Trabalho de Conclusão de Curso - Bacharelado em Matemática

O Problema de Toronto

Maria Clara Lima Marques do Nascimento

Universidade Federal do ABC

Título: O Problema de Toronto

Autor: Maria Clara Lima Marques do Nascimento
Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Boero

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Boero
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Rodrigo Roque Dias
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Daniel Miranda Machado
Universidade Federal do ABC

Santo André, 10 de dezembro de 2019.

Sumário

Agradecimentos

Se tornar um Bacharel em Matemática é um processo que exige muito estudo e dedicação. O amadurecimento e a responsabilidade foram as duas grandes recompensas pessoais desse processo. Gostaria de agradecer a todos que participaram de alguma forma desta caminhada.

No âmbito pessoal, gostaria de agradecer minha família por todo apoio e por todo o esforço para que eu chegasse até aqui. Um agradecimento em especial ao Fábio, meu namorado, por todas as vezes em que me ajudou, seja com uma palavra amiga ou com uma carona ao fim de uma aula muito cansativa. Aos meus amigos, minha eterna gratidão: o que sou hoje tem muito do que aprendi e vivenciei com vocês. Não me arriscarei a citar nomes para não esquecer ninguém.

Agradeço ao Prof. Dr. William Rea Brian pela receptividade em todas a vezes que o contatei e por me assegurar que poderia continuar expondo minhas dúvidas. Sua humildade é exemplar e me fez admirá-lo ainda mais.

Por fim, agradeço à Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Boero, minha orientadora, por todas as vezes que me corrigiu, me direcionou e por sempre acreditar em mim, até mesmo quando eu não acreditava. Agradeço também todos os professores que passaram por minha vida acadêmica durante esses quatro anos, vocês foram essenciais para a pessoa que me tornei hoje.

Resumo

Um espaço topológico X é dito de Toronto se para todo subespaço Y de X tal que $|Y| = |X|$ tem-se que Y é homeomorfo a X. É consistente com ZFC que todo espaço de Toronto de Hausdorff infinito é discreto. A seguinte questão, contudo, permanece em aberto: a existência de um espaço de Toronto de Hausdorff infinito e não-discreto é consistente com ZFC? Neste trabalho, apresentaremos a classificação dos espaços de Toronto infinitos que não são T_1 e a utilizaremos para mostrar que existem (a menos de homeomorfismo) exatamente cinco espaços de Toronto de cardinalidade $\aleph_0$, sendo que o único de Hausdorff é o discreto. Por fim, apresentaremos algumas propriedades que um espaço de Toronto de Hausdorff e cardinalidade $\aleph_1$ não-discreto deve possuir.

Palavras-chave: espaço de Toronto, problema de Toronto

Abstract

A Toronto space is a topological space X which is homeomorphic to all of its subspaces of the same cardinality as X. It is consistent with ZFC that every infinite Hausdorff Toronto space is discrete. The following question, however, remains open: is the existence of an infinite non-discrete Hausdorff Toronto space consistent with ZFC? In this work, we will present the classification of infinite Toronto spaces that are not T_1 and use it to show that there are (up to homeomorphism) exactly five Toronto spaces of size $\aleph_0$, where all but the discrete one are not Hausdorff. Finally, we will present some properties that a non-discrete Hausdorff Toronto space of size $\aleph_1$ must have.

Keywords: Toronto space, Toronto problem

Introdução

Um espaço topológico X é dito de Toronto se para todo subespaço Y de X tal que $|Y| = |X|$ tem-se que Y é homeomorfo a X.

Note que todo conjunto X munido da topologia discreta é um espaço de Toronto. Contudo, nem todo espaço de Toronto é discreto: um conjunto com pelo menos dois pontos munido da topologia caótica, um conjunto infinito munido da topologia cofinita e um conjunto não enumeravel munido da topologia coenumerável são exemplos de espaços de Toronto que não são discretos. Uma vez que esses não são espaços de Hausdorff, é natural perguntar se existe um espaço de Toronto que seja de Hausdorff e não discreto.

Sabemos que, se X é um espaço de Hausdorff infinito, então X possui um subconjunto discreto infinito e enumerável. Assim, todo espaço de Toronto de Hausdorff infinito e enumerável deve ser discreto. O Problema de Toronto, proposto por J. Steprāns [8] em 1990, pergunta se todo espaço de Toronto de Hausdorff de cardinalidade $\aleph_1$ é discreto. Este problema continua em aberto nos dias atuais e o artigo [1] de W. Brian, nossa principal referência, é um dos mais recentes sobre o assunto.

Um dos propósitos deste TCC é ser uma fonte que reúne boa parte dos resultados conhecidos acerca dos espaços de Toronto, oferecendo àqueles que venham a se interessar pelo assunto um panorama geral dos avanços obtidos até então.

Os conceitos de Topologia Geral e Teoria dos Conjuntos necessários para a compreensão deste texto são apresentados no primeiro capítulo, e qualquer abordagem mais detalhada dos mesmos pode ser encontrada em [3], [9], [5] e [6].

No segundo capítulo exploraremos alguns resultados iniciais a respeito dos espaços de Toronto, incluindo uma demonstração de que é consistente com ZFC que todo espaço de Toronto de Hausdorff infinito é discreto.

No terceiro capítulo apresentaremos a classificação dos espaços de Toronto infinitos que não são T_1 e veremos que existem exatamente cinco espaços de Toronto de cardinalidade $\aleph_0$, sendo que o único de Hausdorff é o discreto. Além disso, mostraremos a existência de pelo menos oito espaços de Toronto de cardinalidade $\aleph_1$, sendo que, novamente, o único de Hausdorff é o discreto.

Por fim, no quarto capítulo exibiremos algumas propriedades que um espaço de Toronto de Hausdorff não discreto de cardinalidade $\aleph_1$ deve possuir.

1 Preliminares

Neste capítulo iremos introduzir os principais conceitos ligados ao texto. Não iremos desenvolver toda a teoria que envolve esses conceitos; nosso intuito tão somente será firmar algumas notações, apresentar algumas definições necessárias para a leitura do texto e enunciar alguns resultados que serão usados adiante. Como um complemento do que será desenvolvido no presente capítulo, sugerimos as referências [9], [3], [5] e [6].

1.1 Teoria dos Conjuntos

Assumiremos ZFC durante todo o texto; e resultados que necessitem de hipóteses adicionais vão ser enunciados de maneira a explicitar esse fato.

Dados dois conjuntos A e B, escrevemos $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Sendo X um conjunto, denotaremos por $\wp(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X.

Sempre que nos referirmos a um conjunto totalmente ordenado, estamos nos referindo à definição abaixo.

Definição 1.1 *Sejam X um conjunto e $R \subseteq X \times X$ uma relação. Dizemos que R é uma* ordem total *(ou que (X, R) é* totalmente ordenado*) se valem:*

- *R é reflexiva;*
- *R é antissimétrica;*
- *R é transitiva;*
- *$\forall x, y \in X((xRy)$ ou $(yRx))$.*

Dizemos ainda que uma relação R é uma *boa ordem* sobre um conjunto X se (X, R) é totalmente ordenado e todo subconjunto não vazio de X possui elemento mínimo. Ainda, se (X, R) é parcialmente ordenado e todo subconjunto não vazio de X possui elemento minímo dizemos que R é uma *boa ordem estrita*.

Um *segmento inicial* de um conjunto totalmente ordenado $(X, \leq)$ é um subconjunto S de X tal que se x pertence a S e $y \leq x$, então y pertence a S.

Um *segmento final* de um conjunto totalmente ordenado $(X, \leq)$ é um subconjunto S de X tal que se x pertence a S e $x \leq y$, então y pertence a S.

Definição 1.2 *Sejam $(X, \leq)$ e $(Y, \preccurlyeq)$ conjuntos totalmente ordenados. Dizemos que eles são* isomorfos *se existe $f : X \to Y$ bijetora tal que:*

$$(a \leq b \Leftrightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)) \forall a, b \in X$$

Neste caso, dizemos que f é um isomorfismo (de ordem) *entre X e Y, e denotamos este fato por $X \approx Y$.*

A seguir iremos definir o que são os números ordinais, e começaremos definindo o que é conjunto transitivo.

Definição 1.3 *Dizemos que um conjunto X é* transitivo *se qualquer elemento de X é subconjunto de X, isto é, se para todo $x \in X$ temos que $x \subseteq X$.*

Definição 1.4 *Um conjunto α é dito um* ordinal *se α é transitivo e bem ordenado pela relação $\in$.*

Um ordinal α é dito:

- um *ordinal sucessor* se, e somente se, existe um ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$, onde $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$.
- um *ordinal limite* se, e somente se, α não é um ordinal sucessor.

Não é difícil demonstrar que, se α e β são ordinais distintos, então α e β não são isomorfos; o leitor pode encontrar esta demonstração em [5].

Observação 1.5 *Todo conjunto bem ordenado X é isomorfo a um único ordinal, ao qual chamaremos de* order type *de X.*

Todas as vezes que invocarmos indução e recursão transfinita, estaremos nos referindo ao que está enunciado abaixo.

Teorema 1.6 (Princípio da Indução Transfinita)*: Seja $P(x)$ uma propriedade que um ordinal x pode ou não satisfazer. Assuma que:*

(i) $P(0)$ vale;

(ii) Se $P(\alpha)$ vale, então vale $P(\alpha + 1)$;

(iii) Para todo ordinal limite $\alpha \neq 0$, se $P(\beta)$ vale para todo $\beta \in \alpha$, então $P(\alpha)$ vale.

Então $P(\alpha)$ vale para todo ordinal α.

Teorema 1.7 (Teorema da Recursão)*: Sejam α um ordinal e X um conjunto não-vazio. Considere $P = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^{\beta}X$ e $F : P \to X$. Então existe uma única $f : \alpha \to X$ tal que para todo $\beta \in \alpha$ vale que $f(\beta) = F(f \restriction_{\beta})$.*

Note que com a recursão transfinita podemos construir objetos matemáticos, como funções e sequências, enquanto a indução nos permite demonstrar propriedades. Sempre que nos referirmos a cardinalidade de um conjunto, ou seja, o tamanho desse conjunto, estaremos nos atendo à definição abaixo.

Definição 1.8 *Seja X um conjunto. Definimos a cardinalidade de X como o menor ordinal α tal que $X \approx \alpha$. Notação: $|X|$.*

Observação 1.9 *Se X é um conjunto, então $|X| < |\wp(X)|$. Este resultado é conhecido como Teorema de Cantor.*

Definição 1.10 *Um ordinal κ é dito um* cardinal *se $\kappa = |X|$ para algum conjunto X.*

Note que, sendo κ um cardinal e $Y \subseteq \kappa$ tal que $|Y| = \kappa$, então Y possui o mesmo *order type* de κ. Note que o *order type* de Y é κ. Como κ é bem ordenado, já que é um cardinal, temos que o *order type* de Y é menor ou igual ao *order type* de κ. Por sua vez, o único ordinal ao qual κ é isomorfo é κ, ou seja, o *order type* de κ é κ, donde temos o resultado.

A proposição abaixo foi utilizada, embora implicitamente, na demonstração de muitos resultados deste trabalho. Ela é muito importante pois muitas vezes foi responsável por nos fornecer subespaços de mesma cardinalidade de um espaço de Toronto X e, consequentemente, homeomorfismos que permitiram demonstrar muitas propriedades dos HATS.

