Trabalho de Conclusão de Curso - Bacharelado em Matemática

Wavelets e Análise Multiresolução: Teorema de Mallat

Denis Araujo Luiz

Universidade Federal do ABC

Título: Wavelets e Análise Multiresolução: Teorema de Mallat

Autor: Denis Araujo Luiz
Orientador: Prof. Dr. Alexei Magalhães Veneziani

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexei Magalhães Veneziani (Presidente)
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Marcus Marrocos
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Cristian Coletti
Universidade Federal do ABC

Santo André, 03 de abril de 2020.

Sumário

À minha mãe, que é a maior guerreira que já conheci e o maior e melhor exemplo de vida que já tive.
Ao meu pai, por tudo aquilo que ele me ensinou.
Ao meu orientador, professor Alexei Magalhães Veneziani, que sempre foi extremamente solícito, por todas as nossas conversas muito produtivas sobre wavelets, Fourier e os mais variados assuntos.
Aos meus amigos, que são muitos, e não quero cometer injustiças, embora sejam os principais realizadores de tudo isso.
Aos professores Cristian, Daniel, Márcio, Marrocos e Fresneda, pela amizade, conversas construtivas, a força e os memes.
À UFABC pela estrutura, pelo acolhimento, pelo ambiente. Ao IMPA e ao CNPQ pela parceria no programa PICME que me concedeu bolsa de Iniciação Científica durante a graduação.

Resumo

Estudamos a teoria de transformadas de Fourier no espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável e, a partir delas, introduzimos a teoria de wavelets.

Partindo de um conceito chamado Análise Multiresolução, mostramos uma forma de obter wavelets e esse é o tema deste trabalho.

Palavras Chaves: Wavelets, Fourier, Análise Multiresolução

Abstract

We study the theory of Fourier transform in the Hilbert space of square-integrable functions and from them we introduce the wavelet theory.

Starting from a concept named Multiresolution Analysis, we show a way to obtain wavelets, which is the main focus of this work.

Keywords: Wavelets, Fourier, Multiresolution Analysis

1 Introdução

"No fim sereis sempre o que sois.
Por mais que os pés sobre altas solas coloqueis,
E useis perucas de milhões de anéis,
Haveis de ser sempre o que sois."
Goethe

Análise *Wavelet* é uma subárea da Análise Harmônica. Aqui, o objeto de estudo são famílias ortonormais densas em $L^2(\Omega)$. Isto é, é estudado um tipo de base de Schauder no espaço vetorial composto das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (ou $f : \Omega \to \mathbb{R}$), cujo a integral de seu módulo ao quadrado é finita.

O termo *wavelet* está associado à função que gera uma base ortonormal a partir de dilatações e translações, ao passo que o termo *wavelets* está associado a uma base de funções com essa propriedade.

A origem do termo *wavelet*, em tradução livre, onda pequena, remete ao trabalho de A. Grossman e J. Morlet [Gross], de 1984. Lá, a ideia é analizar funções em $H^2 \subset L^2(\mathbb{R}, d\gamma)$, o conjunto das funções analíticas tais que a integral do quadrado da função avaliada no círculo centrado na origem de raio r quando r tende a 1 é finita, *ou espaço de Hardy*, que é fechado em $L^2(\mathbb{R}, d\gamma)$, a partir das ações de G_2, o grupo de dilatações e translações, em H^2, onde $d\gamma$ é invariante por G_2. Devido à sua profundidade, não abordaremos as ideias lá empregadas, pois fogem ao escopo deste trabalho.

Ainda que nasça num ambiente muito restrito e abstrato, como em [Gross], *wavelets* se expandem para diversas áreas, sendo usadas substancialmente nas ciências da computação, em particular, em compressão de dados. Nesse área, seu uso se dá principalmente no tratamento de imagens, ao passo que para o tratamento de áudios, seja melhor o uso da teoria de *transformadas de Fourier* [Strang].

Devido à dificuldade de conseguir tais famílias de funções em $L^2(\mathbb{R})$, em 1989, Stephane G. Mallat introduziu o conceito de Análise Multiresolução [Mallat] e a partir daí conseguiu uma forma ainda mais fácil de obter *wavelets*. E é sobre o Teorema de Mallat, introduzido nesse artigo, que se trata este trabalho.

É necessário um *background* de Teoria da Medida para adentrar na teoria das transformadas de Fourier, imprescindível para o trabalho.

Todos os resultados deste capítulo são encontrados em [ADM, Barata].

2.1 Teoria da Medida e Integração

Começamos definindo a estrutura primordial para o estudo da Teoria da Medida.

Definição 2.1 *Dado um conjunto X, dizemos que uma σ-álgebra de X é uma subcoleção do conjunto das partes de X $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(X)$ tal que:*

1. $X \in \mathcal{E}$
2. $\forall E, F \in \mathcal{E} \Rightarrow E \setminus F \in \mathcal{E}$
3. *Para toda sequência* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *resulta* $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{E}$

Observação 2.2 *Sejam X um conjunto, $E \in \mathcal{P}(X)$ e $\mathbb{E} := \{\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X) | \quad E \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}$ é σ-álgebra de $X\}$. Então $\displaystyle\bigcap_{\mathcal{E}\in\mathbb{E}} \mathcal{E} := \sigma(E)$ é uma σ-álgebra.*
Diremos que $\sigma(E)$ é a σ-álgebra gerada por E.

Uma σ-álgebra relevante é aquela que se relaciona com outra grande estrutura matemática, a *topologia*, ambas definidas abaixo.

Definição 2.3 *Seja um conjunto X e τ uma família de conjuntos de X. Diremos que τ define uma topologia em X se valem:*

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. *Dados* $U, V \in \tau$, $U \cap V \in \tau$
3. *Dada qualquer família de índices* Λ *tal que* $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \tau$, *então* $\cup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \tau$.

O par (X, τ) é dito espaço topológico.

Definição 2.4 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que $\sigma(\tau)$ é a σ-álgebra de Borel de (X, τ). Nos casos em que a topologia do conjunto X é explícita, denota-se $\mathcal{B}(X) := \sigma(\tau)$.*

Agora introduzimos o conceito de medida, que é literalmente a forma como medimos no nosso espaço.

Definição 2.5 *Seja X um conjunto, $\mathcal{E}$ uma σ-álgebra de X e $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$. Dizemos que μ é uma medida em $(X, \mathcal{E})$ se:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. *Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ e $m \neq n$ resulta $E_m \cap E_n = \emptyset$, então $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$*

Como a propriedade de medir um espaço é tão importante quanto a própria noção de espaço, diremos que o par $(X, \mathcal{E})$ composto por um conjunto X e uma σ-álgebra $\mathcal{E}$ é um *espaço mensurável*.

