda$  e  $T \in \ker(\epsilon_\lambda)$ . Fixe um ponto  $t_0 \in C_0(X_\lambda)$  e considere os caminhos  $\sigma_i : I \rightarrow X_\lambda$  que, para cada  $i$ , liga o ponto  $t_0$  a  $t_i$ , com cada  $\sigma_i$  sendo um 1-cubo. Como  $T \in \ker(\epsilon_\lambda)$ , temos que  $\sum_i \alpha_i = 0$ , então

$$\partial_1(\sum_i \alpha_i \sigma_i) = \sum_i \alpha_i t_i - \sum_i \alpha_i t_0 = \sum_i \alpha_i t_i - t_0 \sum_i \alpha_i = \sum_i \alpha_i t_i.$$

Portanto,  $(\sum_i \alpha_i t_i) \in \text{Im}(\partial_1)$ .

Como  $\ker(\epsilon_\lambda) \subset \text{Im}(\partial_1)$  e  $\text{Im}(\partial_1) \subset \ker(\epsilon_\lambda)$ , então  $\ker(\epsilon_\lambda) = \text{Im}(\partial_1)$ . Sendo  $\epsilon_\lambda$  sobrejetiva, pelo Teorema do Isomorfismo, temos que

$$H_0(X_\lambda) = C_0(X_\lambda) / B_0(X_\lambda) = C_0(X_\lambda) / \ker(\epsilon_\lambda) \approx \mathbb{K}.$$

Sendo assim, para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $H_0(X_\lambda) \approx \mathbb{K}$  e, com isso,  $H_0(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{K}$ .  $\square$

A Proposição 3.1.4 nos fornece uma ideia do significado do conjunto  $H_0(X)$ . De acordo com esta proposição, podemos dizer que o conjunto  $H_0(X)$  nos fornece a quantidade de componentes conexas de  $X$ . Sendo assim, como um corolário da Proposição 3.1.4, temos que se  $X$  é um espaço topológico dado pelos pontos  $\{p_i : i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$  sem ligações entre si, contendo, portanto,  $m$  componentes conexas, então

$$H_0(X) = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{K}.$$

Considere agora uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos. Assim, podemos obter a transformação linear  $f' : Q_n(X) \rightarrow Q_n(Y)$ , onde  $f'(T) = f(T)$ . Neste caso, se  $T \in Q_n(X)$  é um  $n$ -cubo degenerado de  $X$ , então  $f'(T) \in Q_n(Y)$  é um  $n$ -cubo



degenerado de  $Y$ . Sendo assim, se  $[T] = T + D_n(X)$ , com  $T \in Q_n(X)$ , então podemos definir a transformação linear  $f_{\#} : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$ , onde  $f_{\#}([T]) = f'(T) + D_n(Y)$ , para todo  $n$  não-negativo. Para mostrar que esta aplicação está bem definida, seja  $x$  um representante da classe  $[T]$ . Então  $(x - T) \in D_n(X)$ , e como  $f'$  leva um  $n$ -cubo degenerado de  $X$  em um  $n$ -cubo degenerado de  $Y$ , temos que  $f'(x - T)$  é um  $n$ -cubo degenerado de  $Y$ . Usando que  $f'$  é uma transformação linear, concluímos que  $f'(x)$  é um representante da classe  $[f'(T)]$  e, portanto,  $f_{\#}$  está bem definida.

Agora, vamos aplicar  $f_{\#}$  nas classes das  $i$ -faces dianteira e traseira de um  $n$ -cubo, ou seja,

$$f_{\#}([\beta_i^a T]) = f'(\beta_i^a T) + D_n(Y).$$

Pela Definição 3.1.2, temos que

$$f'(\beta_i^a T) = f'(T(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_i, \dots, x_{n-1})) = T'(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_i, \dots, x_{n-1}) \in Q(Y)$$

Contudo,

$$\beta_i^a f'(T(x_1, \dots, x_{n-1})) = \beta_i^a T'(x_1, \dots, x_{n-1}) = T'(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_i, \dots, x_{n-1}) \in Q(Y)$$

e, desta forma, temos que  $f'(\beta_i^a T) = \beta_i^a f'(T)$ , implicando em

$$f_{\#}([\beta_i^a T]) = \beta_i^a f_{\#}([T]).$$

Ou seja, o mapa induzido nas cadeias comuta com os operadores de  $i$ -faces traseira e dianteira.

Pela definição do operador bordo dada em 3.1.3, concluímos que

$$f_{\#} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_{\#}$$

para todo  $n$  não-negativo.

Logo,  $f_{\#}$  é um mapa entre cadeias que comuta com o operador bordo, assim como o que foi apresentado na Seção 2.2, sendo portanto um mapa entre complexos. Desta forma, temos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

Devido a comutatividade do diagrama, pela Proposição 2.3.2 da Seção 2.3, a função  $f$  induz a transformação linear  $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ .

A partir deste fato podemos definir, por exemplo, o mapa de inclusão  $i : A \longrightarrow X$ , que induz a transformação linear  $i_* : H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$ .

## 3.2 Homologia e homotopia

Nesta seção, iremos apresentar algumas relações entre os conceitos de homotopia e homologia.

**Definição 3.2.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e considere funções contínuas  $f : X \longrightarrow Y$  e  $g : X \longrightarrow Y$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são homotópicas se existe  $F : I \times X \longrightarrow Y$  contínua tal que  $F(0, x) = f(x)$  e  $F(1, x) = g(x)$ ,  $\forall x \in X$ .*

**Teorema 3.2.1.** *Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas de  $X$  em  $Y$  e são homotópicas, então os homomorfismos induzidos  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  e  $g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  são iguais.*

*Demonstração.* Feita na referência [4] na página 166.  $\square$

**Definição 3.2.2.** *Considere funções contínuas  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são uma equivalência homotópica se  $g \circ f$  é homotópico à função identidade de  $X$  em  $X$  e  $f \circ g$  é homotópico à função identidade de  $Y$  em  $Y$ .*

**Definição 3.2.3.** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subseteq X$ . Uma função contínua  $r : X \rightarrow A$  é chamada de retração se  $r(a) = a$  para todo  $a \in A$ .*

**Definição 3.2.4.** *Um espaço  $X$  é dito contrátil se existe uma função contínua  $F : I \times X \rightarrow X$  tal que  $F(0, x) = x$  e  $F(1, x) = x_0 \forall x \in X$ , onde  $x_0$  é um ponto fixo de  $X$ .*

**Definição 3.2.5.** *Seja  $A \subseteq X$ . Dizemos que  $A$  é uma retrato por deformação de  $X$  se existir uma retração  $r : X \rightarrow A$  e uma função contínua  $F : I \times X \rightarrow X$  tal que  $F(0, x) = x$  e  $F(1, x) = r(x)$  para todo  $x \in X$ .*

**Teorema 3.2.2.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência homotópica, então  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  é um isomorfismo para todo  $n$  inteiro positivo.*

*Demonstração.* Por hipótese, temos que  $f$  é uma equivalência homotópica. Então, deve existir  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g$  é homotópico a  $Id_X$  (função identidade em  $X$ ) e  $g \circ f$  é homotópico a  $Id_Y$  (função identidade em  $Y$ ). Pelo Teorema 3.2.1 e a Proposição 2.3.3, temos que  $Id_{X_*} = (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  e  $Id_{Y_*} = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ . Desta forma,  $f_*$  e  $g_*$  são uma a inversa da outra e, portanto, são isomorfismos. Logo,  $f_*$  é isomorfismo para todo  $n$ .  $\square$

Suponha que  $A$  é uma retrato por deformação de  $X$ , o que implica que deve existir uma retração  $r : X \rightarrow A$  e uma homotopia  $F : I \times X \rightarrow X$ , onde  $F(0, x) = x$  e  $F(1, x) = r(x)$ . Além disso, se tomarmos a inclusão  $i : A \rightarrow X$ , temos que  $i \circ r$  é homotópico a identidade em  $A$  e  $r \circ i$  é homotópico a identidade em  $X$ . Logo,  $i$  é uma equivalência homotópica e, pelo Teorema 3.2.2, o mapa induzido da inclusão  $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$  é um isomorfismo.

### 3.3 Homologia relativa

Com o que foi apresentado até este ponto, é possível calcular diretamente a homologia de apenas alguns poucos espaços topológicos. Vamos apresentar agora o conceito e as propriedades da homologia relativa de um par de espaços  $(X, A)$ , onde  $A \subseteq X$ , o que nos auxiliará a computar a homologia de espaços mais complexos.

Considere o espaço das cadeias  $n$ -dimensionais do par  $(X, A)$  definido como

$$C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A).$$

A transformação linear

$$\bar{\partial}_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$$

é o operador borda das cadeias relativas, sendo que a sua aplicação em qualquer elemento  $[u] = u + C_n(A)$ , com  $u \in C_n(X)$ , é definida como

$$\bar{\partial}_n(u + C_n(A)) = \partial_n(u) + C_{n-1}(A).$$

Para ver que este operador é bem definido, tome  $x$  como um representante da classe de  $[u]$ . Então,  $(x - u) \in C_n(A)$ . Se aplicarmos o operador bordo  $\partial_n$ , temos que

$$\partial_n(x - u) = u' \in C_{n-1}(A).$$

Mas como  $\partial_n$  é um transformação linear,  $\partial_n(x - u) = \partial_n(x) - \partial_n(u) = u'$  e, portanto,  $\partial_n(x)$  é um representante da classe de

$$[\partial_n(u)] = \partial_n(u) + C_{n-1}(A).$$

Sendo assim, o operador  $\bar{\partial}_n$  está bem definido.

Além disso, através de um cômputo direto, temos que  $\bar{\partial}_{n-1} \circ \bar{\partial}_n = 0$ , implicando que  $(C(X, A), \bar{\partial})$  é um complexo de cadeia e, sendo assim, a Definição 2.3.1 nos fornece o espaço vetorial da homologia singular do par  $(X, A)$ .

Usando este resultado, note que se  $A = \emptyset$ , então  $C_n(A) = \{0\}$  pois não há  $n$ -cubos em  $A$ . Logo,

$$C_n(X, A) = C_n(X)/\{0\} = C_n(X),$$

e portanto  $H_n(X, A) = H_n(X)$ . Sendo assim, a homologia singular absoluta é apenas um caso particular da homologia relativa do par  $(X, A)$  quando  $A$  é o conjunto vazio.