Proposição 1.11 *Sejam X um conjunto e $Y \subseteq X$. Se $|X| = \kappa$ e $|Y| < \kappa$, então $|X \setminus Y| = \kappa$.*

Podemos mostrar que, se X é um conjunto infinito, então $|X \times X| = |X|$. A demonstração deste resultado, apesar de suprimida neste trabalho, pode ser encontrada pelo leitor em [5], ou em qualquer outra referência de Teoria dos Conjuntos.

Lembre-se de que a cardinalidade do conjunto dos números naturais é $\aleph_0$ e nós dizemos que um conjunto C é *enumerável* se existe uma função injetora $f : C \to \mathbb{N}$.

O conjunto do números reais é *não enumerável*, ou seja, não existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ injetora. Isto se dá como consequência do Teorema de Cantor, pois $|\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$. Neste contexto, surgiu a Hipótese do Contínuo, que foi invocada em alguns resultados ao longo do Capítulo 2.

Definição 1.12 *Dizemos que κ é um* cardinal sucessor *se, e somente se, $\kappa = \alpha^+$ para algum α, onde α^+ é o menor cardinal maior que α. E κ é um* cardinal limite *se, e somente se, $\kappa > \omega$ e não é um cardinal sucessor.*

Definição 1.13 *$\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ é definida por indução transfinita em α por:*

(1) $\omega_0 = \omega$.

(2) $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$.

(3) Para γ limite, $\omega_\gamma = \sup\{\omega_\alpha : \alpha < \gamma\}$.

Hipótese 1.14 (Hipótese do Contínuo) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

O enunciado acima é um caso especial da *Hipótese Generalizada do Contínuo*, que diz que para cada ordinal α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

1.2 Topologia

Denotaremos um *espaço topológico* por (X, τ), e quando não houver riscos à interpretação iremos suprimir a topologia representando um espaço topológico apenas por X.

Lembre-se de que os conjuntos *abertos* de um espaço topológico X são aqueles que pertencem a τ.

Sempre que dissermos que uma topologia τ_1 sobre um conjunto X é *menos fina* que uma topologia τ_2 sobre o mesmo conjunto X, entenda que $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é *metrizável* se existe uma métrica d sobre X tal que $\tau = \tau_d$, onde $\tau_d = \{U \subseteq X : \forall x \in U \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B_d(x, \epsilon) \subseteq U\}$, onde $B_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ é uma bola aberta com centro x e raio ϵ.

Definimos a *topologia da ordem* como a topologia associada à relação de ordem em um conjunto.

Definição 1.15 *Seja $(X, <)$ um conjunto ordenado, em que a relação de ordem não precisa ser total. Podemos associar três topologias à essa ordem parcial, definidas por suas sub-bases:*

- *A* topologia da ordem à esquerda, *em que a sub-base é formada pelos conjuntos da forma* $(a, +\infty) = \{x \in X : a < x\}$.

- A topologia da ordem à direita, *em que a sub-base é formada pelos conjuntos da forma* $(-\infty, b) = \{x \in X : x < b\}$.

- A topologia da ordem, *em que a sub-base é formada pelos conjuntos da forma* $(a, +\infty) = \{x \in X : a < x\}$ *e* $(-\infty, b) = \{x \in X : x < b\}$.

Dessa forma, como todo número ordinal é bem ordenado pela relação $\in$, sempre que mencionarmos a topologia da ordem sobre algum ordinal estamos assumindo a definição acima, isto é, a topologia associada à relação $\in$.

Sendo (X, τ) um espaço topológico e $Y \subseteq X$, dizemos que Y é *relativamente discreto* se quando munido com a topologia de subespaço Y é um espaço discreto, ou seja, para cada $y \in Y$ temos que $\{y\}$ é um aberto na topologia de subespaço .

Um conjunto F é *fechado* se $X \setminus F$ é aberto.

Um subconjunto V de um espaço topológico X diz-se uma *vizinhança* do ponto $x \in X$ se existir um aberto U tal que $x \in U \subseteq V$.

Definimos o *fecho* de um subconjunto A de um espaço topológico X como o conjunto $\cap\{F \subseteq X : F$ é fechado em X e $A \subseteq F\}$. Denotamos o fecho de A por $\overline{A}$. Um ponto x pertence a $\overline{A}$ se, e somente se, x é *aderente* a A, ou seja, se para toda vizinhança U de x em X vale que $U \cap A \neq \emptyset$. Se F é um conjunto fechado de X, então $F = \overline{F}$.

Chamaremos os conjuntos de um espaço topológico que são tanto abertos quanto fechados de *clopens*.

Um subconjunto D de X é *denso* em X se $\overline{D} = X$.

Observação 1.16 *Não é difícil demonstrar a seguinte equivalência: D é denso em X se, e somente se, $U \cap D \neq \emptyset$ para todo $U \neq \emptyset$ aberto em X.*

O lema a seguir é utilizado durante algumas demonstrações de alguns resultados da Seção 4.2.

Lema 1.17 *Se Y é um espaço topológico e D é denso em Y, então $D \cap U$ é denso em $\overline{U}$ para qualquer subconjunto aberto U de Y.*

Demonstração: Para todo $x \in \overline{U}$ e para toda vizinhança W de x a intersecção $W \cap U$ é aberta e não vazia. Como D é denso em Y, temos que $W \cap U \cap D \neq \emptyset$, assim temos que $x \in \overline{U \cap D}$. Dessa maneira, vale a inclusão $\overline{U} \subseteq \overline{U \cap D}$. E como a outra inclusão é imediata, temos que $\overline{U} = \overline{U \cap D}$. □

Durante o desenvolvimento deste trabalho, sempre que nos referirmos a um ponto de acumulação estamos nos atendo à definição abaixo.

Definição 1.18 *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Dizemos que $x \in X$ é um* ponto de acumulação *de A se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, ou seja, se toda vizinhança U de x é tal que $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

Note que, sendo X um espaço topológico e $A \subseteq X$, se x é um ponto de acumulação de A, então x é um ponto aderente de A, isto é, $x \in \overline{A}$.

Definição 1.19 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um* ponto isolado *de X se $\{x\}$ é aberto em X.*

A seguir definiremos alguns axiomas de separação, que foram utilizados ao longo do trabalho, além de alguns resultados envolvendo esses axiomas.

Definição 1.20 *Dizemos que um espaço topológico X é T_1 se, para quaisquer $x \in X$ e $y \in X$ distintos, existem $U \subseteq X$ e $V \subseteq X$ abertos tais que $x \in U$, $y \in V$, $x \notin V$ e $y \notin U$.*

Muitas pessoas conhecem a proposição abaixo como a definição de um espaço ser T_1, por este motivo e também pelo fato dela nos permitir uma nova maneira de trabalhar com espaços que satisfazem esta propriedade resolvemos adicioná-la.

Proposição 1.21 *Seja X um espaço topológico. Então X é T_1 se, e somente se, $\{x\}$ é fechado em X, $\forall x \in X$.*

Demonstração: Seja $x \in X$. Vamos mostrar que $\{x\}$ é fechado em X. Para isto, basta mostrar que $X \setminus \{x\}$ é aberto em X. Como X é T_1, para cada $y \in X \setminus \{x\}$ é possível encontrar $V_y \subseteq X$ aberto tal que $y \in V_y$ e $x \notin V_y$. Logo, $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V_y$. Assim, $X \setminus \{x\}$ é aberto em X. Portanto, $\{x\}$ é fechado em X.

Reciprocamente, sejam $x \in X$ e $y \in X$ tais que $x \neq y$. Tome $U = X \setminus \{y\}$ e $V = X \setminus \{x\}$. Temos que U e V são abertos em X tais que $x \in U$, $y \in V$, $x \notin V$ e $y \notin U$. Portanto, como x e y são pontos arbitrários de X, temos que X é T_1. □

Corolário 1.22 *Seja X um espaço topológico T_1. Então, todo subconjunto cofinito de X é aberto em X.*

Definição 1.23 *Dizemos que um espaço topológico X é* de Hausdorff, *ou T_2, se para quaisquer $x \in X$ e $y \in X$ distintos é possível encontrar $U \subseteq X$ e $V \subseteq X$ abertos tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Definição 1.24 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é T_3 se, para cada $x \in X$ e para cada $F \subseteq X$ fechado tais que $x \notin F$, existem $U \subseteq X$ e $V \subseteq X$ abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $F \subseteq V$.*

Definição 1.25 *Dizemos que um espaço topológico X é* regular *se X é T_1 e T_3.*

Observação 1.26 *Não é difícil mostrar que: $regular \to T_2 \to T_1$.*

Proposição 1.27 *Seja X um espaço topológico. Então X é T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$ e para toda vizinhança aberta U de x, existe V vizinhança aberta de x tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demonstração: Sejam $x \in X$ e U vizinhança de x. Considere $G = X \setminus U$. Temos que $G = X \setminus U$ é fechado em X e $x \notin G$. Como X é T_3, existem $V \subseteq X$ e $W \subseteq X$ abertos em X tais que $x \in V$, $G \subseteq W$ e $V \cap W = \emptyset$. Afirmo que $\overline{V} \subseteq U$. De fato, suponha que isto não ocorra. Então existe $y \in \overline{V} \cap G$. Logo, W é vizinhança de y (pois $y \in G$). Mas como $y \in \overline{V}$, temos que $W \cap V = \emptyset$, o que é absurdo. Portanto, $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Reciprocamente, sejam $x \in X$ e $G \subseteq X$ fechado tal que $x \notin G$. Considere $U = X \setminus G$. Temos que U é uma vizinhança de x. Por hipótese, existe V vizinhança de x tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Tome $W = X \setminus \overline{V}$. Temos que Wé aberto em X, $G \subseteq W$ e $W \cap V = \emptyset$. Portanto, X é T_3. □

Definiremos a seguir o que é uma base para um espaço topológico.

Definição 1.28 *Seja (X, τ) um espaço topológico, e seja $\mathfrak{B} \subseteq \tau$. Dizemos que $\mathfrak{B}$ é uma* base *para X se para todo $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ existe $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.*

Proposição 1.29 *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathfrak{B}$ uma base para (X, τ). Valem:*

(B1) *: Para cada $x \in X$ existe $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_x$;*

(B2) *: Dados $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Proposição 1.30 *Seja X um conjunto e seja $\mathfrak{B} \subseteq \wp(X)$ satisfazendo $(B1)$ e (B_2). Temos que $\tau = \{U \subseteq X : \exists \tilde{B} \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $U = \cup_{B \in \tilde{B}} B\}$ é uma topologia sobre X denominada* a topologia gerada pela base $\mathfrak{B}$. *Note que, $\mathfrak{B}$ é uma base para τ.*

A seguir definiremos alguns axiomas de enumerabilidade, que foram utilizados ao longo do trabalho, além de alguns resultados envolvendo esses axiomas.