Definição 2.6 *Sejam X um conjunto, $\mathcal{E}$ σ-álgebra de X e μ uma medida de $(X, \mathcal{E})$. Dizemos que $A \in \mathcal{E}$ tem medida nula se $\mu(A) = 0$.*

Definição 2.7 *Dados um conjunto X, $\mathcal{E}$ uma σ-álgebra de X e μ uma medida em $(X, \mathcal{E})$, diremos que $(X, \mathcal{E}, \mu)$ é um espaço de medida.*

Agora podemos observar como se relacionam dois espaços de medida, por meio de funções.

Definição 2.8 *Seja $f : X \to Y$, X e Y dois conjuntos não-vazios, $\mathcal{N}$ σ-álgebra de Y. Denotamos por $\sigma(f, \mathcal{N}) := \sigma(\{M \in \mathcal{P}(X) | \quad \exists N \in \mathcal{N} : \forall m \in M, \exists n \in N : f(m) = n\})$ a σ-álgebra pullback de $\mathcal{N}$ via f.*

Definição 2.9 *Sejam $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ dois espaços mensuráveis e $f : X \to Y$. Dizemos que f é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-mensurável se $\sigma(f, \mathcal{N}) \subset \mathcal{M}$.*

Definição 2.10 *Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções mensuráveis em espaços de medida. Diremos que $f = g$ em quase todo ponto, se $\mu\{x \in X | f(x) \neq g(x)\} = 0$. Denotamos duas funções iguais em quase todo ponto por $f(x) = g(x)$ q.t.p. $x \in X$*

A partir daqui, construímos a integral no sentido de Lebesgue.

Definição 2.11 *Seja $f : X \to Y$. Dizemos que f é simples se a imagem de f é um conjunto finito.*

Um dos exemplos mais simples de função simples é a função indicadora do conjunto $A \subset X$, $\chi_A : X \to \{0,1\}$, dada por $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

Definição 2.12 *Seja $s : X \to [0,\infty[$ uma função simples e mensurável, com $s = \sum_{i=1}^{n} s_i \chi_{A_i}$, onde $(X, \mathcal{E}, \mu)$ é um espaço de medida. Denotamos $\forall A \subset X$*

$$\int_A d\mu = \sum_{i}^{n} s_i \mu(A \cap A_i)$$

Chamamos $\int_A s d\mu$ de integral (de Lebesgue) de s com respeito a μ sobre A.

Definição 2.13 *Seja $f : X \to [0,\infty[$ mensurável. Denotaremos para todo $A \in \mathcal{E}$*

$$\int_A f d\mu := \sup\left\{\int_A s d\mu \quad | \quad 0 \le s \le f,\ s \text{ função simples}\right\} \in [0,\infty]$$

Chamamos $\int_A f d\mu$ de integral de f com respeito a μ sobre A.

Generalizamos então o conceito para funções não-necessariamente positivas:

Definição 2.14 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ função mensurável e tome $\forall x \in X$ $f^+(x) := \sup\{0, f(x)\}$ e $f^-(x) := \sup\{0, -f(x)\}$. Denotaremos para todo $A \in \mathcal{E}$, $\int_A f d\mu := \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$, quando no máximo uma das duas integrais for infinita. Chamamos $\int_A f d\mu$ de integral de f com respeito a μ sobre A.*

Os três resultados abaixo são imprescindíveis para o estudo da Teoria da Medida e, por conseguinte, explícita ou implicitamente são usados no desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 2.15 (Convergência Monótona de Lebesgue) *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to [0,+\infty]$ com $f_{n+1} \ge f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$, $f : X \to [0,+\infty]$. Então $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$ quando $n \to +\infty$*

Lema 2.16 (Fatou) *Sejam $f_n : X \to [0,+\infty]$ mensuráveis $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $\int_X \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right) d\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$*

Teorema 2.17 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Sejam $f_n : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis $\forall n \in \mathbb{N}$, tais que $\exists g : X \to [0,\infty]$ cujo $g \in \mathcal{L}(X,\mu)$ e $\forall x \in X$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ resulta que $|f_n(x)| \le g(x)$. Se existe $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Então:*

1. $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$ *quando* $n \to +\infty$

2. *Em particular,* $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

2.2 Espaços L^p

Definição 2.18 *Seja* $(X, \mathcal{E}, \mu)$ *um espaço de medida. Definimos, para* $p > 0$

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{E}, \mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \quad | \quad \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

Definição 2.19 *Sejam* $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{E}, \mu)$. *Dizemos que* $f \sim g \iff \mu(\{x \in X | f(x) \neq g(x)\}) = 0$. *Ainda, definimos, para* $p > 0$:

- $L^p(X, \mathcal{E}, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{E}, \mu) / \sim$

- $\|f\|_{X,\mathcal{E},\mu,p} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$

Por conveniência do contexto, salvo quando mencionado, se $f \in L^p(X, \mathcal{E}, \mu)$, denotaremos $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ e escreveremos apenas $L^p(X)$.

Abaixo, introduzimos o conceito de métrica para então definir as sequências de Cauchy em espaços métricos.

Definição 2.20 *Diremos que uma função* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *é uma métrica se, para quaisquer* $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definição 2.21 *Diremos que uma sequência* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *é de Cauchy se e somente se dado* $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Admitindo o conceito de norma de um número, definimos norma em um espaço vetorial.

Definição 2.22 *Seja* X *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* $\|.\| : X \to [0, \infty)$ *tal que para todos* $x, y, z \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Então $\|.\|$ *é dita norma. Ainda, o par* $(X, \|.\|)$ *é dito espaço normado.*

Note que todo espaço normado $(X, \|.\|)$ é métrico se induzimos a métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.

Aqui, nos restringiremos novamente, já que o conceito de completeza se estende para espaços topológicos, mas o definimos para espaços métricos, já que nossa definição de sequência de Cauchy é restrita a espaços métricos.

Definição 2.23 *Um espaço métrico é dito completo se toda sequência de Cauchy é convergente.*

Definição 2.24 *Um espaço vetorial normado completo é dito espaço de Banach.*

A última noção que precisamos é a de produto interno, onde nos restringiremos mais uma vez, tomando um corpo que trabalharemos.

Definição 2.25 *Seja* X *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *e tome* $< ., . >: X \times X \to \mathbb{K}$ *aplicação tal que para quaisquer* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y, z \in X$:

1. $< x, x > \geq 0$;

2. $< ax + by, z > = a < x, y > + b < y, z >$;

3. $< x, y > = \overline{< y, x >}$, *onde* $\overline{a}$ *é o conjugado complexo de* a, *que atua como identidade em números reais.*

Diremos que $< ., . >$ *é um produto interno em* X.

Definição 2.26 *Um espaço de Banach com norma induzida por um produto interno é dito espaço de Hilbert.*

Por fim, caracterizamos o espaço que estudamos com a última estrutura necessária.