Agora, usando o mapa de inclusão, a função sobrejetiva  $j_\# : C_n(X) \rightarrow C_n(X, A)$  e o operador bordo entre os espaços  $C_n(X, A)$  e  $C_{n-1}(X, A)$ , temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \bar{\partial}_{n+1} \\ C_n(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_n(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_n(X, A) \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \bar{\partial}_n \\ C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_{n-1}(X, A) \\ \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \bar{\partial}_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

O diagrama acima possui cada quadrado comutativo, onde na horizontal temos mapas entre complexos e na vertical temos complexos de cadeias. Além disso, na horizontal, temos uma sequência exata curta.

Usando o que foi apresentado, definimos a transformação linear  $\delta_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$  que leva um elemento  $u \in H_n(X, A)$  na classe de homologia do ciclo  $\partial_n(u'') \in H_{n-1}(A)$ . Este operador é o mesmo do morfismo de conexão mostrado no Lema 2.3.4 e, portanto, ele está bem definido e é uma transformação linear. Com este operador e com os operadores lineares induzidos  $i_*$  e  $j_*$ , podemos apresentar a sequência longa da homologia do par  $(X, A)$ , dada pelo diagrama a seguir:

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\delta_{*n}} \cdots \quad (6)$$

**Teorema 3.3.1.** *A sequência*

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots$$

é exata.

*Demonstração.* Feito no Teorema 2.3.6 da Seção 2.3.  $\square$

**Proposição 3.3.2.** *Sejam  $A \subseteq X$ , com  $A \neq \emptyset$ , e o par  $(X, A)$ . Temos que o operador  $\delta$  leva  $H_1(X, A)$  em  $\tilde{H}_0(A)$ , e a sequência*

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_0(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \longrightarrow 0$$

é exata.

*Demonstração.* Usando a definição do morfismo de conexão induzido, se  $[c] \in H_1(X, A)$ , onde  $[c] = c + B_1(X, A)$ , e  $c \in \ker(\bar{\partial}_1)$ , então existe  $b \in C_1(X)$  tal que  $c = j_1(b)$ . Sendo assim, temos que  $\delta_1([c]) = a + B_0(A)$ , onde  $i_0(a) = \partial_1(b)$ . Como  $\partial_1(b) \in B_1(X)$  e  $i_0$  é uma inclusão, temos que  $a \in \ker(\epsilon)$ , pois  $B_1(X) \subseteq \ker(\epsilon)$ . Com isso, concluímos que  $Im(\delta_1) \subseteq \tilde{H}_0(A)$ .

Para mostrar que a sequência é exata, basta aplicar a mesma técnica usada na demonstração do Lema 2.3.5 ou a mesma demonstração do Teorema 2.3.6 fazendo as devidas restrições dos mapas envolvidos.  $\square$

Os dois últimos resultados apresentados são ferramentas importantes para se calcular a homologia de diversos espaços  $X$ .

### 3.4 Propriedades da homologia singular

O próximo passo será apresentar a propriedade de excisão da homologia relativa do par  $(X, A)$ . Esta propriedade é própria da homologia relativa, não possuindo uma equivalente para a homologia absoluta. Contudo, antes de apresentar o teorema sobre a excisão, é necessário fornecer algumas definições pertinentes para a sua demonstração.

**Definição 3.4.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq Y$  os respectivos subespaços. Dizemos que uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  é uma mapa do par  $(X, A)$  no par  $(Y, B)$  se  $f(A) \subset B$ .*

**Definição 3.4.2.** *Seja  $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  uma família de subconjuntos do espaço topológico  $X$ , onde a união dos interiores de  $U_\lambda$  cobre  $X$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ . Dizemos que um  $n$ -cubo  $T$  é pequeno de ordem  $\mathcal{U}$  se existe  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $U_\lambda$  cobre  $T$ .*

A partir desta definição, é possível controlar o tamanho dos  $n$ -cubos, fazendo com que eles sejam tão pequenos quanto se queira. A notação  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  denota os  $n$ -cubos não-degenerados de  $X$  que são da ordem de  $\mathcal{U}$ . Usando esta notação, podemos definir o conjunto de homologia relativa dos  $n$ -cubos não-degenerados do par  $(X, A)$  de ordem  $\mathcal{U}$  como  $H_n^{\mathcal{U}}(X, A) = Z_n^{\mathcal{U}}(X, A) / B_n^{\mathcal{U}}(X, A)$ , onde  $Z_n^{\mathcal{U}}(X, A)$  e  $B_n^{\mathcal{U}}(X, A)$  são definidos da mesma maneira já feita anteriormente. É impor-

tante notar que  $C_n^{\mathcal{U}}(X, A) \subseteq C_n(X, A)$ . Se definirmos a inclusão  $\sigma_n : C_n^{\mathcal{U}}(X, A) \longrightarrow C_n(X, A)$ , temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\mathcal{U}}(X, A) & \xrightarrow{\sigma_n} & C_n(X, A) \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X, A) & \xrightarrow{\sigma_n} & C_{n-1}(X, A) \end{array}$$

Devido à comutatividade do diagrama e a Proposição 2.3.2 da Seção 2.3, temos que  $\sigma_n$  induz a transformação linear  $\sigma_{*n} : H_n^{\mathcal{U}}(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)$ .

**Teorema 3.4.1.** *As transformações lineares  $\sigma_{*n} : H_n^{\mathcal{U}}(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)$  são isomorfismos para todo  $n$  natural.*

*Demonstração.* Feita na referência [4], página 179. Também pode ser encontrado na referência [5], página 119.  $\square$

Agora, iremos expor o teorema sobre a propriedade de excisão da homologia relativa do par  $(X, A)$ . Usando esta propriedade, é possível calcular os conjuntos de homologia singular para espaços mais complicados como, por exemplo, a esfera  $k$ -dimensional  $S^k$ .

**Teorema 3.4.2.** *Considere o par  $(X, A)$  e um subconjunto  $W$  de  $A$ , tal que  $\bar{W} \subset \text{int}(A)$ . Então, o mapa de inclusão de  $(X - W, A - W)$  em  $(X, A)$  induz um isomorfismo entre  $H_n(X - W, A - W)$  e  $H_n(X, A)$  para todo  $n$  natural.*

*Demonstração.* Tome o par  $(X, A)$  e  $W \subset A$  tal que o fecho de  $W$  está contido no interior de  $A$ . Considere a família  $\mathcal{U} = \{A, X - W\}$  que cobre  $X$ . Sendo assim, temos que o conjunto dos  $n$ -cubos não-degenerados de ordem  $\mathcal{U}$  de  $X$  pode ser escrito como a soma dos  $n$ -cubos não-degenerados de  $A$  com os  $n$ -cubos não-degenerados de  $X - W$ , ou seja,  $C_n^{\mathcal{U}}(X) = C_n(A) + C_n(X - W)$ .

Além disso, temos que o conjunto  $C_n(X - W, A - W)$  pode ser reescrito como

$$C_n(X - W) / (C_n(X - W) \cap C_n(A)).$$

Basta notar que

$$C_n(X - W, A - W) = C_n(X - W) / C_n(A - W)$$

(pela definição de  $C_n(X - W, A - W)$ ) e que

$$C_n(A - W) = C_n(X - W) \cap C_n(A).$$

Para mostrar esta última igualdade, suponha que  $x \in C_n(A - W)$ . Então  $x \in C_n(X - W)$ , pois

$$C_n(A - W) \subseteq C_n(X - W)$$

e  $x \in C_n(A)$ , que nos leva a concluir que

$$x \in C_n(X - W) \cap C_n(A).$$

Por outro lado, se

$$x \in C_n(X - W) \cap C_n(A),$$

então temos um  $n$ -cubo do conjunto

$$A \cap (X - W) = A \cap X - A \cap W = A - W$$

e  $x \in C_n(A - W)$ , mostrando a igualdade.

Temos também que

$$C_n^{\mathcal{U}}(X, A) = (C_n(A) + C_n(X - W)) / C_n(A).$$

De fato,  $C_n^{\mathcal{U}}(X, A) = C_n(X, \mathcal{U}) / C_n(A, \mathcal{U})$ , pela definição de  $C_n^{\mathcal{U}}(X, A)$ , e  $C_n^{\mathcal{U}}(A) = C_n(A)$  pois, como  $W \subset A$ , temos que  $X - W$  não cobre  $A$ .

Considere agora a transformação linear da inclusão  $i_n : C_n(X - W, A - W) \longrightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X, A)$ . Pelo que foi feito anteriormente, este mapa pode ser descrito como sendo a inclusão do conjunto  $C_n(X - W) / (C_n(X - W) \cap C_n(A))$  no conjunto  $(C_n(A) + C_n(X - W)) / C_n(A)$ .

Tome  $[x] \in (C_n(A) + C_n(X - W)) / C_n(A)$ . Desta forma,  $[x] = x + C_n(A)$  e, como  $x = y + z$  onde  $y \in C_n(X - W)$  e  $z \in C_n(A)$ , temos que  $[x] = y + C_n(A)$ . Logo, temos que este mapa é um epimorfismo. Além disso,  $i_n$  é um monomorfismo. Desta forma, podemos concluir que  $i_n$  é um isomorfismo para todo  $n$ .

Seja  $\sigma_{*n} : H_n^{\mathcal{U}}(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)$ . Pelo Teorema 3.4.1, temos que  $\sigma_{*n}$  é um isomorfismo.

Considere agora a inclusão  $f_n : C_n(X - W, A - W) \longrightarrow C_n(X, A)$  e o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X - W, A - W) & \xrightarrow{f_n} & C_n(X, A) \\ & \searrow i_n & \nearrow \sigma_n \\ & & C_n^{\mathcal{U}}(X, A) \end{array}$$

Pelo que foi feito na Seção 2.3, temos que este diagrama induz o seguinte diagrama comutativo na homologia:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X - W, A - W) & \xrightarrow{f_{*n}} & H_n(X, A) \\ & \searrow i_{*n} & \nearrow \sigma_{*n} \\ & & H_n^{\mathcal{U}}(X, A) \end{array}$$

Como o diagrama é comutativo e  $i_{*n}$  (mapa induzido da inclusão  $i_n$ ) e  $\sigma_{*n}$  são isomorfismos, concluímos que  $f_{*n}$  deve ser um isomorfismo também.  $\square$

Ou seja, dada as hipóteses do teorema, a remoção de um conjunto  $W$  de  $X$  não altera a homologia do par  $(X, A)$ .

Com o que foi apresentado até este ponto, vamos fazer uma aplicação calculando os espaços vetoriais da homologia da esfera  $S^n$  cuja definição é dado em 3.4.3.