Definição 1.31 *Seja X um espaço topológico e seja $x \in X$. Uma família $\mathcal{V}_§$ de vizinhanças de x é denominada um* sistema fundamental de vizinhanças (SFV) *de x se, para toda vizinhança U de x, existe $V \in \mathcal{V}_§$ tal que $x \in V \subseteq U$.*

Definição 1.32 *Seja X um espaço topológico. Então:*

- *Dizemos que X satisfaz o* primeiro axioma de enumerabilidade (E_1) *se todo ponto $x \in X$ possui um SFV enumerável.*
- *Dizemos que X satisfaz o* segundo axioma de enumerabilidade (E_2) *se X possui uma base enumerável.*
- *Dizemos que X é* separável, *ou que X* satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade (E_3), *se X possui um subconjunto denso enumerável.*

No que segue iremos definir o que são propriedades topológicas e hereditárias, e iremos explicitar quais dos axiomas, definidos anteriormente, são propriedades hereditárias e/ou topológicas.

Definição 1.33 *Seja X um espaço topológico. Se P é uma propriedade de X tal que todo subespaço S de X também a possui, dizemos que P é uma* propriedade hereditária.

Não é difícil mostrar que T_1, T_2, T_3, E_1 e E_2 são propriedades hereditárias.

Exemplo 1.34 Existe um espaço topólogico X separável que possui um subespaço S que não é separável. De fato, seja X não enumerável e seja $x_0 \in X$. Consideremos $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : x_0 \in U\}$. Temos que τ é uma topologia sobre X e (X, τ) é E_3 pois $\{x_0\}$ é um denso enumerável. Mas se considerarmos $S = X \setminus \{x_0\}$ subespaço de X, temos que a topologia relativa de S coincide com a topologia discreta e como X era não enumeravel, S também o é, donde temos que S não é E_3.

Definição 1.35 *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ uma função e $x_0 \in X$. Dizemos que f é* contínua em x_0 *se para cada vizinhança V de $f(x_0)$ em Y, existe uma vizinhança U de x_0 em X tal que $f[U] \subseteq V$. Dizemos que f é* contínua *se f é contínua em todos os pontos de seu domínio.*

Definição 1.36 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função bijetora. Se f é contínua e sua inversa também é contínua, dizemos que f é um* homeomorfismo, *e que X e Y são homeomorfos.*

Definição 1.37 *Seja P uma propriedade que um espaço topológico pode ou não satisfazer. Dizemos que P é uma* propriedade topológica *se, para quaisquer espaços topológicos X e Y que são homeomorfos, tem-se que X satisfaz P se, e somente se, Y satisfaz P.*

Agora, iremos definir o que são espaços compactos e conexos, explorar alguns resultados envolvendo essas propriedades e discutir se estas são hereditárias e/ou topológicas.

Primeiramente, apresentaremos resultados envolvendo compacidade, e o que for apresentado será utilizado majoritariamente no Capítulo 4 deste trabalho.

Definição 1.38 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é* compacto *se X é de Hausdorff e toda cobertura por abertos de X possui uma subcobertura finita, onde por cobertura de X por abertos deve-se entender uma coleção $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos abertos de X tais que $X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ e por subcobertura deve-se entender que existe $\tilde{A} \subseteq A$ tal que $X = \bigcup_{\alpha\in\tilde{A}} U_\alpha$.*

Definição 1.39 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é* de Lindelöf*, ou que X satisfaz a propriedade de Lindelöf, se X é regular e toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável.*

Definição 1.40 *Uma família de subconjuntos de um espaço topológico é* localmente finita *se todo ponto do espaço admite uma vizinhança aberta que intersecta apenas um número finito de elementos da cobertura.*

Lema 1.41 *Se X é um espaço de Lindelöf, então toda família localmente finita de subconjuntos não vazios de X é enumerável.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ uma família localmente finita de subconjuntos não vazios de X. Para cada $x \in X$ escolha uma vizinhança U_x de x em X que encontra apenas finitos elementos de $\mathcal{A}$. Note que $\{U_x\}_{x\in X}$ é uma cobertura aberta de X; como X é de Lindelöf, existe $\mathcal{U}$ uma subcobertura enumerável de $\{U_x\}_{x\in X}$. Como cada elemento de $\mathcal{A}$ encontra algum $U \in \mathcal{U}$, segue que $\mathcal{A} = \bigcup_{U\in\mathcal{U}}\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$, donde $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$.
□

Definição 1.42 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é* enumeravelmente compacto *se X é de Hausdorff e toda cobertura aberta e enumerável de X possui uma subcobertura finita.*

Um refinamento de uma cobertura de um espaço X é uma nova cobertura do mesmo espaço tal que cada conjunto da nova cobertura é um subconjunto de algum elemento da antiga cobertura.

Definição 1.43 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é* paracompacto *se X é de Hausdorff e toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto localmente finito.*

Observação 1.44 *O Lema 5.1.6 de [3] nos permite concluir que, para toda cobertura aberta $\{U_s\}_{s\in S}$ de um espaço paracompacto existe uma cobertura aberta localmente finita $\{V_s\}_{s\in S}$ tal que $\overline{V_s} \subseteq U_s$ para todo $s \in S$.*

Lema 1.45 *Todo espaço paracompacto com um subespaço denso de Lindelöf é de Lindelöf.*

Demonstração: Sejam X um espaço paracompacto e A um subespaço denso de Lindelöf. Seja $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ uma cobertura aberta de X. Como X é paracompacto existe uma cobertura localmente finita $\{V_s\}_{s\in S}$ de X tal que $\overline{V_s} \subseteq U_s$ para todo $s \in S$. Pelo Lema 1.41, o conjunto $S_0 = \{s \in S : A \cap V_s \neq \emptyset\}$ é enumerável. Como $A = \bigcup_{s\in S_0} A \cap V_s$, temos que

$$X = \overline{A} = \overline{\bigcup_{s\in S_0}(A \cap V_s)} = \bigcup_{s\in S_0}\overline{(A \cap V_s)} \subseteq \bigcup_{s\in S_0}\overline{V_s} \subseteq \bigcup_{s\in S_0} U_s.$$

Assim, $\mathcal{U}$ possui uma subcobertura enumerável. □

Definição 1.46 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que um subconjunto $A \subseteq X$ é* quase denso *se $\overline{A}$ é coenumerável.*

Definição 1.47 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é* localmente compacto *se X é de Hausdorff e todo ponto de X possui um SFV composto de conjuntos compactos.*

Apresentaremos a seguir dois resultados referentes a outra importante propriedade topológica, a conexidade. Esses resultados foram utilizados ao longo do Capítulo 2.

Definição 1.48 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é* desconexo *se existem $U \subseteq X$ e $V \subseteq X$ abertos que satisfazem $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ e $X = U \cup V$. Caso contrário, dizemos que X é* conexo.

Lema 1.49 *Seja X um espaço topológico. Então X é conexo se, e somente se os únicos clopens (conjuntos abertos e fechados) de X são $\emptyset$ e X.*

Proposição 1.50 *Compacidade é uma propriedade topológica.*

Proposição 1.51 *Conexidade é uma propriedade topológica.*

Observação 1.52

- *Compacidade não é hereditária. Note que $[0,1]$ munido da topologia de subespaço de $\mathbb{R}$ é compacto, mas $]0,1[\subseteq [0,1]$ não é compacto.*

- *Conexidade não é hereditária. Note que $\mathbb{R}$ munido da topologia usual é conexo, mas $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ é desconexo.*

2 Espaços de Toronto

Neste capítulo, exploraremos alguns resultados iniciais a respeito dos espaços de Toronto. As principais referências utilizadas foram [7], [4] e, principalmente, [1].

Definição 2.1 *Dizemos que um espaço topológico X é um* espaço de Toronto *se para todo subespaço Y de X tal que $|Y| = |X|$ tem-se que Y é homeomorfo a X.*

Não é difícil notar que qualquer conjunto X munido da topologia discreta é de Toronto: de fato, para cada $Y \subseteq X$, as topologias de subespaço e discreta sobre Y coincidem; assim, se $|Y| = |X|$, então qualquer bijeção entre X e Y é um homeomorfismo. Porém nem todo espaço de Toronto é discreto: um conjunto infinito munido da topologia cofinita (CF) é um exemplo disto: de fato, para cada $Y \subseteq X$, as topologias de subespaço e cofinita sobre Y coincidem; dessa forma, se $|Y| = |X|$, então qualquer bijeção entre X e Y é um homeomorfismo. De maneira análoga, podemos mostrar que qualquer conjunto não enumerável X munido da topologia coenumerável (CC) é de Toronto.

Considerando X um conjunto totalmente ordenado de cardinalidade κ, chamamos de *topologia lower* (LT) e *topologia upper* (UT) sobre X as topologias que posuem como base os conjuntos $\{(-\infty, x] : x \in X\}$ e $\{[x, \infty) : x \in X\}$, respectivamente, onde $(-\infty, x] = \{y \in X : y \leq x\}$ e $[x, \infty) = \{y \in X : x \leq y\}$.

Exemplo 2.2 Se κ é um cardinal então LT sobre κ e UT sobre κ são exemplos de espaços de Toronto. De fato, se $Y \subseteq \kappa$ é tal que $|Y| = \kappa$, então Y possui o mesmo *order type* de κ. Já que um subconjunto de Y será aberto em Y se, e somente se, é um segmento inicial ou final, respectivamente, o isomorfismo de ordem natural entre Y e κ é um homeomorfismo.

Uma vez que os exemplos anteriores não são de Hausdorff, à exceção do discreto, é natural perguntar se existe um espaço de Toronto que seja de Hausdorff e não discreto.

Proposição 2.3 *Se X é um espaço topológico infinito e de Hausdorff, então X possui um subconjunto discreto infinito e enumerável.*

Demonstração: Sejam x e y pontos distintos de X. Como X é de Hausdorff, existem U e V abertos de X tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Note que $y \notin \overline{U}$.

Afirmamos que U ou $X \setminus \overline{U}$ é infinito. De fato, suponhamos que ambos sejam finitos. Dessa maneira, U será fechado pois X é de Hausdorff. Consequentemente, $U = \overline{U}$, e disso temos que $\overline{U}$ é finito. Concluimos então que X poderia ser escrito como a união disjunta de dois conjuntos finitos a saber, $\overline{U}$ e $X \setminus \overline{U}$, e, portanto, X deveria ser finito, o que é uma contradição.

Dessa forma, existem $x_1 \in X$ e V_1 aberto infinito de X tais que $x_1 \notin \overline{V_1}$. Por um processo análogo ao descrito acima, conseguimos um aberto infinito $V_2 \subseteq V_1$ e $x_2 \in V_1$ tais que $x_2 \notin \overline{V_2}$, e assim por diante. Temos então que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é discreto pois para cada $m \in \mathbb{N}$, tem-se que $U_m = (X \setminus \overline{V_m})$ é um aberto tal que $U_m \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_m\}$, infinito e enumerável. $\square$

Corolário 2.4 *Todo espaço de Toronto de Hausdorff de cardinalidade $\aleph_0$ é discreto.*

Demonstração: Seja X um espaço de Toronto de Hausdorff de cardinalidade $\aleph_0$. Da Proposição 2.3 segue que X possui um subconjunto discreto, infinito e enumerável Y. Como $|X| = \aleph_0$ e X é de Toronto, Y é homeomorfo a X. Disso, concluímos que X é discreto. $\square$

Mostramos que, se X é um espaço de Hausdorff infinito, então X possui um subconjunto discreto infinito e enumerável, e disto seguiu que todo espaço de Toronto de Hausdorff de cardinalidade $\aleph_0$ deve ser discreto. Nesse sentido, surge naturalmente o *Problema de Toronto*, enunciado abaixo.