Teorema 2.27 *Os espaços* $(L^p(\mathbb{R}), \|.\|_p)$, *com* $p \geq 1$ *são espaços de Banach.*

A partir daqui, salvo quando dito, o produto interno que consideramos é:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{2.1}$$

Teorema 2.28 *O espaço $L^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert.*

O estudo de wavelets envolve primordialmente o uso da teoria das transformadas de Fourier. Para tanto, revisamos brevemente o conceito de série de Fourier possivelmente visto num curso de Equações Diferenciais Parciais ou Análise de Sinais e introduzimos a transformada de Fourier.

3.1 Transformada de Fourier

Em geral, quando tomamos uma função não necessariamente periódica de quadrado integrável, isto é, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx < \infty$, sua série de Fourier associada pode nem mesmo convergir.

Face a esse problema, dispomos de outros artifícios, como observar o comportamento dos coeficientes da série de Fourier reduzindo-os a uma ideia infinitesimal de variação, podendo, em algum sentido, mapear a função numa outra com domínio também em $\mathbb{R}$, que é a ideia da transformada de Fourier. Em *Classical Fourier Analysis, L. Grafakos*, é possível encontrar uma generalização natural da série para a transformada de Fourier.

Abaixo introduzimos as definições supracitadas de série e transformada de Fourier, onde esclarecemos a ideia.

Definição 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periódica e $f \in L^1([0,1])$. Então, definimos sua série de Fourier como:*

$$S(f) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$$

onde cada a_n é dado por:

$$a_n := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Definição 3.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos sua transformada de Fourier como:*

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Note que nesta notação, $a_n = \hat{f}(n)$.

Analogamente, definimos a transformada de Fourier inversa como $\check{f}(\xi) := \hat{f}(-\xi)$.

Com o artifício da transformada de Fourier, temos então uma ferramenta valiosa, dentre outras utilidades, para o estudo de equações diferenciais, uma vez que podemos nos restringir a soluções em um espaço de funções como $L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, onde a transformada de Fourier funciona bem, conforme veremos no decorrer deste capítulo.

3.2 O espaço de Schwartz

Por ser um espaço de Hilbert, $L^2(\mathbb{R})$ tem um papel de destaque dentre os demais espaços de funções $L^p(\mathbb{R})$, pois produto interno é uma forma eficaz de comparar elementos do mesmo espaço. Contudo, para entender a estrutura desse espaço, tomamos um caso particular, mas suficiente: o espaço de Schwartz.

Definição 3.3 *O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é o conjunto das funções de classe C^∞ tais que elas e suas derivadas têm decrescimento rápido, isto é:*

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^k |f^{(n)}(x)| = 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

Proposição 3.4 *Vale a equação* (3.1) *se e somente se vale:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(n)}(x)| < \infty \quad \forall k, n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Demonstração: Primeiro mostremos que 3.2 implica 3.1 Fixe $k, n \in \mathbb{N}$.
Seja $M_{k,n} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(n)}(x)| \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned} |x|^{k+1} |f^{(n)}(x)| \leq M_{k+1,n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow |x|^k |f^{(n)}(x)| \leq \frac{M_{k,n}}{|x|} \\ \Rightarrow \lim_{|x| \to \infty} |x|^k |f^{(n)}(x)| = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mostremos então que 3.1 implica 3.2. Fixe $k, n \in \mathbb{N}$. Temos:

$$\begin{aligned} &\lim_{|x|\to\infty} |x|^k |f^{(n)}(x)| = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} |f^{(n)}(x)| = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

De 3.4 e do fato de $f \in \mathcal{C}^\infty$, segue que $\exists M_n \in \mathbb{R}_+$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$. Suponha, por absurdo, que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(n)}(x)| = \infty$, então $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} |x|^k |f^{(n)}(x)| = \infty$. Entretanto, temos que:

$$\lim_{x\to a} |x|^k |f^{(n)}(x)| \leq (|a|+1)^k M_n < \infty \tag{3.5}$$

O que é um absurdo. Logo, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(n)}(x)| < \infty$ □

Como corolário direto da proposição anterior, temos uma noção de imensidão do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, explicitada abaixo.

Corolário 3.5 *Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então o produto $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, a translação $\tau_k f(x) := f(x-k)$ para $k \in \mathbb{R}$ é tal que $\tau_k f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todo $k \in \mathbb{R}$, a multiplicação por uma exponencial complexa $M_h f(x) = e^{2\pi i h x} f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todo $h \in \mathbb{R}$ ou por um monômio $x^k f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Uma classe importante de funções de Schwartz são as de suporte compacto.

Definição 3.6 *Uma função f com domínio em $\mathbb{R}$ é dita de suporte compacto se existe intervalo fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ se $x \notin [a,b]$.*

Observe que, da definição anterior, toda função $f \in C^\infty$ de suporte compacto pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposição 3.7 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx := \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(x)dx < \infty$$

Demonstração: Por (3.2), Como $|x^0 f(x)| = |f(x)| \leq M_0 < \infty$ e $|x^2 f(x)| \leq M_2 < \infty$, vale:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \leq \int_{-1}^{1} |M_0|dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |M_2 x^{-2}|dx = 2(|M_0| + |M_2|) < \infty$$

□

Definição 3.8 *A convolução de duas funções $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é a função definida por:*

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Note que a definição anterior está bem-definida por 3.5 e 3.7.

A fim de corroborar com a notação usada em [Pereyra], definimos a dilatação $D_s f(x) := sf(sx)$, a reflexão $\widetilde{f}(x) := f(-x)$ e a já conhecida conjugação $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$.

Denotaremos também por $\hat{f} := (f)^{\wedge}$ a transformada de Fourier e $\check{f} = (f)^{\vee}$ a transformada inversa de Fourier.

3.3 Transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Enunciamos algumas das propriedades mais importantes do espaço de Schwartz na ótica da transformada de Fourier.

Para não sobrecarregar este trabalho, omitiremos a demonstração do teorema 3.9, que tem um caminho em [Pereyra] e também se encontra no relatório final do projeto de iniciação científica que suscitou este trabalho. Assim faremos com os demais teoremas desta seção.

Teorema 3.9 *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $h, s \in \mathbb{R}$. Então valem:*

(a) $(\alpha f + \beta f)^{\wedge}(\xi) = \alpha\hat{f}(\xi) + \beta\hat{g}(\xi)$

(b) $\widehat{\tau_h f}(\xi) = M_{-h}\hat{f}(\xi)$

(c) $\widehat{M_h f}(\xi) = \tau_h\hat{f}(\xi)$

(d) $\widehat{D_s f}(\xi) = sD_{s^{-1}}\hat{f}(\xi)$

(e) $\widehat{\widetilde{f}}(\xi) = \widetilde{\hat{f}}(\xi)$

(f) $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)} = \overline{(f^{\vee})}(\xi)$

(g) $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$

(h) $[-2\pi i\xi x f(x)]^{\wedge}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$

(i) $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

(j) $\widehat{fg}(\xi) = \hat{f} * \hat{g}(\xi)$

A seguir, enunciamos de forma construtiva alguns lemas para mostrar que a imagem da transformada de Fourier no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ está contida no espaço de Schwartz.