**Definição 3.4.3.** A esfera  $n$ -dimensional é definida como o conjunto

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

**Lema 3.4.3.** O espaço vetorial da homologia da esfera  $n$ -dimensional é dado por:

$$H_0(S^n) = \begin{cases} \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}, & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{K}, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

e

$$\tilde{H}_l(S^n) = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{se } l = n \\ \{0\}, & \text{se } l \neq n \end{cases}$$

*Demonstração.* De fato, se  $n = 0$ , então temos que  $S^0 = \{-1, 1\}$  possui apenas dois pontos. Pelo Teorema 3.1.4 da Seção 3.1, temos que  $H_0(S^0) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$  e  $\tilde{H}_l(S^0) = 0$  para  $l > 0$ . Além disso, como  $H_0(S^0) = \tilde{H}_0(S^0) \oplus \mathbb{K}$ , temos que  $\tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{K}$ .

Para mostrar para  $n > 0$ , vamos assumir que o resultado seja verdadeiro até  $n$  e mostraremos que vale para  $(n + 1)$ . Para isto, considere o equador da  $(n + 1)$ -esfera dado por

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_{n+2} = 0\},$$

o seu hemisfério superior dado por

$$E_+^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \geq 0\}$$

e seu hemisfério inferior

$$E_-^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \leq 0\}.$$

Considere também o  $(n + 1)$ -disco dado como

$$E^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid |x| \leq 1, x_{n+2} = 0\}.$$

Temos que  $E_+^{n+1}$  e  $E_-^{n+1}$  são homeomorfos a  $E^{n+1}$  (basta considerar os homeomorfismos  $f_{\pm} : E_{\pm}^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$ , onde  $f_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+2}) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$ ). Sendo  $E^{n+1}$  contrátil, então  $E_+^{n+1}$  e  $E_-^{n+1}$  também são contráteis. Desta forma, o espaço da homologia destes conjuntos é igual à homologia de um espaço constituído de apenas um ponto.

Vamos tomar os pares  $(E_-^{n+1}, S^n)$  e  $(S^{n+1}, E_+^{n+1})$ , e os mapas induzidos

$$\begin{aligned} \delta'_{*l} &: H_{l+1}(E_-^{n+1}, S^n) \rightarrow \tilde{H}_l(S^n), \\ j'_{*l+1} &: \tilde{H}_{l+1}(S^{n+1}) \rightarrow H_{l+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \end{aligned}$$

e

$$k'_{*l+1} : H_{l+1}(E_-^{n+1}, S^n) \rightarrow H_{l+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}).$$

Com isso, podemos escrever o seguinte diagrama:

$$\tilde{H}_l(S^n) \xleftarrow{\delta'_{*l}} H_{l+1}(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{k'_{*l+1}} H_{l+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \xleftarrow{j'_{*l+1}} \tilde{H}_{l+1}(S^{n+1})$$

Para terminar esta demonstração, basta mostrar que os mapas  $\delta'_*$ ,  $j'_*$  e  $k'_*$  são isomorfismos. Começaremos mostrando para o mapa  $\delta'_*$ .

Inicialmente, considere a sequência exata longa da homologia do par  $(E_-^{n+1}, S^n)$  dada por (vamos omitir os índices dos mapas para facilitar a visualização):

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_{l+1}(S^n) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_{l+1}(E_-^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{l+1}(E_-^{n+1}, S^n) \\ & & & & \delta'_* \swarrow & & \\ & & \tilde{H}_l(S^n) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{H}_l(E_-^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{l+1}(E_-^{n+1}, S^n) \longrightarrow \dots \end{array} \quad (7)$$

Vamos assumir também que  $l \neq 0$  e  $l \neq n$ . Como  $E_-^{n+1}$  é contrátil, temos que

$$\tilde{H}_{l+1}(E_-^{n+1}) = \tilde{H}_l(E_-^{n+1}) = 0.$$

Pela hipótese de indução, sabemos que  $\tilde{H}_l(S^n) = 0$  e, sendo a sequência 7 exata, temos que  $\delta'_*$  é isomorfismo para  $l \neq 0$  e  $l \neq n$ .

Se  $l = 0$ , pela hipótese de indução,  $\tilde{H}_l(S^n) = \mathbb{K}$ . Além disso, como a sequência do diagrama 7 é exata e  $\tilde{H}_l(E_-^{n+1}) = 0$  ( $H_0(E_-^{n+1}) = \tilde{H}_0(E_-^{n+1}) \oplus \mathbb{K} = \mathbb{K}$ ), temos que  $Im(\delta_*) = ker(i_*) = \mathbb{K}$  e, sendo assim, o mapa  $\delta'_{0*} : H_1(E_-^{n+1}, S^n) \longrightarrow \tilde{H}_0(S^n)$  é um epimorfismo. Novamente, sabemos que  $\tilde{H}_{l+1}(E_-^{n+1}) = 0$  e, desta forma,  $0 = Im(j_*) = ker(\delta'_*)$ . Sendo  $\delta_*$  uma transformação linear, temos que esta função é um monomorfismo. Logo  $\delta_*$  é isomorfismo.

Seguindo um raciocínio semelhante aos anteriores, concluímos que  $\delta_*$  é isomorfismo para  $l = n$ . Sendo assim,  $\delta_*$  é um isomorfismo para todo  $l$ .

Pela mesma ideia anterior, mostramos que  $j'_*$  é isomorfismo para todo  $l$  usando a sequência exata longa da homologia do par  $(S^{n+1}, E_+^{n+1})$ .

Já para mostrar que  $k_*$  é isomorfismo, não podemos seguir pela mesma ideia anterior, sendo necessário usar o Teorema de Excisão. Para isso, considere o conjunto

$$W = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \geq \frac{1}{2}\}$$

e os mapas induzidos

$$h_* : (E_-^{n+1}, S^n) \longrightarrow (S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W)$$

e

$$g_* : (S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W) \longrightarrow (S^{n+1}, E_+^{n+1}).$$

Como o fecho de  $W$  está contido no interior de  $E_+^{n+1}$  e  $g_*$  é uma inclusão, pelo Teorema 3.4.2 temos que  $g_*$  é um isomorfismo.

Sendo  $g$  e  $h$  mapas de inclusão, temos que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{l+1}(E_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{k_*} & H_{l+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \\ & \searrow h_* & \nearrow g_* \\ & H_{l+1}(S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W) & \end{array}$$

Desta forma, para mostrar que  $k_*$  é isomorfismo, basta mostrar que  $h_*$  é isomorfismo. Para isso, note que  $(E_-^{n+1}, S^n)$  é uma retrato por deformação de  $(S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W)$  tomando

$$r : (S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W) \longrightarrow (E_-^{n+1}, S^n),$$

onde

$$r(x_1, \dots, x_{n+2}) = \begin{cases} (x_1, \dots, 0), & \text{se } x_{n+2} \geq 0 \\ (x_1, \dots, x_{n+2}), & \text{se } x_{n+2} < 0 \end{cases}$$

Sendo assim,  $h$  é uma equivalência homotópica, o que implica que  $h_*$  é isomorfismo pelo Teorema 3.2.2. Com isso, concluímos que  $k_*$  é um isomorfismo.

Por fim, a composição

$$\delta_* \circ k_*^{-1} \circ j_* : \tilde{H}_{l+1}(S^{n+1}) \longrightarrow \tilde{H}_l(S^n)$$

é um isomorfismo, mostrando o resultado desejado.  $\square$

Outro importante resultado da homologia singular é a sequência exata de Mayer-Vietoris. Para apresentá-la, considere que o espaço  $X$  seja formado pela união de dois conjuntos, ou seja,

$$X = A \cup B.$$



Além disso, tome as transformações lineares  $\phi : H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B)$  e  $\psi : H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X)$ . Com estas definições, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 3.4.4.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $A$  e  $B$  subconjuntos deste espaço, tais que  $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ . Então, existe  $\Delta : H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B)$  tal que a sequência abaixo é exata:*

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\phi} \cdots$$

Ainda, se  $A \cap B \neq \emptyset$ , temos que a sequência continua exata se substituirmos pela homologia reduzida.

*Demonstração.* Feita na referência [4] página 208.

Com este teorema, podemos obter a homologia de espaços complicados de maneira mais simples. Como exemplo, vamos calcular a homologia de espaços formados por uma soma “wedge”. Estes espaços são descritos pela seguinte definição:

**Definição 3.4.4.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e considere os pontos fixados  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Chamamos de soma “wedge” o espaço formado por*

$$X \vee Y = X \amalg Y / \sim$$

onde  $\sim$  é relação de equivalência dada por  $x \sim y$  e  $\amalg$  denota a união disjunta.

**Proposição 3.4.5.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $x \in X$  e  $y \in Y$  pontos fixados. Considere a relação de equivalência  $x \sim y$  para formar o espaço  $X \vee Y$ , onde  $z_0$  é o ponto base deste espaço. Sejam também  $A \subset X$  e  $B \subset Y$  tais que esses conjuntos sejam vizinhanças de  $z_0$ , e que este ponto base seja retrato por deformação de  $A$  e  $B$ . Então,  $H_n(X \vee Y)$  é isomorfo a  $H_n(X) \oplus H_n(Y)$  para todo  $n$  inteiro positivo.*

*Demonstração.* Considere os pontos  $x$  e  $y$  e a relação de equivalência  $x \sim y$  para formar o conjunto  $X \vee Y$ . Seja  $z_0$  o ponto base desta soma “wedge” e as vizinhanças  $A \subset X$  e  $B \subset Y$  como nas hipóteses do enunciado. Sendo assim, podemos escrever  $X \vee Y = (X \cup B) \cup (Y \cup A)$ . Porém, como  $z_0$  é retrato por deformação de  $A$  e  $z_0$  é retrato por deformação de  $B$ , temos que  $(X \cup B)$  é um equivalente homotópico de  $X$  e  $(Y \cup A)$  é um equivalente homotópico de  $Y$ . Logo, pelo teorema 3.2.2, temos que  $H_n(X \cup B)$  é isomorfo a  $H_n(X)$  e  $H_n(Y \cup A)$  é isomorfo a  $H_n(Y)$ . Além disso,  $(X \cup B) \cap (Y \cup A) = A \cup B$ . Tomando a sequência de Mayer-Vietoris de  $X \vee Y$  como no Teorema 3.4.4, temos:

$$\cdots \longrightarrow H_n((X \cup B) \cap (Y \cup A)) \longrightarrow H_n((X \cup B)) \oplus H_n((Y \cup A)) \longrightarrow H_n(X \vee Y) \longrightarrow \cdots$$

Usando os resultados descritos anteriormente e que  $A \cup B$  é contrátil (pois os conjuntos  $A$  e  $B$  são deformações retráteis de  $z_0$ ), a sequência de Mayer-Vietoris fica:

$$0 \longrightarrow H_n(X) \oplus H_n(Y) \longrightarrow H_n(X \vee Y) \longrightarrow 0$$

Sendo esta sequência exata, temos que  $H_n(X \vee Y)$  é isomorfo a  $H_n(X) \oplus H_n(Y)$ .  $\square$

Como corolário desta proposição, considere os conjuntos  $S^k$  e  $S^l$ . Se tomarmos a soma “wedge” destes conjuntos, temos que pela Proposição 3.4.5 e pelo Lema 3.4.3, a homologia de  $S^k \vee S^l$  é dada por:

$$H_n(S^k \vee S^l) = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}, & \text{se } n = k = l \\ \mathbb{K}, & \text{se } n = k \text{ ou } n = l, \text{ com } l \neq k \\ 0, & \text{se } n \neq k \text{ e } n \neq l \end{cases}$$

Temos que  $H_0(S^k \vee S^l) = \mathbb{K}$  pois esta soma “wedge” possui uma componente conexa por caminhos.