Problema 2.5 (de Toronto) *Todo espaço de Toronto de Hausdorff de cardinalidade $\aleph_1$ é discreto?*

Para qualquer espaço topológico X, podemos definir simultaneamente, por indução transfinita, duas sequências de subconjuntos de X:

$$X^0 = X$$

$$I_\alpha^X = \{x : x \text{ é isolado em } X^\alpha\}$$

$$X^{\alpha+1} = X^\alpha \setminus I_\alpha^X$$

$$X^\alpha = \bigcap_{\beta\in\alpha} X^\beta, \text{ para } \alpha \text{ limite}$$

A sequência $\langle X^\alpha : \alpha \in Ord\rangle$ é uma sequência decrescente de subconjuntos fechados de X, bastando notar que I^X_α é aberto em X^α para cada $\alpha \in Ord$ donde temos que $X^\alpha \setminus I^X_\alpha$ é fechado para cada $\alpha \in Ord$. Como X não é uma classe própria, $\exists\beta$ tal que $X^\gamma = X^\beta$ para todo $\gamma > \beta$, e o menor β para o qual isso ocorre é chamado de *posto de Cantor-Bendixson* de X. Note que X^β, onde β é o posto de Cantor-Bendixson de X, é o maior subconjunto de X que não possui nenhum ponto isolado na topologia de subespaço. De fato, suponha que exista $x \in I^X_\beta$. Como $X^{\beta+1} = X^\beta \setminus I^X_\beta$ temos que $x \notin X^{\beta+1}$. Por outro lado, β é o posto de Cantor-Bendixson de X e, assim, $X^{\beta+1} = X^\beta$, e podemos concluir que X^β é o maior subconjunto de X que não possui pontos isolados na topologia de subespaço.

Definição 2.6 *Um espaço topológico X é dito* disperso *se todo subconjunto não-vazio de X possui um ponto que é isolado naquele subconjunto considerado como um espaço topológico quando munido da topologia de subespaço induzida por X.*

Para X disperso, o posto de Cantor-Bendixson de X será chamado *altura* de X, e será denotado por $\mathrm{ht}(X)$. O supremo das cardinalidades dos I^X_α será chamado de *largura* de X, e será denotado por $\mathrm{wd}(X)$.

Definição 2.7 *Seja X disperso e $x \in X$, o* posto *de x em X, denotado por $\mathrm{rk}^X(x)$, é o menor α tal que $x \notin X^{\alpha+1}$, ou, equivalentemente, o posto de x é o único α tal que $x \in I^X_\alpha$.*

Proposição 2.8 *Seja Y um subespaço de um espaço disperso X. Então Y é disperso e, para todo $x \in Y$, $\mathrm{rk}^Y(x) \leq \mathrm{rk}^X(x)$. Se Y é aberto em X, então $\mathrm{rk}^Y(x) = \mathrm{rk}^X(x)$ para todo $x \in Y$.*

Demonstração: Seja $S \subseteq Y$. Como Y é subespaço de X, temos que $S \subseteq X$. Como X é disperso, existe $x \in S$ tal que x é isolado em S. Como a topologia induzida por X sobre S coincide com a induzida por Y sobre S concluímos que Y é disperso.

Suponha que não é verdade que $\mathrm{rk}^Y(x) \leq \mathrm{rk}^X(x)$ para todo $x \in Y$. Então existe ao menos um ponto em Y tal que seu posto em Y é maior que seu posto em X. Consideremos $x \in Y$ com o menor posto em X que satifaz $\mathrm{rk}^Y(x) > \mathrm{rk}^X(x)$, e denotemos $\mathrm{rk}^X(x) = \alpha$. Como x é isolado em X^α, então existe uma vizinhança U de x em X que contém somente pontos com posto em X estritamente menor que α. Mas $U \cap Y$ é uma vizinhança de x em Y que, pela minimalidade de α, somente intersecta pontos em Y com posto menor que α. Segue disso que x é isolado em Y^α e $\mathrm{rk}^Y(x) \leq \alpha$, uma contradição.

Agora, suponhamos que Y é aberto em X e seja $x \in Y$ tal que $\alpha = \mathrm{rk}^Y(x) < \mathrm{rk}^X(x)$. Como $\mathrm{rk}^Y(x) = \alpha$, existe um aberto $U \subseteq Y$ tal que $U \cap Y^\alpha = \{x\}$. Pela minimalidade de α, temos que $U \cap X^\alpha = \{x\}$. Mas U também é aberto em X, e disto segue que x é isolado em X^α, isto é, $\mathrm{rk}^X(x) = \alpha$. □

No que segue denotaremos por HATS (do inglês *Hausdorff Aleph-one Toronto Space*) os espaços de Toronto de Hausdorff de cardinalidade $\aleph_1$.

Proposição 2.9 *Seja X um HATS não discreto. Então X é um espaço disperso com* $\mathrm{ht}(X) = \omega_1$ *e* $\mathrm{wd}(X) = \omega$.

Demonstração: O conjunto I_0^X dos pontos isolados de X é tal que $|I_0^X| = \aleph_0$. De fato, sejam x e y pontos distintos de X. Existem U_x e U_y abertos em X tais que $x \in U_x$, $y \in U_y$ e $U_x \cap U_y = \emptyset$ pois X é de Hausdorff. Como $X = X \setminus \emptyset = X \setminus (U_x \cap U_y) = (X \setminus U_x) \cup (X \setminus U_y)$, temos que $X \setminus U_x$ ou $X \setminus U_y$ tem a mesma cardinalidade de X. Sem perda de generalidade, suponha $|X \setminus U_x| = |X|$. Então $Y = (X \setminus U_x) \cup \{x\}$ é não enumerável e tem um ponto isolado. Como X é de Toronto, temos que $X \approx Y$. Consequentemente X possui um ponto isolado. Mas o conjunto I_0^X de pontos isolados de X não pode ser finito pois, neste caso, $X \setminus I_0^X$ não possuiria pontos isolados e seria homeomorfo a X. Além disso, I_0^X não pode ser não enumerável pois do contrário X seria discreto. Portanto, $|I_0^X| = \aleph_0$.

Como $X^1 = X \setminus I_0^X$, temos que $X^1 \approx X$ e, ainda, $|I_1^X| = |I_0^{X^1}| = \aleph_0$. De maneira análoga, $X^2 \approx X$ e, portanto, $|I_2^X| = |I_0^{X^2}| = \aleph_0$. Em geral, segue por indução transfinita que se $\alpha < \omega_1$, então $X^\alpha \approx X$ e $|I_\alpha^X| = \aleph_0$: o passo sucessor desta indução é similar ao caso em que $\alpha = 1$, mostrado acima, e quando α é um ordinal limite, $X^\alpha = X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta^X$ é não enumerável e, consequentemente, homeomorfo a X.

Agora, como os I_α^X são dois a dois disjuntos, $Y = \bigcup_{\alpha<\omega_1} I_\alpha^X$ é um subespaço não enumerável de X e, consequentemente, homeomorfo a X. Como Y é um espaço disperso com largura ω e altura ω_1, segue que X também possui estas propriedades.
□

Observação 2.10 *Vimos na demonstração da Proposição 2.9 que um espaço de Toronto infinito e de Hausdorff possui um ponto isolado, não sendo, portanto, conexo. De fato, se X é um espaço nas condições acima, então para cada x isolado em X, temos que $\{x\}$ é um clopen não trivial de X.*

Note que o conjunto dos pontos isolados de um HATS não discreto X é denso em X. De fato, seja U um aberto de X. Queremos mostrar que $U \cap I_0^X \neq \emptyset$. Como X é disperso e U é aberto em X temos que existe $x \in U$ tal que $\mathrm{rk}^X(x) = \mathrm{rk}^U(x) = 0$, isto é, $x \in I_0^X$.

Mostraremos agora que é consistente com ZFC que todo HATS é discreto. Para tanto, iremos precisar de um lema auxiliar, que será demonstrado a seguir.

Lema 2.11 *Se X é um conjunto infinito, então $|Sym(X)| = 2^{|X|}$, onde $Sym(X)$ denota o conjunto de todas as permutações de X, isto é, de todas as bijeções de X em X.*

Demonstração: Primeiramente, note que $|X \times X| = |X|$ e $Sym(X) \subseteq \wp(X \times X)$. Disto segue que $|Sym(X)| \leq |\wp(X \times X)| = 2^{|X \times X|} = 2^{|X|}$.

Temos ainda que $|X \times 2| = |X|$. Logo, X pode ser escrito como a união disjunta de dois conjuntos X_0 e X_1 tais que $|X_0| = |X| = |X_1|$. Consideremos então $f : X_0 \to X_1$ uma bijeção. Para cada $A \subseteq X_0$, defina $\sigma_A \in Sym(X)$ como sendo a bijeção que troca a por $f(a)$, para todo $a \in A$, e fixa os outros elementos de X. Note que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \wp(X_0) &\to Sym(X) \\ A &\mapsto \sigma_A \end{aligned}$$

é injetora. De fato, como $X_0 \cap X_1 = \emptyset$, f não possui pontos fixos. Portanto, nenhum elemento de A é fixo por σ_A. Assim, se $A \neq B$, tome sem perda de generalidade, $x \in B \setminus A$. Tem se que $\sigma_A(x) = x$, mas $\sigma_B(x) \neq x$. Dessa maneira, $\sigma_A \neq \sigma_B$. E, portanto, $|Sym(X)| \geq |\wp(X_0)| = 2^{|X_0|} = 2^{|X|}$. □

Teorema 2.12 *Suponha que exista um HATS não discreto. Então, $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.*

Demonstração: Suponhamos que X seja um HATS não discreto e consideremos

$$S = \{f : f : X \to Y \text{ é um homeomorfismo, } Y \subseteq X \text{ e } I_0^X \subseteq Y\}$$

onde I_0^X denota o conjunto dos pontos isolados de X. Seja Y um subconjunto não enumerável de X que contém I_0^X. Não é difícil perceber que existem $2^{\aleph_1}$ tais conjuntos, bastando notar que $Y = I_0^X \cup A$ onde $A \in \{B \subseteq X : |B| = |X|\}$. Para cada um desses Y temos que $|Y| = \aleph_1$ e como X é de Toronto, cada um desses $2^{\aleph_1}$ subconjuntos de X é homeomorfo a X. Dessa maneira temos que a cardinalidade do conjunto S é ao menos $2^{\aleph_1}$, ou seja, $|S| \geq 2^{\aleph_1}$.