Lema 3.10 (Riemman-Lebesgue) *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Lema 3.11 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\hat{f}$ tem decrescimento rápido, tal qual na definição 3.3.*

O teorema abaixo, consequência dos lemas anteriores, é o resultado que enunciamos acima.

Teorema 3.12 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

O resultado do teorema 3.13 nos diz que a transformada de Fourier é um isomorfismo em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.13 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = (\hat{f})^{\vee}(x).$$

Os dois resultados a seguir são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho nas seções posteriores.

Teorema 3.14 (Identidade de Plancherel) *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então*

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

Corolário 3.15 (Identidade de Polarização) *Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então*

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Naturalmente, tudo o que fizemos é válido para $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, entretanto, o último resultado, Teorema 3.16, é a peça que nos permite utilizar todas as ferramentas aqui desenvolvidas para $L^2(\mathbb{R})$. A ideia de sua demonstração é simples e encontra-se em [Barata].

Teorema 3.16 *Para todo $p \in [1, \infty)$, o espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é denso em $L^p(\mathbb{R})$.*

Por meio do Lema da Convergência Dominada de Lebesgue, usando a densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$, temos que todas as propriedades do teorema 3.9 e teoremas posteriores se aplicam a $L^2(\mathbb{R})$.

4 Wavelets

A ideia de wavelets começa em 1909 num apêndice da tese de doutorado de Alfred Haar [Haar], onde ele constrói uma base ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$, que hoje leva o nome de base de Haar. Tamanha simplicidade na definição das funções dessa base se contrasta com a vastidão de aplicações suas que percorrem desde tratamento de imagens [SiKo] a decomposição do movimento browniano [Steele].

Neste capítulo introduzimos wavelets e uma sequência de subespaços de $L^2(\mathbb{R})$ que foi crucial para o desenvolvimento da teoria, pois possibilita obter wavelets de uma maneira simples. Por meio do Teorema de Mallat, no próximo capítulo, faremos a conexão dos dois conceitos.

4.1 Bases Wavelet

A definição de wavelet, no nosso caso em $L^2(\mathbb{R})$, é simples, sobretudo quando pensada em termos de translações e dilatações.

Definição 4.1 *Uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ é dita wavelet se a família*

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \quad \textit{para } j,k \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

forma uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Esta é chamada base wavelet.

Observação 4.2 *Dado o Teorema 3.9, temos que a transformada de Fourier em cada termo de uma base wavelet $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ é:*

$$\widehat{\psi_{j,k}}(\xi) = e^{-2\pi i\xi k}2^{-j/2}\widehat{\psi}(2^{-j}\xi) = e^{-2\pi i\xi k}\widehat{\psi_{-j,0}}(\xi)$$

Da definição de base e de $L^2(\mathbb{R})$ ser espaço de Hilbert, temos uma fórmula de reconstrução de funções $f \in L^2(\mathbb{R})$ a partir de uma wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, apresentada na proposição abaixo.

Proposição 4.3 *Se $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ é uma wavelet, então vale*

$$f(x) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}(x) \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

Exemplo 4.4 *A função $\psi(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2}[}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1[}(x)$ gera uma base wavelet. Ela é conhecida como wavelet de Haar.*

Observando que $\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\chi_{[2^{-j}k,2^{-j}(k+2^{-1})[} - 2^{\frac{j}{2}}\chi_{[2^{-1}(k+2^{-1}),2^{-j}(k+1)[}$, a ortonormalidade da família $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ em $L^2(\mathbb{R})$ segue de um simples cálculo.

Para mostrar que essa família ortonormal é, de fato, uma base para $L^2(\mathbb{R})$, basta observar que para toda função indicadora, existe uma sequência de combinações lineares de wavelets de Haar convergindo para ela. O raciocínio se estende de forma imediata para funções simples e, da definição de integral, segue que para toda função $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe sequência de combinações lineares de wavelets de Haar convergindo para f.

Uma vez que temos a reconstrução de uma função de quadrado integrável por meio de alguns coeficientes obtidos no produto interno, introduzimos a transformada wavelet ortogonal.

Definição 4.5 *A transformada wavelet ortogonal $W : L^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{Z}^2)$, que associa a cada função $f \in L^2(\mathbb{R})$ a sequência de seus coeficientes wavelet, é dada por:*

$$Wf(j,k) := \langle f, \psi_{j,k}\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{j,k}(x)}dx.$$

Podemos, ainda, tomar a transformada wavelet contínua, que foge ao escopo deste trabalho, mas a ideia é que os parâmetros j e k na definição 4.5 não se restrinjam mais aos inteiros. E cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ poderá ser escrita como:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty Wf(s,u)\psi_{s,u}(x)\frac{du ds}{s^2},$$

uma vez que ψ satisfaça a condição de admissibilidade de Calderón [Calderón]:

$$C_\psi := \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi}d\xi < \infty.$$

Essa formula de reconstrução nos remete à fórmula de reprodução de Calderón:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty (\psi_{s,0} * \widetilde{\overline{\psi_{s,0}}} * f)(x) \frac{ds}{s^2}$$

4.2 Análise Multiresolução

Pensemos numa sequência de subespaços encaixantes de $L^2(\mathbb{R})$ tais que entre diferentes subespaços, exista uma propriedade de dilatação em potências de dois, e cada subespaço seja fechado para translações inteiras. Então observamos que tal sequência de espaços tem um indício de fortes similaridades com uma base wavelet.

Abaixo definimos Análise Multiresolução Ortogonal, uma sequência de subespaços encaixantes que goza de propriedades que têm forte similaridade com bases wavelet.

Definição 4.6 *Uma sequência de subespaços fechados $\{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ com função de escala φ é dita Análise Multiresolução Ortogonal se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $V_k \subset V_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$
   $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots;$
2. $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} V_k = \{0\};$
3. $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_k} = L^2(\mathbb{R});$
4. $f(x) \in V_k \iff f(2x) \in V_{k+1};$
5. $\varphi \in V_0$ *e* $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *formam uma base ortonormal para* V_0.

Tais subespaços V_k são chamados subespaços de aproximação.

Devido às propriedades 1 e 5, estamos em condições de anunciar a seguinte proposição.

Exemplo 4.7 *A sequência de espaços* $V_k := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) | \quad \forall j \in \mathbb{Z} : \quad f\chi_{[2^k j, 2^k(j+1)[} \text{ é constante} \right\}$ *forma uma análise de multiresolução, com $\varphi = \chi_{[0,1[}$ função de escala. Tal função φ é dita função de escala de Haar.*

Não à toa, a função de escala de Haar tem grande relação com a wavelet de Haar. E essa relação é exatamente uma consequência imediata do Teorema de Mallat.