## 4 Complexos CW

Nesta seção apresentaremos o conceito de complexos CW, o que simplificará o cômputo da homologia de diversos espaços topológicos. O conteúdo desta seção pode ser encontrado nas referências [4], [5] e [6].

### 4.1 Definições iniciais

De início, vamos considerar que uma bola fechada n-dimensional é descrita como

$$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

e uma bola aberta n-dimensional é dada pelo conjunto

$$U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Desta forma, temos que  $S^{n-1} \subset E^n$ . Como um exemplo destes conjunto, se  $n = 3$ , a esfera  $S^2$  é a casca da bola fechada  $E^3$ .

**Definição 4.1.1.** *Dado um espaço topológico  $Y$  e mapas  $f_\lambda : S_\lambda^n \rightarrow Y$  com  $\lambda \in \Lambda$ , podemos construir um espaço topológico dado como o quociente*

$$X = Y \amalg_\lambda E_\lambda^{n+1} / \sim$$

onde a relação de equivalência é definida como  $b \sim f_\lambda(b)$  para todo  $b \in S_\lambda^n$ . Neste caso, dizemos que  $X$  é obtido por  $Y$  pela adjunção de n-células  $e_\lambda^n$  (que são homeomorfas a  $U_\lambda^n$ ) dando a topologia quociente. Os mapas  $f_\lambda$  são chamados de mapas de adjunção.

Com esta definição, podemos ver que os mapas de adjunção funcionam como se fossem uma “cola”, “grudando” as n-células ao conjunto  $Y$  para, desta forma, gerar o espaço  $X$ .

A partir dos mapas de adjunção, pode-se definir a função característica como sendo a sua extensão. Então, para cada  $f_\lambda$ , temos uma função característica  $F_\lambda : E_\lambda^n \rightarrow X$ , onde  $F_\lambda$  restrito a  $U_\lambda^n$  é homeomorfo a  $e_\lambda^n$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Com isso, temos o seguinte diagrama que expressa a ideia de anexação das n-células a  $Y$ :

$$\begin{array}{ccc} \amalg_\lambda S_\lambda^{n-1} & \hookrightarrow & \amalg_\lambda E_\lambda^n \\ \downarrow f_n & & \downarrow F_n \\ Y & \hookrightarrow & X \end{array} \quad (8)$$

Agora, vamos enunciar um teorema que nos auxiliará a calcular a homologia singular de espaços topológicos formados por n-células. Para isso, usaremos o par  $(X, Y)$ .

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $Y \subset X$ , onde  $X$  é formado pela união disjunta de  $Y$  com n-células  $e_\lambda^n$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Então,  $H_q(X, Y) = 0$  se  $q \neq n$  e o mapa  $f_\lambda : E_\lambda^n \rightarrow X$  induz o monomorfismo  $f_{*\lambda}$  de  $H_n(E^n, S^{n-1})$  em  $H_n(X, Y)$ , sendo que a base de  $H_n(X, Y)$  possui uma relação  $1 - 1$  com o conjunto das n-células.*

*Demonstração.* Para esta demonstração, definiremos o conjunto  $J^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1/2\}$ , que claramente é um subconjunto de  $E^n$ . Com isso, temos  $D_\lambda = f_\lambda(J^n)$  e  $\mathcal{D} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ . Definiremos também  $a_\lambda = f_\lambda(0)$ ,  $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$  e  $Y' = X - A$ . Desta forma,  $Y \subset Y'$ .

Com isso, temos que  $f_\lambda(J^n - \{0\}) = f_\lambda(D^n) - f_\lambda(\{0\})$ , pois  $D^n \subset U^n$  e  $U^n$  é homeomorfo a  $e_\lambda^n$ . Além disso, como as  $n$ -células são disjuntas, então  $D_\lambda$  também o são.

Sejam  $g_* : H_n(\mathcal{D}, \mathcal{D} - A) \rightarrow H_n(X, Y')$  e  $h_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X, Y')$  transformações lineares. Vamos mostrar que  $g_*$  e  $h_*$  são isomorfismos.

Para mostrar que  $h_*$  é um isomorfismo, considere o diagrama comutativo formado pelas seqüências exatas na homologia dos pares  $(X, Y)$  e  $(X, Y')$  e a transformação linear induzida da inclusão  $k_* : H_n(Y) \rightarrow H_n(Y')$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(Y) & \xrightarrow{i_*} & H_q(X) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X, Y) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(Y) & \xrightarrow{i_*} & H_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & k_* \downarrow & & Id_* \downarrow & & h_* \downarrow & & k_* \downarrow & & Id_* \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_q(Y') & \xrightarrow{i'_*} & H_q(X) & \xrightarrow{j'_*} & H_q(X, Y') & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{q-1}(Y') & \xrightarrow{i'_*} & H_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Neste diagrama, temos que o mapa  $Id$  é o mapa identidade, sendo portanto um isomorfismo. Temos também que  $Y$  é uma retrato por deformação de  $Y'$  e, pelo Teorema 3.2.2,  $k_*$  é um isomorfismo. Usando o Lema dos Cinco (Lema 2.2.5) podemos concluir que  $h_*$  é um isomorfismo.

Agora, para mostrar que  $g_*$  é um isomorfismo, note que

$$\mathcal{D} = X - \left( Y \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(J^{n\mathbb{C}}) \right)$$

e

$$\mathcal{D} - A = (X - A) - \left( Y \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(J^{n\mathbb{C}}) \right)$$

com o fecho do conjunto  $(Y \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(J^{n\mathbb{C}}))$  estando em  $(X - A)$ . Então, pelo Teorema da Excisão (Teorema 3.4.2), temos que  $g_*$  é um isomorfismo.

Sendo assim, pelo diagrama

$$H_q(\mathcal{D}, \mathcal{D} - A) \xrightarrow{g_*} H_q(X, Y') \xleftarrow{h_*} H_q(X, Y)$$

podemos concluir que  $H_q(\mathcal{D}, \mathcal{D} - A)$  é isomorfo a  $H_q(X, Y)$ .

Vamos mostrar agora que  $H_q(\mathcal{D}, \mathcal{D} - A) = 0$  para  $q \neq n$ . De fato, sabemos que os conjuntos  $D_\lambda$  são disjuntos para todo  $\lambda \in \Lambda$ , que implica que cada componente conexa por caminhos de  $\mathcal{D}$  são os conjuntos  $D_\lambda$ . Pelo que foi feito na demonstração da Proposição 3.1.4, temos que  $H_q(\mathcal{D}, \mathcal{D} - A) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_q(D_\lambda, D_\lambda - a_\lambda)$  e, portanto, a base de  $H_q(X, Y)$  tem uma relação biunívoca com o conjunto das  $n$ -células. Considere agora a seqüência exata longa da homologia reduzida do par  $(D_\lambda, D_\lambda - a_\lambda)$ :

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_q(D_\lambda - a_\lambda) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(D_\lambda) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_q(D_\lambda, D_\lambda - a_\lambda) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{q-1}(D_\lambda - a_\lambda) \longrightarrow \cdots$$

Como  $D_\lambda$  é contrátil (pois este conjunto é homeomorfo a  $E^n$ ), temos que  $\tilde{H}_q(D_\lambda) = 0$ . Além disso, como  $D_\lambda - a_\lambda$  se retraem em esferas, temos que a homologia destes conjuntos é igual a

homologia da esfera feita no Lema 3.4.3. Sendo assim,  $\tilde{H}_{q-1}(D_\lambda - a_\lambda) = 0$  para  $q \neq n$ . Com isso, temos que  $\ker(\partial_*) = \tilde{H}_q(D_\lambda, D_\lambda - a_\lambda)$ . Porém, como a sequência é exata e  $\text{Im}(j_*) = 0$ , temos que  $\tilde{H}_q(D_\lambda, D_\lambda - a_\lambda) = 0$ .

Com isso, concluímos que  $H_q(X, Y) = 0$  se  $q \neq n$ .  $\square$

## 4.2 Definição e exemplos de complexos CW

**Definição 4.2.1.** *Considere a seguinte sequência ascendente de subespaços fechados do espaço denotado por  $X$ , onde  $X$  é Hausdorff:*

$$\emptyset := X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots$$

*Além disso, considere que esta sequência satisfaz as seguintes condições:*

1. *O conjunto  $X^n$  é obtido pela adjunção de  $X^{n-1}$  a  $n$ -células  $e_\lambda^n$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ;*
2. *O espaço  $X$  é obtido pela união dos espaços  $X^n$ ,  $\forall n \in \{0, 1, 2, \dots\}$*
3. *Temos que  $A \subset X$  é fechado se, e somente se,  $A \cap X^n$  é fechado, para todo  $n$  inteiro, sendo essa chamada de topologia fraca.*

*A estrutura descrita é chamada de complexo CW do espaço  $X$ .*

Cada  $X^n$  do complexo CW é chamado de  $n$ -esqueleto. Sendo assim, um complexo CW de um espaço  $X$  é uma estrutura na qual acrescenta-se  $n$ -esqueletos sobre  $(n-1)$ -esqueletos até que seja formado o espaço  $X$ . Se existe  $n$  tal que  $X = X^n$ , dizemos que o complexo CW possui dimensão finita cujo valor é o menor  $n$  que satisfaz esta condição.

Com o que foi descrito, pelo diagrama 8, se substituirmos  $Y$  por  $X^{n-1}$  e  $X$  por  $X^n$ , ao anexar as  $n$ -células a  $X^{n-1}$  obtemos  $X^n$ .