Cada $f \in S$ é um homeomorfismo e, portanto, leva pontos isolados em pontos isolados e pontos não isolados em pontos não isolados. Dessa maneira, $f[I_0^X] = I_0^{f[X]} = I_0^X$. Temos então que f age como uma permutação sobre I_0^X. Além disso, temos que I_0^X é denso em X e X é de Hausdorff, assim f é determinada unicamente pela sua ação em I_0^X. Em outras palavras, cada $f \in S$ é determinada unicamente por permutações de I_0^X. Pelo Lema 2.11 existem $2^{\aleph_0}$ tais permutações. Dessa maneira, $|S| \leq 2^{\aleph_0}$. Como $\aleph_0 \leq \aleph_1$, temos que $2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_1}$. E mostramos que $2^{\aleph_1} \leq |S| \leq 2^{\aleph_0}$ e, portanto, $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$. □

Corolário 2.13 *É consistente com ZFC que todo HATS é discreto.*

Demonstração: Da Hipótese do Contínuo (CH) segue que $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Do Teorema 2.12 decorre que todo HATS é discreto. □

Embora o foco deste trabalho seja apresentar resultados, em sua maioria, sobre os HATS, a proposição a seguir generaliza o Corolário 2.13, mostrando que é consistente com ZFC que todo espaço de Toronto de Hausdorff infinito é discreto.

Proposição 2.14 *Se vale a Hipótese Generalizada do Contínuo (GCH), então qualquer espaço de Toronto de Hausdorff infinito é discreto.*

Demonstração: Sejam κ e λ cardinais infinitos tais que $\kappa < \lambda$. A demonstração de que se existe um espaço de Toronto de Hausdorff infinito e não discreto, então $2^\kappa = 2^\lambda$ utiliza argumentos análogos aos apresentados na Proposição 2.9 e no Teorema 2.12. Mas GCH implica que $2^\kappa < 2^\lambda$. □

3 Espaços de Toronto não Hausdorff

Neste capítulo, iremos abandonar a noção de HATS adotada anteriormente e consideraremos também espaços de Toronto que não são de Hausdorff. O próximo teorema classifica os espaços de Toronto infinitos que não são T_1. Todos os resultados apresentados neste capítulo foram retirados de [1].

Teorema 3.1 *Seja κ um cardinal infinito. Então, a menos de homeomorfismo, existem exatamente três espaços de Toronto de cardinalidade κ que não são T_1: a topologia caótica, UT e LT sobre κ.*

Demonstração: Seja X um espaço de Toronto de cardinalidade κ que não é T_1. Há três casos a considerar: X é caótico, ou X possui um subconjunto aberto de cardinalidade κ diferente de X, ou X possui um subconjunto fechado de cardinalidade κ diferente de X. De fato, se X não é caótico, então existe $U \subseteq X$ aberto tal que $U \neq X$ e $U \neq \emptyset$. Se $|U| = \kappa$, temos o segundo caso. Se $|U| < \kappa$, então $|X \setminus U| = \kappa$, e temos o terceiro caso, já que $X \setminus U$ é fechado.

Mostraremos, primeiramente, que se X possui um subconjunto aberto próprio de cardinalidade κ, então X é homeomorfo a (κ, UT).

Afirmação 3.2 *Existe $x_0 \in X$ tal que $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$ e para qualquer $x \in X$, $x_0 \in \overline{\{x\}}$.*

De fato, seja U um subconjunto aberto de X tal que $|U| = \kappa$ e $U \neq X$. Consideremos então $x \in X \setminus U$ e definamos $Y = \{x\} \cup U$. Temos que $|Y| = \kappa$ e como X é de Toronto, $Y \approx X$. Temos ainda que $\{x\}$ é fechado em Y, e por conta do homeomorfismo existente entre os dois conjuntos, X também possui um subconjunto unitário e fechado. Seja

$$C^X = \{x \in X : \{x\} = \overline{\{x\}}^X\}.$$

Sabemos que $C^X \neq \emptyset$. Além disso, $|C^X| < \kappa$ pois X é um espaço de Toronto de cardinalidade κ que não é T_1.

Agora, seja

$$\tilde{C}^X = \{x \in X : \overline{\{x\}}^X \cap C^X \neq \emptyset\}.$$

Afirmação 3.3 $X = \tilde{C}^X$.

De fato, consideremos $Y = X \setminus \tilde{C}^X$ e suponhamos que $|Y| = \kappa$. Como X é de Toronto, $X \approx Y$ e, portanto, existe ao menos um fechado unitário em Y. Dessa forma, seja $y \in C^Y = \{x \in Y : \{x\} = \overline{\{x\}}^Y\}$. Como $C^Y \subseteq Y$, temos que $y \notin \tilde{C}^X$. Em particular, $y \notin C^X$. Como $y \notin C^X$ e $\overline{\{y\}}^Y = Y \cap \overline{\{y\}}^X$, temos que $\overline{\{y\}}^X \cap \tilde{C}^X \neq \emptyset$. Disto segue que $\overline{\{y\}}^X \cap C^X \neq \emptyset$. E disso segue que $y \in \tilde{C}^X$, uma contradição que veio do fato de supor que $|Y| = \kappa$. Assim, $|Y| < \kappa$ e, consequentemente, $|\tilde{C}^X| = \kappa$. Logo, $\tilde{C}^X \approx X$.

Temos que X e $\tilde{C}^X$ são homeomorfos, porém para concluir que $X = \tilde{C}^X$ necessitamos demonstrar que $C^X = C^{\tilde{C}^X}$ e $\tilde{C}^X = \tilde{C}^{\tilde{C}^X}$. Esta última igualdade nos diz que todo ponto do espaço $\tilde{C}^X$ tem em seu fecho algum ponto que é fechado em $\tilde{C}^X$, e pelo homeomorfismo existente entre os dois espaços, teremos que todo ponto de X tem em seu fecho algum ponto que é fechado em X, ou seja, $X = \tilde{C}^X$. Mostremos então que valem essas igualdades:

- $C^X = C^{\tilde{C}^X}$:
  - $C^X \subseteq C^{\tilde{C}^X}$: Se $x \in C^X$, então $\overline{\{x\}}^X = \{x\}$ e, portanto, $\overline{\{x\}}^{\tilde{C}^X} = \overline{\{x\}}^X \cap \tilde{C}^X = \{x\} \cap \tilde{C}^X = \{x\}$, ou seja, $x \in C^{\tilde{C}^X}$.
  - $C^{\tilde{C}^X} \subseteq C^X$: Se $x \in C^{\tilde{C}^X}$, então $x \in \tilde{C}^X$ e $\overline{\{x\}}^{\tilde{C}^X} = \{x\}$. De $x \in \tilde{C}^X$ segue que $\overline{\{x\}}^X$ intersecta C^X. Como $\overline{\{x\}}^{\tilde{C}^X} = \{x\}$, temos que $x \in C^X$.
- $\tilde{C}^X = \tilde{C}^{\tilde{C}^X}$:
  - $\tilde{C}^X \subseteq \tilde{C}^{\tilde{C}^X}$: Se $x \in \tilde{C}^X$, então $x \in X$ e $\overline{\{x\}}^X \cap C^X \neq \emptyset$. Mas $C^X = C^{\tilde{C}^X}$, o que implica que $\overline{\{x\}}^{\tilde{C}^X} \cap C^{\tilde{C}^X} \neq \emptyset$, e assim, $x \in \tilde{C}^{\tilde{C}^X}$.
  - $\tilde{C}^{\tilde{C}^X} \subseteq \tilde{C}^X$: Se $x \in \tilde{C}^{\tilde{C}^X}$, então $\overline{\{x\}}^{\tilde{C}^X} \cap C^{\tilde{C}^X} \neq \emptyset$. Mas $C^X = C^{\tilde{C}^X}$, o que implica que $\overline{\{x\}}^{\tilde{C}^X} \cap C^X \neq \emptyset$. Por fim, note que $\overline{\{x\}}^{\tilde{C}^X} = \tilde{C}^X \cap \overline{\{x\}}^X$ e como $C^X \subseteq \tilde{C}^X$ temos que $\overline{\{x\}}^{\tilde{C}^X} \cap C^X = \tilde{C}^X \cap \overline{\{x\}}^X \cap C^X = \overline{\{x\}}^X \cap C^X \neq \emptyset$, e segue o resultado.

Isto conclui a demonstração da Afirmação 3.3.

Agora, para cada $x \in C^X$, seja

$$K_x^X = \{y \in X : x \in \overline{\{y\}}^X\}.$$

Suponhamos que exista $x_0 \in C^X$ tal que $|K_{x_0}^X| = \kappa$. Então, $X \approx K_{x_0}^X$. Queremos mostrar que em C^X há um ponto que está no fecho de todo subconjunto unitário de X.

Para tanto, mostraremos que $\{x_0\} = \overline{\{x_0\}}^{K^X_{x_0}}$ e $x_0 \in \overline{\{x\}}^{K^X_{x_0}}$ para todo $x \in K^X_{x_0}$, e pelo homeomorfismo existente entre $K^X_{x_0}$ e X temos o resultado. De fato, como $x_0 \in C^X$ temos que $\{x_0\} = \overline{\{x_0\}}^{K^X_{x_0}}$. Tome $x \in K^X_{x_0}$. Por definição, temos que $x_0 \in \overline{\{x\}}^X$. Mas como $x \in K^X_{x_0}$, temos que $x_0 \in K^X_{x_0} \cap \overline{\{x\}}^X = \overline{\{x\}}^{K^X_{x_0}}$, e neste caso a Afirmação 3.2 está demonstrada.

Suponhamos que para cada $x \in C^X$, $|K^X_x| < \kappa$. Assim, sejam $x \in C^X$ e $Y = (X \setminus K^X_x) \cup \{x\}$. Temos que $|Y| = \kappa$ e, consequentemente, $X \approx Y$. Além disso, $K^Y_x = \{x\}$. Consideremos então

$$C'^X = \{x \in C^X : K^X_x = \{x\}\}.$$

Pelo argumento acima temos que $C'^X \neq \emptyset$. Agora, seja $Y = X \setminus C'^X$. Note que $C'^X \subseteq C^X$, assim $Y \approx X$. E, ainda, $C'^Y = \emptyset$. De fato, seja $y \in Y$ tal que $\{y\}$ é fechado em Y. Note que $\{y\}$ já deveria ser fechado em X, mas $y \notin C'^X$. Então y está no fecho de algum outro ponto de X e, consequentemente, esse ponto não pode ser fechado e portanto não foi retirado quando formamos Y. Assim, y também está no fecho de algum outro ponto de Y, donde temos que $y \notin C'^Y$. Assim, $C'^Y = \emptyset$, o que é uma contradição já que por hipótese $X \approx Y$ e $C'^X \neq \emptyset$. Dessa maneira, existe $x_0 \in C^X$ tal que $|K^X_{x_0}| = \kappa$ (de forma mais geral, para todo $x \in C^X$ vale que $|K^X_x| = \kappa$), e assim concluímos a demonstração da Afirmação 1.

Por fim, queremos mostrar que $C^X = \{x_0\}$. De fato, seja $y \in C^X$. Se $y \in C^X$, então $\overline{\{y\}}^X = \{y\}$. Mas $x_0 \in \overline{\{x\}}^X$ para todo $x \in X$. Em particular, $x_0 \in \overline{\{y\}}^X$, e isso implica que $y = x_0$, ou seja, $C^X = \{x_0\}$. E como $X = \tilde{C}^X$ temos que $X = \{x \in X : x_0 \in \overline{\{x\}}^X\}$.