Proposição 4.8 *Seja φ a função de escala de uma Análise Multiresolução Ortogonal, então $\{\varphi_{k,j}\}_{k,j\in\mathbb{Z}}$, onde $\varphi_{k,j}(x) := 2^{k/2}\varphi(2^k x - j)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, forma uma base ortonormal para V_k.*

Demonstração: Observemos primeiro que da propriedade 4, temos a equivalência $f(2^k x) \in V_k \iff f(x) \in V_0$ ou $f(x) \in V_k \iff f(2^{-j}x) \in V_0$.

Seja $g(x) \in V_k$, então $g(2^{-j}x) \in V_0$. Por 5,

$$g(2^{-j}x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \varphi(x-j) \qquad \text{onde } g_k \in \mathbb{C}$$

Logo, $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \varphi(2^k x - j)$ □

Definição 4.9 *Dada uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, seja $P_k f$ a projeção ortogonal de f em V_k. Ainda, do fato de $\{\varphi_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ser base ortonormal de V_k, temos:*

$$P_k f(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{k,j}\rangle \varphi_{k,j}(x) \tag{4.2}$$

Proposição 4.10 $(P_k \circ P_{k+1})f = P_k f \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$. *Ainda, $(P_k \circ P_n)f = P_k f$ sempre que $n \geq j$.*

Demonstração: Note que $V_k \subset V_{k+1}$, então $V_{k+1} = V_k \bigoplus W_k$, para algum $W_k \subset V_{k+1}$.
Seja $P_{W_k} f$ a projeção de f no subespaço W_k.
Da definição de projeção, $P_{k+1} f = P_k f + P_{W_k} f$. Logo,

$$\begin{aligned} P_k(P_{k+1} f) &= P_k\left(P_k f + P_{W_k} f\right) \\ &= P_k(P_k f) + \underbrace{P_k\left(P_{W_k} f\right)}_{=\{0\}} \\ &= P_k^2 f \\ &= P_k f \end{aligned}$$

Para mostrar que $(P_k \circ P_n)f = P_k f$ sempre que $n \geq j$, suponha que vale até $m \in \mathbb{N}$,

$(P_k \circ P_{k+m})f = P_k f$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Então:

$$\begin{aligned}(P_k \circ P_{k+m+1})f &= ((P_k \circ P_{k+m}) \circ P_{k+m+1})f \\ &(P_k \circ P_{k+m} \circ P_{k+m+1})f \\ &(P_k \circ (P_{k+m} \circ P_{k+m+1}))f \\ &(P_k \circ (P_{k+m})f \\ &= P_k f\end{aligned}$$

□

Aqui, apresentamos um espaço, de forma conveniente, chamando-o de W_k. Exploraremos algumas de suas propriedades.

Definição 4.11 *Dada uma Análise Multiresolução, definimos o operador diferença Q_j por:*

$$Q_k f = P_{k+1} f - P_k f \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

Definição 4.12 *Seja uma Análise Multiresolução com subespaços de aproximação $\{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, denote por W_k o complemento ortogonal de V_k em V_{k+1}, isto é:*

$$W_k := \{f \in V_{k+1} | \langle f, g\rangle = 0, \forall g \in V_k\}$$

O espaços W_k são ditos espaços de detalhe na escala 2^{-k}. Uma consequência da definição dos espaços W_k e do operador Q_k é dada pelo lema seguinte, que admitiremos sem prova, uma vez que sua sustentação está estabelecida anteriormente e é uma demonstração clássica em um curso de álgebra linear.

Lema 4.13 *O operador diferença Q_k é a projeção ortogonal de $f \in L^2(\mathbb{R})$ em W_k.*

Ainda, temos que dada $f \in V_{k+1}$, $\exists! g \in V_k$, $\exists! h \in W_k$, tais que $f = g + h$, onde $g = P_k f$ e $h = Q_k f$, o que nos permite estabelecer formalmente que $V_{k+1} = V_k \oplus W_k$.

Outro resultado conveniente acerca do entendimento da relação entre Análise Multiresolução e Wavelet segue da proposição:

Proposição 4.14 *Se $n < k$, vale:*

$$V_k = V_n \oplus W_n \oplus W_{n+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \tag{4.3}$$

Donde segue que $j \neq k \Rightarrow W_j \perp W_k$.

Demonstração: Como $V_l = V_{l-1} \oplus W_{l-1}\ \forall l \in \mathbb{Z}$, temos:

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} = (V_{j-2} \oplus W_{j-2}) \oplus W_{j-1} = V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \tag{4.4}$$

Recursivamente, temos:

$$V_j = V_n \oplus W_n \oplus W_{n+1} \oplus \cdots W_{j-2} \oplus W_{j-1} \tag{4.5}$$

Para mostrar que $n \neq k \Rightarrow W_n \perp W_k$, basta tomar, sem perda de generalidade $n < k$, como na decomposição acima o espaço $V_{k+1} = V_n \oplus W_n \oplus \cdots \oplus W_k$. □

Agora estamos aptos a dar uma caracterização ao espaço $L^2(\mathbb{R})$ por meio dos espaços de detalhe de uma dada Análise Multiresolução:

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k} \tag{4.6}$$

Não por acaso definimos os espaços de detalhe utilizando a letra W. Isso se deve porque, como veremos no próximo capítulo, obteremos bases wavelet para cada um deles.

Proposição 4.15 *Vale que $f(x) \in W_0 \iff f(2^k x) \in W_k$.*

Demonstração: Temos que $f(x) \in W_0$ implica $f(x) \in V_1$, logo $f(2^k x) \in V_{k+1} = V_k \oplus W_k$. Como $f(x) \notin V_0$, $f(2^k x) \notin V_k$, portanto $f(2^k \in W_k$. Analogamente, $f(2^k x) \in W_k$ implica $f(2^k x) \in V_{k+1}$, logo $f(x) \in V_1$. Como $f(2^k x) \notin V_k$, $f(x) \notin V_0$, logo $f(x) \in W_0$. □

5 Teorema de Mallat

Encontrar uma função de escala para construir uma Análise Multiresolução pode ser menos trabalhoso que encontrar diretamente uma wavelet. Entretanto, algumas das propriedades desejadas das wavelets, como boa localização no tempo e na frequência, não são vistas nas funções de escala.

Todavia, a noção de Análise Multiresolução surge em 1989 em *Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal bases of* $L^2(\mathbb{R})$, MALLAT, Stephane, como uma alternativa para encontrar wavelets. E esta se dá por meio do teorema central deste trabalho.