**Exemplo 4.2.1. Grafos não-orientados:** *Um exemplo de estrutura CW pode ser vista em um grafo  $G$ , onde o 0-esqueleto ( $X^0$ ) é formado pelos vértices do grafo e o 1-esqueleto ( $X^1$ ) é dado pela união dos vértices com suas respectivas arestas. Neste caso, o complexo CW possui dimensão 1.*

**Exemplo 4.2.2. Esferas:** *Para montar uma estrutura de complexo CW de um círculo, temos que o conjunto  $X^0$  é dado por um ponto  $p$  e o 1-esqueleto é formado pelo ponto  $p$  e um loop  $l$ , no qual ambas as extremidades de  $l$  começam e terminam no ponto  $p$ .*

Outro exemplo possível seria formar a estrutura do complexo CW da esfera  $S^2$ . O conjunto denotado por  $X^0$  é formado por um ponto  $p$ . No caso da esfera, a estrutura de 1-esqueleto é igual à de 0-esqueleto, ou seja, o conjunto  $X^1$  é formado também pelo ponto  $p$  (isto está de acordo com a definição de complexos CW, pois  $X^0 \subset X^1$  e o mapa de adjunção é dado por uma função que leva todos os pontos de  $E^1$  no ponto  $p$ ). Por último, tome o disco  $E^2$  e considere como mapa de adjunção uma função que toma todos os pontos da fronteira do disco e os leva

em  $p$ . Ou seja, a fronteira de  $E^2$  é “colada” em  $p$ . O conjunto formado por este mapa de adjunção é o 2-esqueleto ( $X^2$ ). Sendo assim, a esfera  $S^2$  possui um complexo CW de dimensão dois.

De maneira geral, uma estrutura CW da esfera  $S^k$  pode ser construída por um ponto  $p$  que forma o conjunto  $X^0$ , e um mapa de adjunção que leva a fronteira de  $E^k$  no ponto  $p$ , formando o conjunto ( $X^k$ ). Os  $n$ -esqueletos, com  $1 \leq n < k$  são todos iguais a  $X^0$ .

### 4.3 Homologia de complexos CW

Aqui, teremos que  $X$  será um espaço topológico e  $K$  uma estrutura CW com os  $n$ -esqueletos dados por  $K^n$ . Usando o Teorema 4.1.1, podemos obter algumas informações sobre a homologia do par  $(K^n, K^{n-1})$ , onde  $H_q(K^n, K^{n-1}) = 0$  para  $q \neq n$ .

**Lema 4.3.1.** *Seja  $K^n$  um  $n$ -esqueleto de um espaço topológico  $X$ . Então,  $H_q(K^n) = 0$  se  $q > n$ .*

*Demonstração.* A prova segue por indução em  $n$ . Se  $n = 0$ , então temos que  $K^0$  é formado apenas por pontos não ligados entre si, ou seja,  $K^0$  é um conjunto desconexo. Logo, pelo que foi feito na Seção 3.1, na Proposição 3.1.4, temos que se  $q > 0$ , então  $H_q(K^0) = 0$ . Vamos assumir que este resultado vale para  $n - 1$  e mostraremos que vale para  $n$ .

Considere a sequência exata longa na homologia do par  $(K^n, K^{n-1})$ :

$$\dots \longrightarrow H_{q+1}(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_q(K^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_q(K^n) \xrightarrow{j_*} H_q(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow \dots$$

Pela hipótese de indução, temos que  $H_q(K^{n-1}) = 0$  e pelo Teorema 4.1.1, temos que  $H_q(K^n, K^{n-1}) = 0$ , pois  $q \neq n$ . Sendo esta sequência exata, temos que  $Im(i_*) = ker(j_*) = H_q(K^n)$ . Contudo, como  $H_q(K^{n-1}) = 0$ , então  $Im(i_*) = 0$ , e  $H_q(K^n) = 0$ , provando o que se queria.  $\square$

Vamos definir o conjunto  $C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1})$  e o operador  $d_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$ , onde  $d_n = j_{*n-1} \circ \partial_*$ , com  $j_{*n-1}$  sendo o mapa quociente induzido e  $\partial_*$  o morfismo de conexão induzido na homologia.

**Proposição 4.3.2.** *Seja  $d_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$ , onde  $d_n = j_{n-1} \circ \partial_*$ . Então  $d_{n-1} \circ d_n = 0$ .*

*Demonstração.* Basta notar que, usando a sequência exata longa na homologia do par  $(K^n, K^{n-1})$ , temos que  $ker(\partial_*) = Im(j_{n-1})$ . Sendo assim:

$$d_{n-1} \circ d_n = j_{n-2}(\partial_*(j_{n-1}(\partial_*))) = 0$$

Demonstrando o resultado.  $\square$

Desta forma, o conjunto  $C_n(K)$  junto com o operador  $d_n$  formam um complexo de cadeias,  $(C_n(K), d_n)$ . Assim, pelo que foi feito na Seção 2.3, podemos calcular a homologia do CW dado por  $K$ , denotada por  $H_n(K)$ .

**Teorema 4.3.3.** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $K$  uma estrutura de complexo CW de dimensão finita,  $k_n : H_n(K^n) \rightarrow H_n(X)$  e  $j_n : H_n(K^n) \rightarrow H_n(K^n, K^{n-1})$  transformações induzidas por mapas de inclusão. Então, pelo diagrama*

$$H_n(X) \xleftarrow{k_n} H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1})$$

temos que  $\theta_n = j_n \circ k_n^{-1}$  induz um isomorfismo com a homologia do complexo de cadeias dado pela estrutura CW.

*Demonstração.* Sabemos pelo Teorema 4.1.1 e pelo Lema 4.3.1, que a sequência

$$0 \longrightarrow H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_n} H_{n-1}(K^n) \longrightarrow 0 \quad (9)$$

é o único trecho da sequência exata longa que não é nula. Disto, podemos concluir que a transformação linear induzida da inclusão  $i_n : H_q(K^{n-1}) \rightarrow H_q(K^n)$  é um isomorfismo para todo  $q \neq n$  e  $q \neq n-1$ .

Sabemos que  $K$  é de dimensão finita. Então, deve existir  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $X = K^m$ . Tomando  $n > q+1$ , com  $q \geq 0$ , podemos escrever o seguinte diagrama comutativo, onde os mapas da primeira linha são todos isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(K^{q+1}) & \xrightarrow{i_{q+2}} & H_q(K^{q+2}) & \xrightarrow{i_{q+3}} & \dots & \xrightarrow{i_m} & H_q(K^m) \\ & \searrow k_{q+1} & \downarrow k_{q+2} & & & \swarrow k_m & \\ & & H_q(X) & & & & \end{array}$$

Como  $K^m = X$ , temos que  $k_m$  é um isomorfismo e, sendo  $i_l$  isomorfismos, concluímos que  $k_l$  é isomorfismo para todo  $l > q$ .

Usando o trecho da sequência exata mostrada no diagrama 9, temos que implicando que  $j_n$  é um monomorfismo e  $i_n$  é um epimorfismo.

Usando que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(K^n) & \xrightarrow{i_{n+1}} & H_n(K^{n+1}) \\ \downarrow k_n & & \swarrow k_{n+1} \\ H_n(X) & & \end{array}$$

é comutativo e que  $k_{n+1}$  é isomorfismo, podemos concluir que  $k_n$  é epimorfismo e  $\ker(k_n) = \ker(i_{n+1})$ . Com este resultado e sabendo que os domínios dos mapas  $i_n$  e  $k_{n-1}$  são os mesmos, podemos reescrever o trecho da sequência não-trivial como:

$$0 \longrightarrow H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{k_{n-1}} H_{n-1}(X) \longrightarrow 0$$

Sendo  $j_{n-1}$  um monomorfismo, temos que  $\ker(j_{n-1}) = \{0\}$ . Ademais, sabemos também que  $d_n = j_{n-1} \circ \partial_*$  e, desta forma,  $\ker(d_n) = \ker(\partial_*) = \text{Im}(j_n)$ .

Temos também que  $\ker(k_{n-1}) = \text{Im}(\partial_*) = j_{n-1}^{-1}(\text{Im}(j_{n-1} \circ \partial_*)) = j_{n-1}^{-1}(\text{Im}(d_n))$ .

Sendo  $Z_n(K) = \ker(d_n)$  e  $B_n(K) = \text{Im}(d_{n+1})$ , então podemos dizer que  $Z_n(K) = \text{Im}(j_n)$  e  $\ker(k_{n-1}) = j_{n-1}^{-1}(B_{n-1}(K))$ . Desta forma, se tomarmos o elemento nulo 0 de  $H_{n-1}(X)$ , temos que  $j_{n-1} \circ k_{n-1}^{-1}(0) = B_{n-1}(K)$  e, com isso, podemos concluir que  $H_n(X)$  é levado em  $H_n(K)$  por  $j_n \circ k_n^{-1}$ . Além disso, sabemos que  $j_n$  é um monomorfismo e um epimorfismo sobre  $Z_n(K)$ .

Logo, a transformação linear  $\theta_n : H_n(X) \longrightarrow H_n(K)$  dada por  $\theta_n = j_n \circ k_n^{-1}$  induz um isomorfismo.  $\square$

Este importante teorema diz que se conhecermos uma estrutura de complexos CW de um espaço  $X$ , e se quisermos calcular a homologia deste espaço, basta calcular a homologia do complexo CW de  $X$ . Ou seja, a homologia de  $X$  é equivalente a homologia do complexo celular associado à estrutura CW que o forma.

Como exemplo de aplicação deste teorema, considere a figura apresentada a seguir:

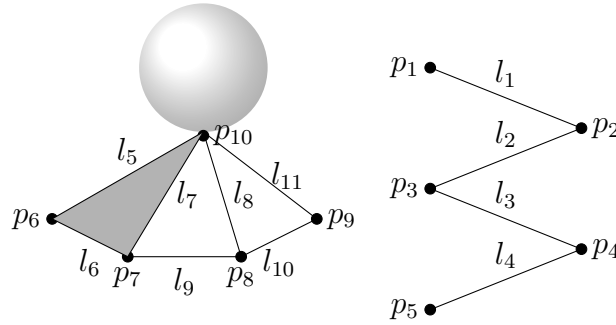


Figura 4.3.1: Espaço X

Nesta figura, considere como o 0-esqueleto o conjunto  $K^0$  formado pelos vértices  $p_l$ , com  $l \in \{1, \dots, 10\}$ , o 1-esqueleto o conjunto  $K^1$  formado por  $K^0$  adjuntado com as arestas  $l_q$ , com  $q \in \{1, \dots, 11\}$ , e o 2-esqueleto sendo o conjunto  $K^2$  formado por  $K^1$  adjuntado com os retângulo  $r_1$  e  $r_2$ , onde  $r_1$  que tem as suas bordas “coladas” nas arestas  $l_5$ ,  $l_6$  e  $l_7$  e nos vértices  $p_6$ ,  $p_7$  e  $p_{10}$ , e o retângulo  $r_2$  tem as suas bordas “coladas” no ponto  $p_{10}$ . Além disso,  $K^n = K^2$ , para todo inteiro positivo  $n > 2$ . Desta forma, a estrutura CW montada é dada por  $K = \{K^0, K^1, K^2\}$ , onde  $K^0$  possui dez 0-células,  $K^1$  possui onze 1-células e  $K^2$  possui duas 2-células.