Agora, usando recursão transfinita, iremos encontrar uma sequência $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ de pontos de X tal que $\{x_{\alpha+1} : \alpha < \kappa\}$ é homeomorfo a (κ, UT). Seja x_0 o único ponto de X tal que $\overline{\{x_0\}}^X = \{x_0\}$. Assumimos que $\langle x_\beta : \beta < \alpha\rangle$ já foi definido (para α sucessor ou limite). Definimos x_α como o único ponto de $X_\alpha = X \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ tal que $\overline{\{x_\alpha\}}^{X_\alpha} = \{x_\alpha\}$ e $x_\alpha \in \overline{\{x\}}^{X_\alpha}$ para todo $x \in X_\alpha$. Note que um tal ponto existe pois $|\{x_\beta : \beta < \alpha\}| = |\alpha| \leq \alpha < \kappa$ e, portanto, $|X_\alpha| = \kappa$, o que implica que $X_\alpha \approx X$. Seja $Y = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Temos que $\overline{\{x_\alpha\}}^Y = \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$ para todo $\alpha < \kappa$. De fato, note que $\overline{\{x_\alpha\}}^Y \subseteq \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$ pois $\overline{\{x_\alpha\}}^X \subseteq \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Reciprocamente, $\{x_\beta : \beta \leq \alpha\} \subseteq \overline{\{x_\alpha\}}^Y$, seja $\beta < \alpha$. Queremos mostrar que $x_\beta \in \overline{\{x_\alpha\}}^Y$. Note que $x_\beta \in \overline{\{x_\alpha\}}^{X_\beta}$, ou seja, toda vizinhança de x_β em X_β contém x_α. Logo, como $x_\alpha \in Y$, toda vizinhança de x_β em Y contém x_α. Portanto, $x_\beta \in \overline{\{x_\alpha\}}^Y$. Considerando $Z = \{x_{\alpha+1} : \alpha < \kappa\}$, podemos concluir que $A \subseteq Z$ é fechado em Z se, e somente se, A é um segmento inicial de Z. De fato, se A é fechado em Z, então $\overline{\{a\}} \subseteq A$ para todo $a \in A$, e isso faz de A um segmento inicial de Z pelo que foi dito anteriormente. Reciprocamente, se A é um segmento inicial de Z, então existe algum $y \in Y$ tal que $A = \overline{\{y\}} \cap Z$, e então A é fechado em Z. Então, Z é homeomorfo a (κ, UT), e $X \approx Z$.

Suponhamos agora, que X possui um fechado não trivial de tamanho κ. No caso anterior, X continha um fechado unitário, e agora X deve conter um aberto unitário. Para $x \in X$, definimos x^o como sendo a intersecção de todos os abertos contendo x; isto imita a ideia de $\overline{\{x\}}$ para conjuntos abertos, com exceção de que x^o não é, em geral, aberto. Como antes, consideramos o conjunto $C^X = \{x \in X : x^o = \{x\}\}$. Temos que $C^X \neq \emptyset$ porque X possui um aberto unitário, e como subespaço de X, C^X é discreto. Consequentemente, $|C^X| < \kappa$ pois do contrário, $C^X \approx X$ e X deveria ser discreto (o que não ocorre pois X não é T_1).

Argumentando de maneira análoga ao caso anterior, é possível mostrar que existe um único $x_0 \in X$ tal que $x_0^o = \{x_0\}$ e $x_0 \in x^o$ para todo $x \in X$. Além disso, $\{x_0\}$ deve ser aberto em X pois X possui um aberto unitário. Usando indução transfinita como antes, obtemos um subconjunto $Y = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de X tal que $A \subseteq Y$ é aberto se, e somente se, A é um segmento inicial de Y. Então, X é homeomorfo a (κ, LT). □

Corolário 3.4 *A menos de homeomorfismo, existem exatamente cinco espaços de Toronto de cardinalidade $\aleph_0$: ω munido da topologia caótica, da topologia discreta, da topologia cofinita, da UT e da LT .*

Demonstração: Seja X um espaço de Toronto de cardinalidade $\aleph_0$, e suponhamos que X é T_1, isto é, que todo subconjunto cofinito de X é aberto em X. Se X possui também um aberto A tal que $X \setminus A$ é infinito, isto é, se topologia sobre X é mais fina (estritamente) que a topologia cofinita sobre X, então, tomando algum $x \in A$, temos que $Y = \{x\} \cup X \setminus A$ é um subespaço infinito de X que contém um clopen unitário. Como X é um espaço de Toronto de cardinalidade $\aleph_0$, temos que Y é homeomorfo a X. Logo, X possui um clopen unitário.

Seja $I = \{x \in X : \{x\}$ é clopen em $X\}$. Note que I é não vazio. Se I fosse finito, então $X \setminus I$ seria um espaço sem clopens unitários homeomorfo a X, o que não ocorre. Sendo I infinito, temos que I é homeomorfo a X e, portanto, X é discreto. Então, se X é T_1, X possui a topologia cofinita ou a topologia discreta. E o resultado segue do Teorema 3.1. □

Para o próximo resultado recordamos que as siglas *CF* e *CC* indicam, respectivamente, a topologia cofinita e a topologia coenumerável sobre ω_1. As siglas *LT* e *UT*, representam, respectivamente, a topologia lower e a topologia upper sobre ω_1. E, por fim, sendo τ e σ duas topologias distintas sobre um conjunto X, $\langle \tau, \sigma \rangle$ representa a topologia gerada por $\tau \cup \sigma$.

Note ainda que se considerarmos ω_1 munido da topologia $\langle LT, CF\rangle$ ou da topologia $\langle UT, CF\rangle$, temos que X é de Toronto.

Observação 3.5 *O leitor pode se perguntar o motivo de não termos considerado acima ω_1 munido de alguma das topologias seguintes: $\langle LT, UT\rangle$, $\langle LT, CC\rangle$, $\langle UT, CC\rangle$ e $\langle CF, CC\rangle$. Basta notar que as duas primeiras da lista são a topologia discreta, e as duas últimas a topologia coenumerável. E X munido de qualquer uma das duas é de Toronto, conforme visto no Capítulo 2.*

Proposição 3.6 *Existem ao menos oito espaços de Toronto de cardinalidade $\aleph_1$: ω_1 munido das topologias caótica, discreta, LT, UT, CF, CC, $\langle LT, CF\rangle$ e $\langle UT, CF\rangle$. A topologia de qualquer HATS é um refinamento de $\langle LT, CF\rangle$, e a topologia de qualquer outro espaço de Toronto de cardinalidade $\aleph_1$ é um refinamento de $\langle LT, CF\rangle$ ou está estritamente entre CF e CC.*

Demonstração: Como visto anteriormente, estes oito espaços são de Toronto.

Vimos que se X é um HATS não discreto, então X é um espaço disperso com $\mathrm{ht}(X) = \omega_1$ e $\mathrm{wd}(X) = \omega$, e que $X^\alpha = \omega_1 \setminus \omega \cdot \alpha$. Temos que todo segmento inicial de ω_1 é aberto e todo subconjunto cofinito de X também é aberto pois X é de Hausdorff. Logo a topologia sobre X refina $\langle LT, CF\rangle$.

Examinando a demonstração da Proposição 2.9, vemos que um espaço de Toronto não discreto X de cardinalidade $\aleph_1$ é um espaço disperso de $\mathrm{ht}(X) = \omega_1$ e $\mathrm{wd}(X) = \omega$ se X contém um clopen unitário. Então, pelo argumento do parágrafo anterior, a topologia de X seria um refinamento de $\langle LT, CF\rangle$. Então, para concluir esta demonstração, é suficiente mostrar que qualquer espaço de Toronto de cardinalidade $\aleph_1$ que não está na nossa lista contém um clopen unitário ou sua topologia está estritamente entre CF e CC.

Suponha que X seja um espaço de Toronto de cardinalidade $\aleph_1$ diferente dos listados acima. Pelo Teorema 3.1, a topologia sobre X refina CF, isto é, X é T_1 (caso contrário, X seria um dos espaços acima). Se a topologia sobre X não é estritamente menos fina que CC, então X contém um subconjunto aberto A não vazio cujo complementar é não enumerável. Sendo $x \in A$ e $Y = \{x\} \cup (X \setminus A)$, temos que $\{x\}$ é um clopen unitário em Y, e Y é homeomorfo a X pois X é de Toronto de cardinalidade $\aleph_1$. $\square$

4 Propriedades dos HATS

No Capítulo 2, apresentamos importantes resultados sobre HATS não discretos, ainda que a consistência de sua existência não tenha sido demonstrada. E nesse sentido, este capítulo será responsável por explorar propriedades que estes espaços devem apresentar caso existam. Mais uma vez, todos os resultados apresentados neste capítulo foram retirados de [1].

No que se segue X denotará um HATS não discreto.

4.1 Axiomas de enumerabilidade e compacidade

Nesta seção apresentaremos alguns resultados envolvendo axiomas de enumerabilidade e compacidade. O Teorema 4.2, principal resultado desta seção, mostrará que $\omega + 1$ não pode ser mergulhado em X, o que nos permite concluir que X não possui sequências não-triviais convergentes.

Proposição 4.1 *X é hereditariamente separável, mas não é de Lindelöf.*

Demonstração: Note que X é hereditariamente sepáravel pois X é separável (I_0^X é denso em X e enumerável) e todo subconjunto de X é homeomorfo a X ou é enumerável.

Agora, mostraremos que a cobertura aberta $\{X \setminus X^\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de X não possui subcobertura enumerável, o que mostra que X não é de Lindelöf. De fato, considere $\{X \setminus X^\alpha : \alpha < \gamma\}$ onde $\gamma < \omega_1$. Da Proposição 2.9 segue que $X = \bigcup_{\alpha<\beta} I_\alpha^X$ onde $\beta = \mathrm{ht}(X) = \omega_1$. Note que $\{X \setminus X^\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é equivalente a $\{I_\alpha^X : \alpha < \omega_1\}$, e portanto $\{X \setminus X^\alpha : \alpha < \gamma\}$ não cobre X pois $\gamma < \omega_1 = \mathrm{ht}(X)$. Assim, X não é de Lindelöf. □

Teorema 4.2 *$\omega + 1$ não pode ser mergulhado em X.*

Demonstração: Suponha que $f : \omega + 1 \to X$ seja um mergulho. Seja

$$\alpha = \sup\{\mathrm{rk}(x) : x \in f[\omega + 1]\}$$

e considere $Y = f[\omega+1] \cup X^{\alpha+1}$. Temos que $f[\omega+1]$ é aberto em Y pois $f[\omega+1] = Y \cap \bigcup_{\beta \leq \alpha} I_\beta^X$ e $\bigcup_{\beta \leq \alpha} I_\beta^X$ é aberto em X. E também $f[\omega+1]$ é fechado em Y, pois é compacto e Y é de Hausdorff. Então $f[\omega+1]$ é um subconjunto clopen de Y que é homeomorfo a $\omega+1$ e, ainda, $f(n) \in I_0^Y$ para cada $n \in \omega$. De fato, basta notar $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$, com $a, b \in \omega+1$, formam uma subbase para o que definimos como topologia da ordem. Dessa forma, $\{n\}$ é aberto para cada $n \in \omega$, já que $\{n\} = (n-1, \infty) \cup (-\infty, n+1)$. Como f é homeomorfismo sobre sua imagem, f leva pontos isolados em pontos isolados. E $f(\omega) \in I_1^Y$, pois $f[\omega+1]$ é uma vizinhança de $f(\omega)$ em Y que possui somente pontos de I_0^Y e $f(\omega)$, donde temos que $\{f(\omega)\} = f[\omega+1] \cap Y^1$, ou seja, $f(\omega) \in I_1^Y$. Como Y é homeomorfo a X, mostramos que algum $x \in I_1^X$ possui uma vizinhança clopen homeomorfa a $\omega+1$.