Teorema 5.1 (Mallat) *Dada uma Análise Multiresolução ortogonal com função de escala* φ*, existe uma wavelet* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ *tal que para cada* $j \in \mathbb{Z}$*, a família* $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *é uma base ortonormal para* W_j*. Ainda, a família* $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *é uma base ortonormal para* $L^2(\mathbb{R})$*.*

Para demonstrar o teorema de Mallat, provamos antes uma série de lemas.

5.1 Resultados auxiliares

Lema 5.2 *Seja* $f \in L^2(\mathbb{R})$*. A família* $\{f_{0,k} = \tau_k f\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *de translações inteiras de f forma um sistema ortonormal se e somente se vale:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\xi+n)|^2 = 1 \quad q.t.p.\ \xi \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Demonstração: Note que $\langle \tau_k f, \tau_m f\rangle = \langle \tau_{k-m} f, f\rangle$.
De fato,

$$\langle \tau_k f, \tau_m f\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x-k)\overline{f(x-m)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(y+m-k)\overline{f(y)}dy = \langle \tau_{k-m} f, f\rangle \tag{5.2}$$

A condição de ortonormalidade do lema é equivalente a

$$\langle \tau_k f, f \rangle = \delta_k \tag{5.3}$$

onde $\delta_k = 1$ se $k = 0$ e $\delta_k = 0$ se $k \neq 0$.
Mostramos que a transformada de Fourier é uma isometria em $L^2(\mathbb{R})$, portanto, temos:

$$\delta_k = \langle \widehat{\tau_k f}, \hat{f} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i k \xi} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \tag{5.4}$$

Da construção que fizemos para integrais, segue da propriedade σ-aditiva da medida que:

$$\begin{aligned} \delta_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} e^{-2\pi i k n \xi} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-2\pi i k n \gamma} \left|\hat{f}(\gamma+n)\right|^2 d\gamma \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i k \gamma} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(\gamma+n)\right|^2 d\gamma \end{aligned}$$

Essa identidade é equivalente a dizer que a função 1-periódica $F(\gamma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(\gamma+n)\right|^2$ de $L^2(\mathbb{R})$ tem os coeficientes de Fourier na k-ésima fase iguais a 1. Como a transformada de Fourier é um automorfismo em $L^2(\mathbb{R})$ e a função constante 1 tem os mesmos coeficientes de Fourier, $F(\gamma) = 1$ q.t.p., o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Teorema 5.3 *Seja φ uma função escala de uma análise multiresolução ortogonal. Para quase todo ponto $\xi \in \mathbb{R}$, vale:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi+n)|^2 = 1. \tag{5.5}$$

Ainda, existem $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tais que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_k|^2 < \infty$ e:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \varphi(2x-k) \tag{5.6}$$

Demonstração: Pelo Lema 5.2, vale a equação (5.5).
Ainda, $\varphi \in V_0 \subset V_1$ e as funções $\varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2}\varphi(2x-k)$, com $k \in \mathbb{Z}$ formam uma base ortonormal para V_1, pela proposição 4.8. Portanto, φ deve ser uma combinação linear (eventualmente infinita) das funções da base:

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \varphi(2x-k) \tag{5.7}$$

onde $h_k := \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle$.
Ainda, vale que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h_k|^2 = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$ □

Definição 5.4 *Chamamos a equação* (5.6) *de equação de dilatação ou equação de escala. Reescrevemos a equação de dilatação no lado de Fourier como:*

$$\hat{\varphi}(\xi) = H(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2) \tag{5.8}$$

onde $H(\xi) = (1/\sqrt{2})\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i k\xi}$ *é uma função de* $L^2(\mathbb{R})$ *1-periódica, chamada filtro passa-baixo. Os coeficientes* $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *são ditos coeficientes de filtro.*

Outra propriedade importante que esse filtro satisfaz é conhecida como filtro de espelho quadratura ou *quadrature mirror filter* (QMF), como no lema abaixo.

Lema 5.5 *Dada uma análise multiresolução ortogonal com função de escala* φ *e filtro passa baixo correspondente* H*, que assumimos ser um polinômio trigonométrico, temos para todo* $\xi \in \mathbb{R}$*:*

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + 1/2)|^2 = 1 \tag{5.9}$$

Demonstração: Substituindo a equação 5.8 na equação 5.5, obtemos:

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |H((\xi + n)/2)|^2 \, |\hat{\varphi}((\xi + n)/2)|^2 \tag{5.10}$$

Agora, separamos o somatório em inteiros ímpares e inteiros pares, usamos o fato de H ter período 1 para colocá-lo em evidência no somatório e usamos novamente a equação 5.5, que vale para quase todo ponto $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |H(\xi/2)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi/2 + k)|^2 + |H(\xi/2 + 1/2)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}((\xi + 1)/2 + k)|^2 \\ = |H(\xi/2)|^2 + |H(\xi/2 + 1/2)|^2 = 1 \end{aligned}$$

Como assumimos H polinômio trigonométrico, H é contínua e temos que a igualdade é válida em todo $\xi \in \mathbb{R}$. □

5.2 Caracterização de W_0

Podemos caracterizar as funções em W_0, o complemento ortogonal de V_0 em V_1, onde todos os subespaços correspondentes à análise multiresolução ortogonal com função de escala φ e filtro passa baixo H, um polinômio trigonométrico.

Mostramos, usando o mesmo argumento para construir H, que para $f \in V_1$, existe função 1-periódica, $m_f \in L^2([0,1))$, tal que:

$$\hat{f}(\xi) = m_f(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2) \tag{5.11}$$

Nesta notação, temos que $H = m_\varphi$.

As duas proposições seguintes serão usadas no decorrer da demonstração do lema 5.8.

Proposição 5.6 *Se G e H são funções periódicas de período* 1*, então a função F definida abaixo também tem período* 1*.*

$$F(\xi) = G(\xi/2)\overline{H(\xi/2)} + G(\xi/2+1/2)\overline{H(\xi/2+1/2)}$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
F(\xi+1) &= G((\xi+1)/2)\overline{H((\xi+1)/2)} + G((\xi+1)/2+1/2)\overline{H((\xi+1)/2+1/2)} \\
&= G(\xi/2+1/2)\overline{H(\xi/2+1/2)} + G(\xi/2+1)\overline{H(\xi/2+1)} \\
&= G(\xi/2+1/2)\overline{H(\xi/2+1/2)} + G(\xi/2)\overline{H(\xi/2)} = F(\xi)
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.7 *Seja $\lambda(\xi)$ função periódica de período* 1*. Então $\lambda(\xi+1/2) = -\lambda(\xi)$ se e somente se $\lambda(\xi) = e^{2\pi i\xi}\sigma(\xi)$ onde $\sigma(\xi)$ é periódica de período* 1/2*.*

Demonstração: Note que $e^{2\pi i\xi} \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\sigma(\xi)$ está bem-definida. Basta tomá-la como $\sigma(\xi) = e^{-2\pi i\xi}\lambda(\xi)$. Agora temos:

$$\begin{aligned}
\lambda(\xi+1/2) &= e^{2\pi i(\xi+1/2)}\sigma(\xi+1/2) \\
= e^{\pi i}e^{2\pi i\xi}\sigma(\xi+1/2) &= -e^{2\pi i\xi}\sigma(\xi+1/2) \\
&= -\lambda(\xi) \\
\iff \lambda(\xi) &= e^{2\pi i\xi}\sigma(\xi+1/2) \\
\iff \sigma(\xi) &= \sigma(\xi+1/2)
\end{aligned}$$

□

Agora estamos em condições de enunciar e provar o lema seguinte.