### I) Calculando $H_0(K)$

Neste caso,  $C_0(K) = H_0(K^0, K^{-1})$ . Mas como  $K^{-1} = \emptyset$ , então  $H_0(K^0, K^{-1}) = H_0(K^0)$ . Sendo  $K^0$  um conjunto formado por dez pontos, tendo portanto dez componentes conexas por caminhos, pela Proposição 3.1.4 podemos afirmar que  $H_0(K^0) = \bigoplus_{l=1}^{10} \mathbb{K}$ . Sendo  $\ker(\partial_{*0}) = H_0(K^0, K^{-1})$ , temos que  $\ker(d_0) = C_0(K) = \bigoplus_{l=1}^{10} \mathbb{K}$ .

Para calcular  $\text{Im}(d_1)$ , vamos considerar a sequência exata longa da homologia do par  $(K^1, K^0)$ . Pelo Teorema 4.1.1 e pelo Lema 4.3.1, o único trecho não trivial desta sequência é dado por:

$$0 \longrightarrow H_1(K^1) \xrightarrow{j_{*1}} H_1(K^1, K^0) \xrightarrow{\partial_{*1}} H_0(K^0) \xrightarrow{i_{*0}} H_0(K^1) \xrightarrow{j_{*0}} 0$$



Sabendo que  $K^1$  tem onze 1-células, usando o Teorema 4.1.1 chegamos na conclusão de que  $H_1(K^1, K^0) = \bigoplus_{l=1}^{11} \mathbb{K}$ . Além disso,  $K^1$  possui duas componentes conexas por caminhos. Usando a Proposição 3.1.4, temos que  $H_0(K^1) = \bigoplus_{l=1}^2 \mathbb{K}$ . Sabemos também que  $H_0(K^0) = \bigoplus_{l=1}^{10} \mathbb{K}$ . Desta forma, usando o fato da sequência ser exata e sabendo que dado uma transformação linear, a dimensão do seu domínio é igual a dimensão do núcleo mais a dimensão da imagem, temos que

$$\begin{aligned} \ker(j_{*0}) &= \bigoplus_{l=1}^2 \mathbb{K} = \text{Im}(i_{*0}) \\ \Rightarrow \ker(i_{*0}) &= \bigoplus_{l=1}^8 \mathbb{K} = \text{Im}(\partial_{*1}) \\ \Rightarrow \ker(\partial_{*1}) &= \bigoplus_{l=1}^3 \mathbb{K} = \text{Im}(j_{*1}) \\ \Rightarrow H_1(K^1) &= \bigoplus_{l=1}^3 \mathbb{K} \end{aligned}$$

pois  $j_{*1}$  é um monomorfismo.

Sendo  $d_1 = j'_{*0} \circ \partial_{*1}$ , onde  $j'_{*0} : H_0(K^0) \rightarrow H_0(K^0, K^{-1})$  é um monomorfismo (basta considerar a sequência exata longa da homologia do par  $(K^0, K^{-1})$  e observar que  $H_0(K^{-1}) = 0$ ), junto com o fato de que  $\text{Im}(\partial_{*1}) = \bigoplus_{l=1}^8 \mathbb{K}$ , concluímos que  $\text{Im}(d_1) = \bigoplus_{l=1}^8 \mathbb{K}$ .

Logo,

$$H_0(K) = \ker(d_0) / \text{Im}(d_1) = \bigoplus_{l=1}^2 \mathbb{K}.$$

## II) Calculando $H_1(K)$

Pelo que foi feito no cálculo de  $H_0(K)$ , como  $\text{Im}(d_1) = \bigoplus_{l=1}^8 \mathbb{K}$  e  $H_1(K^1, K^0) = \bigoplus_{l=1}^{11} \mathbb{K}$ , temos que  $\ker(d_1) = \bigoplus_{l=1}^3 \mathbb{K}$ .

A sequência exata longa do par  $(K^2, K^1)$  junto com o Teorema 4.1.1 e o Lema 4.3.1, é dada por:

$$0 \longrightarrow H_2(K^2) \xrightarrow{j_{*2}} H_2(K^2, K^1) \xrightarrow{\partial_{*2}} H_1(K^1) \xrightarrow{i_{*1}} H_1(K^2) \xrightarrow{j_{*1}} 0$$

Como  $K^2$  possui duas 2-células anexadas a  $K^1$ , pelo Teorema 4.1.1,  $H_1(K^2, K^1) = \bigoplus_{l=1}^2 \mathbb{K}$ . Temos também que a 2-célula que é anexada a  $K^1$  dada pelo retângulo  $r_1$ , preenche a área do triângulo formado pelos vértices  $p_6, p_7$  e  $p_{10}$ . Sendo assim, essa região é contrátil e, portanto, “mata” o um 1-ciclo que havia em  $K^1$ . Logo,  $H_1(K^2) = \bigoplus_{l=1}^2 \mathbb{K}$ . Além disso, temos que  $H_1(K^1) = \bigoplus_{l=1}^3 \mathbb{K}$ . Então, pelo mesmo argumento usado no cálculo de  $H_0(K)$ , temos

$$\begin{aligned} \ker(j_{*1}) &= \bigoplus_{l=1}^2 \mathbb{K} = \text{Im}(i_{*1}) \\ \Rightarrow \ker(i_{*1}) &= \mathbb{K} = \text{Im}(\partial_{*2}) \\ \Rightarrow \ker(\partial_{*2}) &= \mathbb{K} = \text{Im}(j_{*2}) \\ \Rightarrow H_2(K^2) &= \mathbb{K} \end{aligned}$$

pois  $j_{*2}$  é um monomorfismo.

Usando a sequência exata longa do par  $(K^1, K^0)$  e que  $\text{Im}(\partial_{*2}) = \mathbb{K}$ , concluímos que  $\text{Im}(d_2) = \mathbb{K}$ .

Portanto,

$$H_1(K) = \ker(d_1) / \text{Im}(d_2) = \bigoplus_{l=1}^2 \mathbb{K}.$$

## II) Calculando $H_2(K)$

Como  $\text{Im}(d_2) = \mathbb{K}$  e  $H_1(K^2, K^1) = \bigoplus_{l=1}^2 \mathbb{K}$ , temos que  $\ker(d_2) = \mathbb{K}$ . Porém, como  $K^3 = K^2$ , temos que não acrescentamos nenhuma 3-célula a  $K^2$ . Logo, pelo Teorema 4.1.1,

temos que  $H_3(K^3, K^2) = 0$ , implicando que  $Im(d_3) = 0$ .

Com isso, temos que

$$H_2(K) = ker(d_2) / Im(d_3) = \mathbb{K}.$$

Como não temos estruturas de dimensão maior que 2, concluímos que  $H_n(K) = 0$  para todo  $n > 2$ , com  $n$  sendo um número inteiro.

Por último, pelo Teorema 4.3.3, temos que homologia celular equivale à homologia do espaço  $X$  em cada nível da homologia. Logo:

$$H_0(X) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$$

$$H_1(X) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$$

$$H_2(X) = \mathbb{K}$$

$$H_n(X) = 0, \text{ para todo inteiro positivo } n > 2$$

## 5 Homologia persistente

Nesta seção pretende-se mostrar brevemente alguns desdobramentos da homologia com sua aplicação na ciência de dados, apresentando o conceito de homologia persistente e diagramas de persistência. As principais referências usadas para esta seção foram [7], [8], [9], [10] e [11].

### 5.1 Motivação para a homologia persistente

Uma importante característica do mundo moderno é a quantidade de informação sobre diversos assuntos que obtemos e armazenamos. Frequentemente, essas informações aparecem como um conjunto de dados que são representados como uma sequência não-ordenada de pontos em um espaço Euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{E}^n$ . Esses dados podem ser provenientes de fontes diversas, como experimentos da área da física, da neurociência, psicologia e até mesmo dados sobre o perfil de consumo e comportamento de pessoas que são utilizados para auxiliar empresas e governos na tomada de decisões. Ou seja, dois conjuntos de dados podem ter naturezas completamente diferentes entre si, e isto deve ser levado em consideração ao fazer a análise deles.

Devido a este fato, nota-se a importância de se ter ferramentas e métodos que possam ser considerados confiáveis para se realizar a análise de um certo conjunto de dados. A análise feita deve oferecer informações qualitativas sobre como o conjunto se organiza em escalas maiores, sempre se atentando em distinguir os pontos relevantes dos que são apenas ruídos (o que nem sempre é uma tarefa simples). Além disso, em alguns casos, é desejável também que a análise feita seja capaz de inferir estruturas de dimensões maiores (caso existam) do que as representadas pelo conjunto de dados.

Temos que dados mostrados como uma nuvem de pontos (amostra de pontos do  $\mathbb{E}^n$  que podem ser representados em um subconjunto de dimensão menor) provenientes do mapeamento de objetos tridimensionais são um bom exemplo de dados dos quais é possível obter informações sobre a estrutura global do objeto.

Uma ferramenta importante que pode ser usada para analisar este tipo de dados é a topologia. Esta área da matemática pode ajudar nesta tarefa pois ela estuda as propriedades geométricas do espaço que não dependem da escolha de um sistema de coordenadas, mas das propriedades intrínsecas do espaço, evitando que a análise dos dados seja enviesada. Ademais, pode-se estudar como os dados de uma certa amostra se conectam, identificando “loops” e superfícies de dimensões maiores. Para isso, o que foi estudado sobre homologia nas seções anteriores pode ser útil para estas análises. Ou seja, a topologia algébrica pode ser aplicada nestes casos para se extrair características globais de um conjunto de dados. Sendo assim, nas próximas seções, será mostrado o ferramental matemático para aplicar estes conceitos na análise de um certo conjunto de dados.

## 5.2 Complexo de Vietoris-Rips e persistência

Vamos considerar um espaço métrico finito  $X \subset \mathbb{E}^n$  com  $m$  pontos e seja  $X_1$  um complexo CW construído a partir de  $X$  da seguinte maneira: para um  $\epsilon_1 > 0$ , seja  $X$  o 0-esqueleto de  $X_1$ , enquanto que o 1-esqueleto é formado pelo seu 0-esqueleto adjuntado das arestas onde, dados  $x_i, x_j \in X$ , existe uma aresta ligando  $x_i$  e  $x_j$  se, e somente se,  $d(x_i, x_j) \leq \epsilon_1$ , com  $d(x_i, x_j)$  sendo a distância entre os pontos  $x_i$  e  $x_j$ . Além disso, o 2-esqueleto de  $X_1$  é gerado pelo 1-esqueleto e por 2-células que são áreas triangulares adjuntadas às arestas do 1-esqueleto sempre que essas arestas pertencerem a um triângulo. Indutivamente, podemos construir os  $n$ -esqueletos para  $n > 2$  e, com isso, gerar o complexo CW  $X_1$ .

Mudando o parâmetro  $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \dots < \epsilon_k$ , note que podemos construir uma sequência de complexos CW  $X_k$ , onde sempre temos que  $X_k \subset X_{k+1}$ . Cada complexo CW  $X_k$  construído como descrito no parágrafo anterior é chamado de complexo de Vietoris-Rips. Temos também que a sequência dos complexos  $X_k$  com as inclusões  $\iota^k : X_k \rightarrow X_{k+1}$  entre eles é chamada de filtração.

Um complexo de Vietoris-Rips pode ser observado na figura a seguir para  $\epsilon = 1$ :

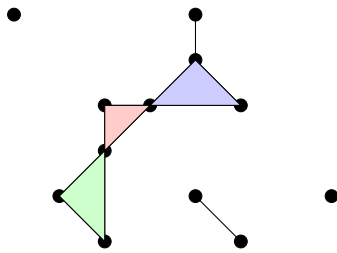


Figura 5.2.1: Complexo de Vietoris-Rips para  $\epsilon = 1$

Se tomarmos um espaço métrico  $(X, d)$  dado pelo conjunto de vértice da Figura 5.2.1, observe que podemos formar complexos de Vietoris-Rips para finitos valores do parâmetro  $\epsilon > 0$  e, assim, calcular a homologia de cada complexo. Contudo, suponha que esse espaço métrico represente uma nuvem de dados. Como as homologias de cada complexo formado não são necessariamente iguais, a tarefa de inferir características globais para essa nuvem é dificultada se a analisarmos para cada valor de  $\epsilon$  individualmente. Vemos que para valores pequenos o suficiente deste parâmetro, temos apenas um complexo discreto, enquanto que para valores intermediários de  $\epsilon$ , podemos observar a formação e a extinção de “loops” e outras estruturas conforme ele é alterado.

Entretanto, é possível obter esse tipo de informação se considerarmos todo o espectro de estruturas que são descritas pelo cálculo da homologia para todos os valores de  $\epsilon$ , identificando quais os  $n$ -ciclos que podem ser considerados essenciais e quais podem ser descartados. Para isso, vamos considerar as características topológicas que *persistem* para uma sequência crescente finita de valores do parâmetro  $\epsilon$ . Essas características podem ser um indício de estruturas, enquanto que as que possuem uma vida curta (sobrevivem apenas para intervalos pequenos de  $\epsilon$ ) podem ser consideradas ruídos na nuvem de dados. Esta é a ideia da persistência.

**Definição 5.2.1.** *Dados uma seqüência finita de complexos CW  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^k)_{k=1}^N$ , e mapas contínuos  $\iota^k : \mathcal{C}^k \longrightarrow \mathcal{C}^{k+1}$ , a  $(i, j)$ -homologia persistente de  $\mathcal{C}$ , escrita como  $H_n^{i \rightarrow j}(\mathcal{C})$ , é definida como a imagem da transformação linear induzida  $\iota_* : H_n(\mathcal{C}^i) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}^j)$  para  $i < j$ .*

Assim, uma seqüência de complexos de Vietoris-Rips (descrita no início desta seção) dada por  $\mathcal{R} = (\mathcal{R}^i)_{i=1}^N$  associada a uma nuvem de dados, onde cada elemento desta família é um complexo CW formado por um valor da seqüência crescente de parâmetros  $(\epsilon_i)_{i=1}^N$ . Tomando as filtrações como mapas de inclusão, temos a seguinte seqüência finita de complexos CW:

$$\mathcal{R}^1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{R}^2 \xrightarrow{\iota} \dots \xrightarrow{\iota} \mathcal{R}^N$$

Sendo assim, para visualizar as estruturas que persistem ao aumentar o valor do parâmetro, basta usar a Definição 5.2.1 para calcular  $H_n^{i \rightarrow j}(\mathcal{R})$  a partir da seqüência abaixo:

$$H_n(\mathcal{R}^1) \xrightarrow{\iota_*} H_n(\mathcal{R}^2) \xrightarrow{\iota_*} \dots \xrightarrow{\iota_*} H_n(\mathcal{R}^N)$$

Esta seqüência de espaços vetoriais com transformações lineares pode ser chamada de módulo persistente finito e é representada por  $H_n(\mathcal{R})$

**Definição 5.2.2.** *Chamamos de intervalo  $\mathbb{K}_{i,j}$  uma estrutura representada pela seqüência*

$$0 \xrightarrow{f_1} 0 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_i} \mathbb{K} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots \xrightarrow{f_j} \mathbb{K} \xrightarrow{f_{j+1}} 0 \xrightarrow{f_{j+2}} \dots \xrightarrow{f_N} 0$$

onde o corpo  $\mathbb{K}$  “nasce” na aplicação do mapa nulo  $f_i$  da seqüência e “morre” na aplicação do mapa nulo  $f_{j+1}$  da seqüência. Os mapas  $f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_j$  são mapas identidade.

**Teorema 5.2.1.** [7] *Seja uma seqüência de complexos CW  $\mathcal{C}$  e o módulo persistente  $H_n(\mathcal{C})$ , onde o espaço vetorial da homologia é dado sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Então,  $H_n(\mathcal{C})$  se decompõem como a soma direta finita de intervalos  $\mathbb{K}_{i,j}$ . Ou seja,*

$$H_n(\mathcal{C}) \cong \bigoplus_{l=1}^r \mathbb{K}_{i_l, j_l} \quad (10)$$

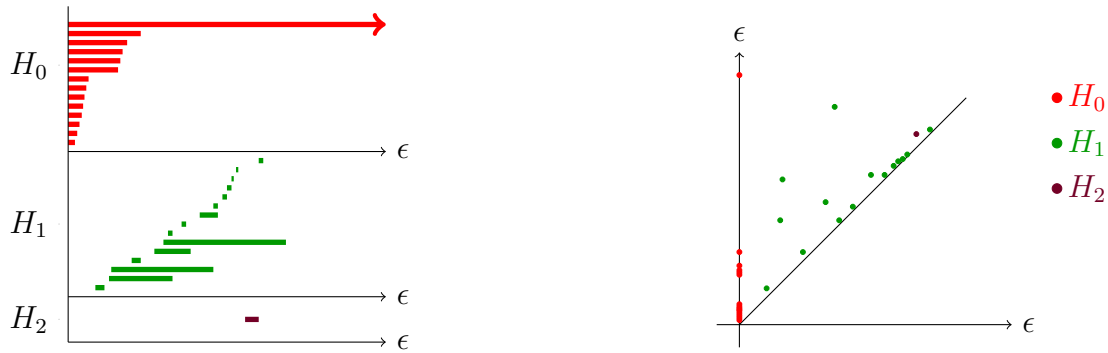
Se  $\mathcal{C}$  representa um complexo persistente formado por complexos de Vietoris-Rips provenientes de uma nuvem de dados, então este teorema nos fornece as estruturas que persistem neste conjunto. Ou seja, para cada estrutura  $n$ -dimensional que nasce no complexo  $\mathcal{C}^i$  e morre no complexo  $\mathcal{C}^j$ , temos que ela seria representada pelo intervalo  $\mathbb{K}_{i,j}$  e o módulo persistente deste complexo seria dado pela soma de cada um destes intervalos.

### 5.3 Diagrama de persistência e estabilidade

Usando o Teorema 5.2.1, podemos inferir uma representação gráfica para o espaço de homologia  $H_n(X)$  chamada de “barcodes”. Nesta representação, o eixo horizontal identifica o valor do parâmetro  $\epsilon$  e o eixo vertical identifica o nível da homologia que esta sendo considerado. As

linhas horizontais mostram para quais valores de  $\epsilon$  uma estrutura se inicia e se encerra em um determinado nível da homologia. A Figura 5.3.1a mostra uma representação de “barcodes”.

A representação de “barcodes” tem como virtude mostrar visualmente quais estruturas que são relevantes para um dado espaço  $X$  e quais são apenas ruídos. Desta forma, dada uma nuvem de dados, usando essas ideias é possível identificar  $n$ -ciclos presentes nesta nuvem com mais facilidade.



(a) Um “barcode” para uma certa nuvem de dados

(b) Diagrama de persistência referente a Figura 5.3.1a

Figura 5.3.1: Diagramas de representação da homologia persistente

Porém, existe outra maneira mais elegante de apresentar essas informações, que é através do diagrama de persistência  $DR$  que pode ser visto na Figura 5.3.1b. Neste diagrama, o eixo horizontal representa os valores de  $\epsilon$  para os quais um  $n$ -ciclo se inicia e o eixo vertical os valores de  $\epsilon$  para os quais esses ciclos se encerram. Logo, os pontos que aparecem mais próximos a diagonal representam  $n$ -ciclos que “nascem” e “morrem” mais rapidamente, sendo que os pontos mais distantes da diagonal representam  $n$ -ciclos que persistem por mais tempo na nuvem de dados. Desta forma, temos as mesmas informações fornecidas por um “barcode”, porém de maneira mais concisa e precisa.

**Exemplo 5.3.1.** Considere o espaço dado pela Figura 5.3.2

$$\begin{array}{cc} p_1 \bullet \bullet p_2 & p_6 \bullet \bullet p_5 \\ p_3 \bullet \bullet p_4 & p_8 \bullet \bullet p_7 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} p_{13} \bullet \bullet p_{14} & p_{10} \bullet \bullet p_9 \\ p_{15} \bullet \bullet p_{16} & p_{12} \bullet \bullet p_{11} \end{array}$$

Figura 5.3.2: Espaço discreto considerado para o exemplo de homologia persistente

Nesta figura, os pares de pontos  $p_1$  e  $p_2$ ,  $p_2$  e  $p_4$ ,  $p_4$  e  $p_3$ ,  $p_3$  e  $p_1$  distam uma unidade um do outro, enquanto que os pares de pontos  $p_4$  e  $p_8$ ,  $p_2$  e  $p_6$  distam 98 unidades. Usando a simetria da figura, consideraremos que os pontos análogos a esses respeitam essas mesmas medidas.