Lema 5.8 *Vale que uma função f pertence a W_0 se e somente se existe uma função $v(\xi)$ de período 1 tal que:*

$$\hat{f}(\xi) = e^{\pi i\xi} v(\xi)\overline{H(\xi/2+1/2)}\hat{\varphi}(\xi/2) \tag{5.12}$$

Demonstração: Da construção de W_0, $f \in W_0 \iff f \in V_1$ e $f \perp V_0$. Como observado em 5.11, $f \in V_1$ nos reduz a mostrar que:

$$m_f(\xi) = e^{2\pi i\xi}\sigma(\xi)\overline{H(\xi+1/2)} \tag{5.13}$$

onde $\sigma(\xi)$ é uma função de período 1/2. Portanto $v(\xi) = \sigma(\xi/2)$ tem período 1. Ainda, a ortogonalidade $f \perp V_0$ é equivalente a $\langle f, \varphi_{0,k}\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Usando o fato da transformada de Fourier ser isometria, temos:

$$0 = \langle \hat{f}, \widehat{\varphi_{0,k}}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ik\xi}\overline{\hat{\varphi}(\xi)}d\xi \tag{5.14}$$

Usando 5.11 e 5.8, temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik\xi} m_f(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2)\overline{H(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2)}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik\xi} m_f(\xi/2)\overline{H(\xi/2)}|\hat{\varphi}(\xi/2)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Novamente, usamos a propriedade σ-aditiva da integral e obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} e^{2\pi ik\xi} m_f(\xi/2)\overline{H(\xi/2)}|\hat{\varphi}(\xi/2)|^2 d\xi \\ &= \int_0^1 e^{2\pi ik\xi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_f((\xi+n)/2)\,\overline{H((\xi+n)/2)}|\hat{\varphi}(\xi+n)/2|^2 d\xi \end{aligned}$$

Agora, usando o fato de m_f e H terem periódo 1, separamos o somatório em pares e ímpares, como fizemos anteriormente:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 e^{2\pi ik\xi}[m_f(\xi/2)\overline{H(\xi/2)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}(\xi/2+k)|^2 \\ &+ m_f(\xi/2+1/2)\overline{H(\xi/2+1/2)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}((\xi+1)/2+k)|^2]dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi ik\xi}\left[m_f(\xi/2)\overline{H(\xi/2)} + m_f(\xi/2+1/2)\overline{H(\xi/2+1/2)}\right]dx \end{aligned}$$

Obtemos que a função 1-periódica $F(\xi) = m_f(\xi/2)\overline{H(\xi/2)} + m_f(\xi/2+1/2)\overline{H(\xi/2+1/2)}$ tem todos coeficientes de Fourier nulos. Portanto, $F(\xi) \equiv 0$ q.t.p. $\xi \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$m_f(\xi/2)\overline{H(\xi/2)} + m_f(\xi/2+1/2)\overline{H(\xi/2+1/2)} = 0 \quad \text{q.t.p. } \xi \in \mathbb{R} \tag{5.15}$$

Esta equação é equivalente a dizer que os vetores $\vec{u}(\xi) = (m_f(\xi/2), m_f(\xi/2+1/2))$ e $\vec{v}(\xi) = (H(\xi/2), H(\xi/2+1/2))$ pertencentes a $\mathbb{C}^2$ são ortogonais q.t.p $\xi \in \mathbb{R}$.

Do lema 5.5, temos que a equação 5.15 vale para todo $\xi \in \mathbb{R}$, uma vez que $\|\vec{v}(\xi)\| = 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Como $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$, temos que o complemento ortogonal do espaço gerado por $\vec{u}(\xi)$ tem dimensão 1. Então para caracterizar o espaço gerado por $\vec{u}(\xi)$, basta encontrar um vetor não-nulo ortogonal a $\vec{v}(\xi)$.

Em particular $\vec{w}(\xi) = (-\overline{H(\xi/2+1/2)}, \overline{H(\xi/2)})$ é ortogonal a $\vec{v}(\xi)$. Portanto, vale que $\vec{u} = \lambda(\xi)\vec{w}(\xi)$, para algum $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Assim, concluímos que

$$m_f(\xi) = -\lambda(\xi)\overline{H(\xi+1/2)}, \quad m_f(\xi+1/2) = \lambda(\xi)\overline{H(\xi)}. \tag{5.16}$$

Portanto, a função $\lambda(\xi)$ é de período 1 e é tal que $-\lambda(\xi+1/2) = \lambda(\xi)$. De maneira equivalente, $\lambda(\xi) = e^{2\pi i\xi}\sigma(\xi)$, onde $\sigma(\xi)$ tem período 1/2. Assim, $f \in W_0$ se e somente se

$$m_f(\xi) = e^{2\pi\xi}\sigma(\xi)\overline{H(\xi+1/2)},$$

onde $\sigma(\xi)$ é função de período 1/2, como requerido no início da demonstração. □

Agora usamos todo o ferramentário desenvolvido até aqui para provar o teorema que nomeia esta monografia.

Demonstração do Teorema 5.1:

A função ψ desejada pertence ao subespaço W_0. Portanto, pelo lema 5.8, no lado de Fourier, esta deve satisfazer a equação

$$\hat{\psi}(\xi) = m_\psi(\xi/2)\hat{\psi}(\xi/2),$$

onde

$$m_{\psi}(\xi) = e^{2\pi i\xi}\sigma(\xi)\overline{H(\xi+1/2)} \tag{5.17}$$

e $\sigma(\xi)$ é função de período 1/2. Ainda, do fato das translações inteiras de ψ formarem um sistema ortonormal, aplicamos o Lema 5.2 a ψ e verificamos a propriedade QMF da função 1-periódica m_{ψ}. Isto é, para quase todo ponto $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|m_{\psi}(\xi)|^2 + |m_{\psi}(\xi+1/2)|^2 = 1.$$

Substituindo a equação (5.17) acima, temos, para quase todo $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|\sigma(\xi)|^2|H(\xi+1/2)|^2 + |\sigma(\xi+1/2)|^2|H(\xi)|^2 = 1.$$

Note que $\sigma(\xi)$ tem periódo 1/2 e $H(\xi)$ também goza da propriedade QMF, o que nos faz concluir que $|\sigma(\xi)| = 1$ em quase todo ponto.