Com este espaço, vamos formar uma sequência de complexos de Vietoris-Rips com até o 2-esqueleto, onde o parâmetro  $\epsilon \in \{0, 1, \sqrt{2}, 58, 98\sqrt{9605}, 98\sqrt{2}\}$ . É importante lembrar que sempre que houver arestas ligando três pontos uns aos outros de tal forma que eles formem um triângulo, podemos acrescentar um 2-esqueleto preenchendo a região formada pelo triângulo. Assim, os complexos de Vietoris-Rips formados podem ser vistos nas figuras a seguir:



$\mathcal{C}^1$  com  $\epsilon$  igual a 0



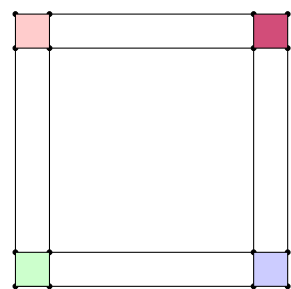
$\mathcal{C}^2$  com  $\epsilon$  igual a 1



$\mathcal{C}^3$  com  $\epsilon$  igual a  $\sqrt{2}$



$\mathcal{C}^4$  com  $\epsilon$  igual a 58



$\mathcal{C}^5$  com  $\epsilon$  igual a 98



$\mathcal{C}^6$  com  $\epsilon$  igual a  $\sqrt{9605}$



$\mathcal{C}^7$  com  $\epsilon$  igual a  $98\sqrt{2}$

Para  $\epsilon = 0$ , temos apenas o 0-esqueleto com 16 componentes conexas por caminho. Logo,  $H_0(\mathcal{C}^1) = \mathbb{K}^{16}$  e  $H_n(\mathcal{C}^1) = 0$  para  $n > 0$ . Para  $\epsilon = 1$  foi acrescentado o 1-esqueleto formando quatro ciclos e quatro componentes conexas por caminho e, portanto, temos que  $H_0(\mathcal{C}^2) = \mathbb{K}^4$ ,  $H_1(\mathcal{C}^2) = \mathbb{K}^4$  e  $H_n(\mathcal{C}^2) = 0$  para  $n > 1$ . Com  $\epsilon = \sqrt{2}$ , as diagonais dos quadrados de lado 1 se formam, gerando o 2-esqueleto. Assim, não temos nenhum ciclo mas temos quatro componentes conexas por caminho, ou seja,  $H_0(\mathcal{C}^3) = \mathbb{K}^4$  e  $H_n(\mathcal{C}^3) = 0$ . O mesmo vale para  $\epsilon = 58$ , implicando que  $H_0(\mathcal{C}^4) = \mathbb{K}^4$  e  $H_n(\mathcal{C}^4) = 0$ . No caso de  $\epsilon = 98$ , são formados retângulos entre os vértices que distam 98 unidades um do outro e, assim, são acrescentadas novas arestas ao 1-esqueleto formando 5 ciclos, fazendo com que o complexo  $\mathcal{C}^5$  tenha apenas um componente conexa por caminhos. Então,  $H_0(\mathcal{C}^5) = \mathbb{K}$ ,  $H_1(\mathcal{C}^5) = \mathbb{K}^5$  e  $H_n(\mathcal{C}^5) = 0$  para  $n > 1$ . Se  $\epsilon = \sqrt{9605}$  então são formadas as diagonais dos retângulos presentes em  $\mathcal{C}^5$ . Logo, é gerado um novo 2-esqueleto, formando um espaço com apenas um ciclo e uma componente conexa por caminhos. Sendo assim,  $H_0(\mathcal{C}^6) = \mathbb{K}$ ,  $H_1(\mathcal{C}^6) = \mathbb{K}$  e  $H_n(\mathcal{C}^6) = 0$  para  $n > 1$ . Por último, temos o complexo formado usando  $\epsilon = 98\sqrt{2}$ . Neste complexo se forma a diagonal do quadrado de lado 98 e, desta forma, é gerado um novo 2-esqueleto, fazendo com que todo o espaço seja preenchido, sendo ele isento de ciclos e com uma componente conexa por caminhos. Logo,  $H_0(\mathcal{C}^7) = \mathbb{K}$  e  $H_n(\mathcal{C}^7) = 0$  para  $n > 0$ .

Com o que foi descrito, podemos fazer o seguinte diagrama de persistência para esta sequência de complexos de Vietoris-Rips:

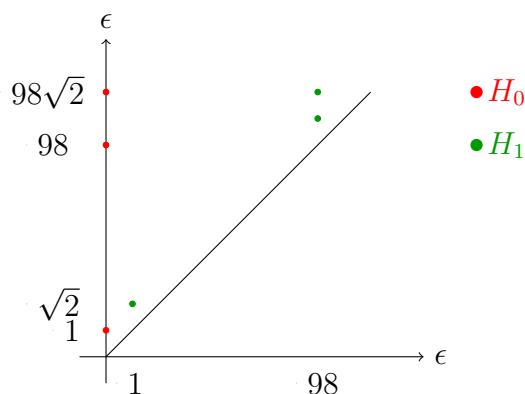


Figura 5.3.3: Diagrama de persistência do espaço mostrado na Figura 5.3.2

Note que alguns pontos estão sobrepostos uns aos outros e, por isso, o diagrama aparenta ter menos pontos do que deveria.

Agora, considere uma situação na qual temos duas filtrações  $\iota_X$  e  $\iota_Y$  nos espaços métricos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  respectivamente. Neste caso, a pergunta que emerge é se os  $n$ -ciclos encontrados usando a filtração  $\iota_X$  no espaço métrico  $(X, d)$  também existiriam se fosse usada a filtração  $\iota_Y$ . Ou seja, essas estruturas independem das filtrações utilizadas, sendo portanto estáveis?

Para responder esta pergunta, considere os espaços métricos compactos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  e a bijeção  $\phi : X \rightarrow Y$ , onde para todo  $x_1, x_2 \in X$ , temos que  $d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ . Tal bijeção é chamada de isometria e dizemos que os espaços métricos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  são isométricos.



**Definição 5.3.1.** *Dados dois diagramas de persistência  $DR_1$  e  $DR_2$ , e o conjunto  $I = \{\phi : DR_1 \rightarrow DR_2 \mid \phi \text{ é uma isometria}\}$ , temos que a distância “bottleneck” é dada por*

$$d_B^\infty(DR_1, DR_2) = \min_{\phi \in I} \max_{p \in DR_1} \|p - \phi(p)\|_\infty \quad (11)$$

sendo  $\|\cdot\|_\infty$  a norma do supremo.

Esta distância pode ser entendida da seguinte maneira: primeiro, para cada  $p \in DR_1$ , tomamos as maiores normas do supremo para  $p - \phi(p)$  dentre todas as isometrias  $\phi$  e, depois disso, escolhemos a isometria  $\phi$  que nos fornece o menor valor da norma dentre as maiores normas encontradas no passo anterior.

**Definição 5.3.2.** *Dados  $X$  e  $Y$  subconjuntos compactos de um espaço métrico  $(Z, d)$ , então a distância de Hausdorff entre  $X$  e  $Y$  é dada por*

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\max_{x \in X} \min_{y \in Y} d(x, y), \max_{y \in Y} \min_{x \in X} d(x, y)\right\} \quad (12)$$

**Definição 5.3.3.** *Dados os espaços métricos compactos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$ , e os conjuntos de todas as isometrias de  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  no espaço métrico  $(Z, d_Z)$  denotados por  $I_X$  e  $I_Y$  respectivamente, então a distância de Gromov-Hausdorff entre estes espaços é definida como*

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \inf_{\substack{\phi_X \in I_X \\ \phi_Y \in I_Y}} d_H(\phi_X(X), \phi_Y(Y)) \quad (13)$$

**Teorema 5.3.1.** [10] *Para quaisquer espaços métricos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$ , e diagramas de persistência dados nestes espaços denotados por  $DR_X$  e  $DR_Y$ , temos que*

$$d_B(DR_X, DR_Y) \leq d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) \quad (14)$$

Neste caso, o Teorema 5.3.1 nos diz que dados dois espaços métricos  $X$  e  $Y$ , a distância entre os diagramas de persistência do espaço  $X$  e do espaço  $Y$  é controlada pela distância entre os espaços métricos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$ . Assim, dadas duas nuvens de dados obtidas de um mesmo objeto, se a distância entre os espaços formados por essas nuvens é pequena, então a distância entre os diagramas destes espaços também será pequena e, desta forma, podemos encontrar características que se mantem em ambos os espaços.

## 6 Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos o conceito de homologia do ponto de vista algébrico e depois o aplicamos a um espaço topológico  $X$  para obter o seu espaço de homologia singular e o seu espaço de homologia de complexos CW (no caso de  $X$  possuir uma estrutura do gênero). De acordo com o Teorema 4.3.3, vimos que dado um espaço topológico  $X$  que admite uma estrutura de complexo CW, as homologias singular e de complexos CW para este espaço são equivalentes. Por último, vimos que esses conceitos podem ser aplicados em uma nuvem de dados gerada por um mapeamento de objetos  $n$ -dimensionais para inferir algumas características estruturais deles, sendo uma possível ferramenta de análise para a ciência de dados.

## Referências

- [1] I.M. James. *History of Topology*. Elsevier Science, 1999. chapter 28.
- [2] J.B. Fraleigh and V.J. Katz. *A first course in abstract algebra*. Addison-Wesley world student series. Addison-Wesley, 2003.
- [3] N. Jacobson. *Basic algebra II*. W.H. Freeman and Company, 1980.
- [4] W. S. Massey. *A basic course in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1991.
- [5] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [6] A. T. Lundell and S. Weingram. *The Topology of CW Complexes*. The University Series in Higher Mathematics. Springer-Verlag New York, 1 edition, 1969.
- [7] G. Carlsson. Topology and data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46(2):255–308, 2009.
- [8] R. Ghrist. Barcodes: The persistent topology of data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45(1), 2009.
- [9] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J Harer. Stability of persistence diagrams. *Discrete computational geometry*, 37(1):103–120, 2007.
- [10] F. Chazal, D. Cohen-Steiner, L. J. Guibas, F. Mémoi, and S. Y. Oudot. Gromov-hausdorff stable signatures for shapes using persistence. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 28(5), 2009.
- [11] A. Zomorodian and G. Carlsson. Computing persistent homology. *Discrete computational geometry*, 33:249–274, 2005.