Tome uma função de período 1/2 e norma 1, por exemplo, $\sigma(\xi) \equiv 1$. Defina a wavelet no lado de Fourier por

$$\hat{\psi}(\xi) := G(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2),$$

onde G é a função 1-periódica dada por

$$G(\xi) := e^{2\pi i\xi}\overline{H(\xi+1/2)}.$$

Pelo Lema 5.8, $\psi \in W_0$. Da mesma forma, suas translações inteiras também estão em W_0, pois no lado de Fourier

$$\widehat{\psi_{0,k}}(\xi) = e^{-2\pi i k\xi}G(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2),$$

onde nós podemos usar novamente o lema 5.8 em $v(\xi) = e^{-2\pi i k\xi}$, uma função de período 1. Além disso, G satisfaz a propriedade QMF e portanto a família de translações inteiras de ψ é um sistema ortonormal em W_0.

Portanto, nos basta mostrar que essa família gera W_0. Pelo Lema 5.8, se $f \in W_0$, existe função de quadrado integrável $v(\xi)$ de período 1 tal que

$$\hat{f}(\xi) = v(\xi)e^{\pi i\xi}\overline{H(\xi/2+1/2)}\hat{\varphi}(\xi/2) = v(\xi)\hat{\psi}(\xi).$$

Mas $v(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k\xi}$, onde $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty$. Inserindo a expansão trigonométrica de v e usando o fato das modulações no lado de Fourier virem de translações, obtemos

$$\hat{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k\xi}\hat{\psi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \widehat{\psi_{0,k}}(\xi).$$

E, por fim, tomando a transformada de Fourier inversa, temos

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \psi_{0,k}(x).$$

Isto é, f pertence ao fecho do espaço gerado pelas translações inteiras de ψ. As translações inteiras de ψ formam uma base ortonormal em W_0. Pela invariância da escala, as funções $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ formam uma base ortonormal de W_j. Portanto a família $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ forma uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$, como queríamos.

□

5.3 Um exemplo conhecido: Haar

No capítulo anterior, vimos que a função $\varphi = \chi_{[0,1[}$ é função de escala de uma Análise Multiresolução Ortogonal e é chamada de função de escala de Haar.

Observe que $\chi_{[0,1[}(2x-k) = \chi_{[\frac{k}{2},\frac{k}{2}+\frac{1}{2}[}(x)$. Aplicando na equação de dilatação, temos:

$$\chi_{[0,1[} = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \chi_{[\frac{k}{2},\frac{k}{2}+\frac{1}{2}[}. \tag{5.18}$$

Como a maior parte dos coeficientes se anula (pois são funções indicadoras), temos

$$\chi_{[0,1[} = \sqrt{2}\Big(h_0\chi_{[0,\frac{1}{2}[} + h_1\chi_{[\frac{1}{2},1[}\Big), \tag{5.19}$$

obtendo que $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Logo, $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$. Como no Exemplo 4.4, vimos que a wavelet de Haar é dada por $\psi(x) = \chi_{[0,1/2[}(x) - \chi_{[1/2,1[}(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$.

De forma geral, $\varphi(x-k) = \varphi(2x-2k) + \varphi(2x-2k-1)$ ou $\varphi_{0,k} = \varphi_{1,2k} + \varphi_{1,2k+1}$ e, analogamente, $\psi_{0,j} = \varphi_{1,2j} - \varphi_{1,2j+1}$.

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{0,k}, \psi_{0,j} \rangle &= \langle \varphi_{1,2k} + \varphi_{1,2k+1}, \varphi_{1,2j} - \varphi_{1,2j+1} \rangle \\ = \langle \varphi_{1,2k}, \varphi_{1,2j} \rangle + \langle \varphi_{1,2k}, \varphi_{1,2j+1} \rangle + \langle \varphi_{1,2k+1}, \varphi_{1,2j} \rangle &- \langle \varphi_{1,2k+1}, \varphi_{1,2j+1} \rangle \\ &= \delta_{k-j} - \delta_{k-j} = 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Ou seja, mostramos a ortogonalidade das translações inteiras da wavelet de Haar com as translações inteiras da função de escala de Haar. Ou seja, mostramos que a wavelet de Haar de fato gera o espaço wavelet em relação à análise multiresolução ortogonal gerada pela função de escala de Haar.

[ADM] AMBROSIO, L.; DA PRATO, G.; MENNUCCI, A.; *Introduction to Measure Theory and Integration*, Edizioni della Normale, 1 ed., 2011.

[Barata] BARATA, J. C. A.; *Notas para um Curso de Física-Matemática*, versão de 18 de novembro de 2019. `http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html` [Online, acessada em novembro de 2019].

[Calderón] CALDERÓN, A.; *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. v. 24, p. 113-190, 1964.

[CDM] CAVARETTA, A. S.; DAHMEN, W.; MICCHELLI, C. A.;*Stationary Subdivision*, Memoirs of the American Mathematical Society, v. 93, n. 453, 1991.

[Daubechies] DAUBECHIES, I;*Ten Lectures On Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 6 ed., 1999.

[Grafakos] GRAFAKOS, L;*Classical Fourier Analysis*, Springer, 2 ed., 2008.

[Gross] GROSSMANN, A.; MORLET, J.; *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*, SIAM Journal on mathematical analysis, v. 15, n. 4, p. 723-736, 1984.

[Haar] O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E.; *Alfreéd Haar (1885-1993)*, versão de 03 de abril de 2020. `http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Haar.html` [Online, acessada em 03 de abril de 2020].

[HKPT] HÄRDLE, W.; KERKYACHARIAN, G.; PICARD, D.; TSYBAKOV, A.;*Wavelets, Approximation and Statistical Applications*, Seminar Berlin Paris, 2002.

[Kreyszig] KREYSZIG, E.; *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, 1 ed., 1978.

[Mallat] MALLAT, S. G.; *Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of* $L^2(\mathbb{R})$, Transactions of The American Mathematical Society, v. 315, n. 1, 1989.

[Pereyra] PEREYRA, M. C.; WARD, L. A.; *Harmonic analysis: from Fourier to wavelets*, American Mathematical Society, v. 63, 2012.

[SiKo] SILVEIRA, T.; KOZAKEVICIUS, A.; *Transformada wavelet de Haar: conceitos, formulações e aplicações*, Sociedade Brasileira de Matemática, IV CBM, 2016.

[Steele] STEELE, J. M.; *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, 1 ed., 2000.

[Strang] STRANG, G.; *Wavelet Transforms versus Fourier Transforms*, Bulletin of the American Mathematical Society, v. 28, n. 2, p. 288-305, 1993.

[Walnut] WALNUT, D. F; *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhäuser Boston, 1 ed., 2002.