Agora, iremos mostrar que todo $x \in I_1^X$ possui uma vizinhança clopen homeomorfa a $\omega+1$. Vamos chamar de P a propriedade de ter uma tal vizinhança. Mostramos que ao menos um $x \in I_1^X$ possui a propriedade P. Para cada $x \in I_1^X$ com a propriedade P, escolha uma vizinhança clopen U_x de x tal que $U_x \approx \omega+1$.

Seja

$$A = \{x \in I_1^X : x \text{ possui a propriedade } P\}.$$

Suponha que $\overline{A}$ seja enumerável. Então $Y = X \setminus \overline{A} \approx X$. Seja $x \in I_1^Y$ tal que x possui uma vizinhança clopen U em Y homeomorfa a $\omega+1$. Pelo Lema 2.8, $I_1^Y \subseteq I_1^X$, assim, $x \in I_1^X$. Vista como uma vizinhança de x em X, U é aberta (uma vez que Y é aberto em X) e fechada (pois U é compacta e X é de Hausdorff). Então, x possui a propriedade P e portanto está em A, o que é uma contradição.

Dessa forma, temos que $\overline{A}$ é não enumerável. Seja $Y = I_0^X \cup \overline{A}$. Temos que $I_1^Y = A$. De fato, $I_0^Y = I_0^X$ (note que cada $x \in I_0^X$ é isolado em Y pois $\{x\} = \{x\} \cap Y$ e nenhum outro ponto é isolado em Y pois I_0^X é denso em X e, consequentemente, denso em Y) e, ainda, $Y^1 = Y \setminus I_0^Y = Y \setminus I_0^X = \overline{A}$, assim os pontos de A são isolados em Y^1 (pois são isolados em X^1), e nenhum outro ponto é isolado em Y^1, pois A é denso em Y^1. Se $x \in A = I_1^Y$ e U_x é uma vizinhança clopen de x em X que é homeomorfa a $\omega+1$, então $U_x \cap Y$ é uma vizinhança clopen de x em Y que é homemorfa a $\omega+1$, bastando notar que $U_x \cap Y$ contém infinitos pontos de $I_0^Y = I_0^X$ pois caso contrário x seria isolado em $U_x \cap Y$ e, consequentemente, em X, o que não é verdade. Então todo ponto de I_1^Y possui a propriedade P em Y. Como $Y \approx X$, todo ponto de I_1^X possui a propriedade P.

Seja $x \in I_2^X$. Como $X \approx X^1$, temos que $x \in I_2^X = I_1^{X^1}$ possui uma vizinhança clopen (em X^1) que é homeomorfa a $\omega+1$. Seja U uma vizinhança aberta de x em X tal que $U \cap X^1$ é clopen em X^1 e $U \cap X^1 \approx \omega+1$. Como I_2^X é relativamente discreto e toda

$V \subseteq U$ com $x \in V$ possui a propriedade que $V \cap X^1 \approx \omega + 1$, podemos assumir que $U \cap X^2 = \{x\}$.

Escrevamos $U \cap X^1 = \{x_n : n \in \omega\} \cup \{x\}$ com $x_m \neq x_n$ para m,n $\in \omega$ distintos. Note que a aplicação que leva n para x_n e ω para x é um mergulho de $\omega + 1$. Para cada n, seja U_n uma vizinhança clopen (em X) de x_n que isola x_n em X^1 e é homeomorfa a $\omega + 1$. Seja $V_n = U_n \setminus \bigcup_{m<n} U_m$. Então cada V_n é clopen e homeomorfo a $\omega + 1$ (já que é um subconjunto aberto de U_n que contém o ponto de acumulação) e, além disso, os V_n são dois a dois disjuntos.

Sendo $Y = X \setminus I_1^X \approx X$, então x ($\in I_1^Y$) possui uma vizinhança V' (em Y) que é homeomorfa a $\omega + 1$. Seja V aberto em X tal que $V' = V \cap Y$, e considere $W = U \cap V$.

Caso 1 Para algum $n \in \omega$, $W \cap V_n$ é infinito.

Como V_n é clopen em X, $W \setminus V_n$ é uma vizinhança aberta de x. Em Y, no entanto, toda vizinhança de x possui cofinitos pontos de V', e $W \cap Y \subseteq V'$, contrariando o fato de que $W \cap Y \setminus V_n$ é uma vizinhança aberta de x em Y.

Caso 2 $W \cap V_n$ é finito para todo $n \in \omega$.

Como W é uma vizinhança de x, W deve conter algum x_n (já que x é ponto de acumulação). Mas W também é uma vizinhança de x_n, e qualquer vizinhança de x_n contém cofinitos pontos de V_n, uma contradição.

□

Corolário 4.3 *X não é E_1. De fato, nenhum ponto de acumulação de X possui um SFV enumerável.*

Demonstração: Seja x um ponto de acumulação de X, e seja $\{U_n : n \in \omega\}$ um SFV enumerável de x. Como X é não enumerável, podemos escolher $x_1 \in X$ tal que $x_1 \neq x$. E, sendo X um espaço de Hausdorff, existe V_1 uma vizinhança de x tal que $x_1 \notin \overline{V_1}$. Não podemos garantir que o aberto V_1 pertence ao SFV de x. Dessa maneira, tomamos agora $x_2 \in U_1 \cap V_1 \setminus \{x\}$. Novamente, como X é um espaço de Hausdorff, existe V_2 uma vizinhança de x tal que $x_2 \notin \overline{V_2}$ e $V_2 \subseteq U_1 \cap V_1$. Agora, seja $x_3 \in U_2 \cap V_2 \setminus \{x\}$, e seguimos o processo de maneira análoga. Note que $U_2 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap V_1$, e assim sucessivamente. Por essa construção, temos que $\{V_n \cap U_n : n \in \omega\}$ é um SFV de x, e note ainda que este novo SFV foi construído com o intuito de isolar cada x_n.

Definiremos agora o conjunto $A = \{x_n : n \in \omega\} \cup \{x\}$. Temos que $|A| = \aleph_0$, pois para $m \neq n$ temos que $x_m \neq x_n$ e $x_n \neq x$, para todo $n \in \omega$. Agora, temos que $\{x_n\} =$

$(V_{n-1} \setminus \overline{V_n}) \cap A$, donde temos que $\{x_n\}$ é aberto em A pela topologia de subespaço. Seja W uma vizinhança de x, então existe $n \in \omega$ tal que $U_n \cap V_n \subseteq W$, e dessa forma $x_{n+1} \in W \cap A$, donde temos que $\{x\}$ não é aberto em A, ou seja, x não é isolado em A. Temos ainda que A é de Hausdorff (por hereditariedade), é compacto (já que toda vizinhança de x em X contém um aberto da forma $V_n \cap U_n$ para algum $n \in \omega$), e $x_{n+1} \in V_m \cap U_m$ para todo $m \geq n$. E, portanto, fora dessa vizinhança sobra apenas um número finito de x_n. Assim, temos que $A \subseteq X$ é homeomorfo a $\omega + 1$, contradizendo o Teorema 4.2. A contradição foi gerada pelo fato de supor que x possui um SFV enumerável. □

Observação 4.4 *Uma das consequências diretas do Corolário 4.3 é que X não é E_2 ou metrizável.*

Corolário 4.5 *X é anti-compacto, isto é, todo subconjunto compacto de X é finito.*

Demonstração: Suponhamos que K seja um subconjunto compacto de X infinito. Note que, por hereditariedade, K é um espaço disperso e de Hausdorff. Se $K = I_0^K$, então K seria um espaço discreto infinito, e portanto não seria compacto. Dessa maneira, existem pontos em I_1^K. Seja $x \in I_1^K$ e seja H uma vizinhança compacta de x em K tal que $H \cap K^1 = \{x\}$. Uma tal vizinhança existe, pois K é localmente compacto (K é compacto e de Hausdorff). Note que H deve conter infinitos pontos de I_0^K pois caso contrário x seria isolado em H e, consequentemente, em K. Além disso, I_0^K é enumerável, já que é um subconjunto discreto de X. Então, H é um espaço de Hausdorff, compacto e enumerável, constituído somente por pontos isolados com exceção de um único ponto de acumulação. Assim, H é homeomorfo a $\omega + 1$, contradizendo o Teorema 4.2. □

Corolário 4.6 *X não é localmente compacto.*

Demonstração: Como X é um HATS não discreto, temos que $|I_0^X| = \aleph_0$ e, portanto, $X^1 \neq \emptyset$. Fixe $x \in X^1$. Temos que toda vizinhança de x em X é infinita. Logo, pelo Corolário 4.5, x não possui vizinhança compacta. Portanto, X não é localmente compacto. □

Proposição 4.7 *X não é paracompacto.*

Demonstração: Já mostramos que X é separável, mas não é de Lindelöf. Assim, basta aplicar o Lema 1.45 acima, usando o fato de que todo conjunto enumerável é de Lindelöf. □

Proposição 4.8 *Se X é enumeravelmente compacto, então todo subconjunto infinito A de X é quase denso, isto é, $\overline{A}$ é coenumerável.*

Demonstração: Suponhamos que X seja enumeravelmente compacto e seja $A \subseteq X$ infinito. Temos que $\overline{A}$ é disperso e então possui um subespaço relativamente discreto $I_0^{\overline{A}}$. Temos que $I_0^{\overline{A}}$ é denso em $\overline{A}$ e $I_0^{\overline{A}} \subseteq A$. De fato, seja $x \in I_0^{\overline{A}}$. Então existe um subconjunto aberto U de X tal que $U \cap \overline{A} = \{x\}$. Como $x \in \overline{A}$ e U é uma vizinhança de x, temos que $U \cap A \neq \emptyset$. Se $x \notin A$, então existe $y \neq x$ tal que $y \in U \cap A$. Logo, $y \in U \cap \overline{A}$, o que é uma contradição visto que $U \cap \overline{A} = \{x\}$. Dessa maneira, $x \in A$.

Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que A é relativamente discreto. Assim, se $\overline{A}$ não é coenumerável, temos que $Y = (X \setminus \overline{A}) \cup A$ é homeomorfo a X. Mas Y não é enumeravelmente compacto, já que A é infinito e não possui ponto de acumulação em Y. □

Corolário 4.9 *Se X é enumeravelmente compacto, então todo subconjunto aberto de X é enumerável ou cofinito.*

Demonstração: Seja U um subconjunto aberto de X que não é cofinito. Dessa forma, $X \setminus U$ é infinito. Como X é enumeravelmente compacto, então $X \setminus U$ é quase denso, ou seja, $X \setminus U = \overline{X \setminus U}$ é coenumerável, o que mostra que U é enumerável. □

Proposição 4.10 *Se X é regular, então X não é enumeravelmente compacto.*

Demonstração: Seja $x \in I_1^X$ e seja U uma vizinhança de x em X que o isola em X^1 (isto é, $U \cap X^1 = \{x\}$). Como X é regular existe V vizinhança aberta de x em X tal que $\overline{V} \subseteq U$. Seja $Y = X \setminus \{x\}$. Então Y é homeomorfo a X, mas Y não é enumeravelmente compacto, já que $V \cap Y$ é um subconjunto infinito de Y que não possui pontos de acumulação. De fato, seja $y \in Y$ tal que $y \in \overline{V}$. Vamos mostrar que $y \in I_0^Y$. Como Y é aberto em X, temos que $I_0^Y = I_0^X \cap Y$. Assim, se $y \notin I_0^Y$, então $y \notin I_0^X$, logo $y \in X^1$. Como $y \in \overline{V}$ e $\overline{V} \subseteq U$, então $y \in U$. Portanto, $y \in U \cap X^1 = \{x\}$, o que é um absurdo já que $y \in Y = X \setminus \{x\}$. Logo, $y \in I_0^Y$, o que é suficiente para concluir que y não é ponto de acumulação de $V \cap Y$. □

4.2 Não regularidade

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados envolvendo regularidade de um HATS não discreto. O Teorema 4.12, que mostra que, se um HATS não discreto não é regular, então ele deve estar em conformidade com um dos dois tipos bem específicos apresentados no enunciado, será o principal resultado dessa seção. Contudo, necessitamos de três definições, apresentadas a seguir, para conseguir enunciar corretamente este teorema.

Definição 4.11 *Seja X um espaço topológico.*

- *Dizemos que $x \in X$ é um* ponto regular *de X se toda vizinhança aberta de x contém uma vizinhança fechada de x; caso contrário, dizemos que x é um* ponto irregular *de X.*

- *Dizemos que $x \in X$ é um* ponto fortemente irregular *de X se toda vizinhança de x é quase densa em X, ou seja, se U é uma vizinhança de x em X, então $\overline{U}$ é coenumerável.*

- *Dizemos que $x \in X$ é um* ponto fracamente irregular *de X se x é um ponto irregular de X, mas possui uma vizinhança cujo fecho está contido em $\bigcup_{\alpha \leq rk(x)} I_\alpha^X$.*

Teorema 4.12 *Se X é um HATS não discreto, então vale uma das seguintes afirmações:*

(1) X é regular.

(2) Existe um fechado infinito $R \subseteq I_1^X$ tal que todo $x \in R$ é um ponto regular de X, e qualquer outro ponto de acumulação de X é fracamente irregular.

(3) Todo ponto de acumulação de X é fortemente irregular.

Chegaremos à demonstração deste resultado após uma sequência de lemas. Os Lemas 4.14, 4.15 e 4.16 serão responsáveis por provar quase todas as afirmações contidas nos dois últimos itens do enunciado acima, exceto o fato de que R é fechado, que será demonstrado no Lema 4.17, e o fato de que $R \subseteq I_1^X$, que será demonstrado no Lema 4.18.

Lema 4.13 *Sejam Y um espaço topológico e $Z \subseteq Y$. Se $x \in Z \subseteq Y$ é um ponto regular de Y, então x é um ponto regular de Z. Em outras palavras, regularidade em um ponto é uma propriedade hereditária.*

Demonstração: Seja $x \in Z \subseteq Y$. Suponhamos que x seja um ponto regular de Y, e vamos mostrar que x é um ponto regular de Z. Para isto, seja U uma vizinhança aberta de x em Z. Então $U = \tilde{U} \cap Z$, onde $\tilde{U}$ é aberto em Y. Como x é um ponto regular de Y existe $\tilde{V}$ vizinhança fechada de x em Y tal que $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$. Logo, $\tilde{V} \cap Z$ é uma vizinhança fechada de x em Z tal que $\tilde{V} \cap Z \subseteq \tilde{U} \cap Z = U$. Portanto, x é um ponto regular de Z. □

Lema 4.14 *Se X contém um ponto irregular que não é fracamente irregular, então todo ponto de acumulação de X é fortemente irregular.*

Demonstração: Suponha que X possua um ponto irregular x que não é fracamente irregular. Seja $\alpha = \mathrm{rk}^X(x) > 0$ e considere $Y = X \setminus (\bigcup_{1\leq\beta<\alpha} I_\beta^X) \approx X$. Como $I_0^X \subseteq Y$ e I_0^X é denso em X para qualquer vizinhança U de x em X, segue que $\overline{U}^X = \overline{U \cap I_0^X}^X$, ou seja, toda vizinhança aberta de x em X intersecta $U \cap I_0^X$, o que também é válido para Y. Dessa maneira temos que x continua um ponto irregular em Y. Note que x continua não sendo fracamente irregular em Y. De fato, se x é um ponto de X que não é fracamente irregular, para cada V vizinhança de x em X existe algum ponto y em $\overline{V}$ tal que $\mathrm{rk}(y) > \mathrm{rk}(x)$. Como as vizinhanças de x em Y são da forma $V \cap Y$ para alguma vizinhança V de x em X, o ponto y permanece em $\overline{V}$, e seu posto continuará maior que o posto de x. Temos ainda que $\mathrm{rk}^Y(x) = 1$, já que x possui uma vizinhança em Y que possui somente ele e pontos de $I_0^X = I_0^Y$. Então, se X possui um ponto irregular que não é fracamente irregular, então X possui um tal ponto em I_1^X.

Dentro do escopo desta demonstração, nós diremos que um ponto x de X é *moderadamente irregular* se toda vizinhança de x possui fecho não enumerável.

Agora, iremos mostrar que algum ponto de I_1^X deve ser moderadamente irregular. Suponha que isto não ocorra. Logo, todo ponto x de I_1^X possui uma vizinhança U_x tal que $\overline{U_x}$ é enumerável. Seja $Y = (X \setminus \bigcup_{x\in I_1^X} \overline{U_x}) \cup I_0^X \cup I_1^X$. Então $X \approx Y$ e todo ponto de $I_1^Y = I_1^X$ é fracamente irregular. Isto contradiz o que havíamos mostrado no paragráfo anterior. Logo I_1^X possui um ponto moderadamente irregular.

Vamos agora mostrar que todo ponto de I_1^X é moderadamente irregular. Seja A o conjunto de pontos moderadamente irregulares de I_1^X. Se $\overline{A}$ não é coenumerável, então $Y = X \setminus \overline{A} \approx X$ não possui pontos moderadamente irregulares em I_1^Y.

De fato, sejam $x \in I_1^Y$ um ponto moderadamente irregular de Y e U uma vizinhança de x em Y, então $U = V \cap Y$ para algum V aberto em X, como x é moderadamente irregular temos que $\overline{U}$ é não enumerável, ou seja, $\overline{V \cap Y}$ é não enumerável e como $\overline{V \cap Y} \subseteq V$ temos que V é não enumerável.

Por fim, note que como Y é aberto em X, então $\mathrm{rk}^X(x) = \mathrm{rk}^Y(x) = 1$, donde temos que $x \in I_1^X$. Assim, x é moderadamente irregular em X e $x \in I_1^X$, isto é, $x \in A$, uma contradição pois $x \in Y = X \setminus \overline{A}$.

Logo, $\overline{A}$ é coenumerável. Seja $Y = I_0^X \cup \overline{A}$. Uma vez que $X \setminus Y$ é enumerável e $I_0^X \subseteq Y$, segue do Lema 1.17 que todo ponto moderadamente irregular de X continua sendo um ponto moderadamente regular de Y.

Finalmente, iremos mostrar que todo ponto de acumulação de X é fortemente irregular. Suponha que isto não ocorra. Então, para algum $x \in I_\alpha^X$, $\alpha \geq 1$, existe uma vizinhança U de x que não é quase densa, isto é, tal que $\overline{U}$ não é coenumerável. Seja $Y = (X \setminus \overline{U}) \cup I_0^X \cup \{x\}$. Como $U \cap Y$ é uma vizinhança de x em Y contendo somente x e pontos de I_0^Y, segue que $\mathrm{rk}^Y(x) = 1$; Como $\overline{U \cap Y}^Y \subseteq I_0^Y \cup \{x\}$, temos que x não é moderadamente regular em Y. Mas $Y \approx X$, e isto contradiz o fato demonstrado no paragráfo anterior. Então todo ponto de acumulação de X é fortemente irregular. □

Lema 4.15 *Se $x \in I_1^X$, então x é um ponto regular de X se, e somente se, x possui uma vizinhança clopen U tal que $U \cap X^1 = \{x\}$. Além disso, isto vale se, e somente se, x possui um SFV constituído de clopens.*

Demonstração: Se $x \in I_1^X$, então existe um conjunto aberto V tal que $V \cap X^1 = \{x\}$. Usando a regularidade de x, seja $U \subseteq V$ uma vizinhança aberta de x tal que $\overline{U} \subseteq V$. Então $\overline{U} \setminus U \subseteq I_0^X$, e todo subconjunto de I_0^X é aberto. Logo, $\overline{U} = U$, isto é, U é clopen. Reciprocamente, suponha que U é clopen e $U \cap X^1 = \{x\}$. Assim x é regular em X pois $\overline{\{x\}}^X \subseteq U$ para toda vizinhança aberta U de x em X. Por fim, qualquer subconjunto aberto de U contendo x também é clopen, então x possui um SFV constituído de clopens. □

Lema 4.16 *Suponha que X não seja regular e que nem todo ponto de acumulação de X é fortemente irregular. Então o conjunto dos pontos regulares de X é enumerável, e todos os outros pontos de X são fracamente irregulares. Além disso, o fecho do conjunto dos pontos de acumulação regulares de X é enumerável, e estes pontos estão distribuídos em X da seguinte maneira: existe algum $1 < \alpha < \omega_1$ tal que não existem pontos regulares de posto α ou superior, e, para todo $\beta < \alpha$, existem infinitos pontos regulares de posto β.*

Demonstração: Como X não é regular e nem todo ponto de acumulação de X é fortemente irregular, segue do Lema 4.14 que todo ponto de acumulação de X é regular ou fracamente irregular. Como regularidade em um ponto é uma propriedade hereditária, então o conjunto dos pontos regulares de X é um subespaço regular de X. Se este conjunto fosse não enumerável, então ele seria homeomorfo a X, o que implicaria X regular. Assim, o conjunto dos pontos regulares de X é enumerável.

Seja

$$\alpha = \sup\{\mathrm{rk}^X(x) + 1 : x \text{ é um ponto regular de } X\} < \omega_1.$$

Claramente, X não possui pontos regulares de posto α ou superior.

A seguir, iremos mostrar que $\alpha > 1$, ou seja, que X possui pontos de acumulação regulares. Sabemos que X possui pontos fracamente irregulares: seja x um desses pontos e seja U uma vizinhança de x tal que $\overline{U}$ é enumerável. Seja $Y = (X \setminus \overline{U}) \cup (U \cap I_0^X) \cup \{x\}$. Temos que $I_0^X = I_0^Y$ é denso em Y, então $x \notin I_0^X$ é um ponto de acumulação de Y. Como $U \cap Y$ é uma vizinhança de x em Y que contém apenas x e pontos de I_0^Y, então $\mathrm{rk}^Y(x) = 1$. Além disso, $\overline{U \cap Y}^Y = \overline{U}^X \cap Y = U \cap Y$, então $U \cap Y$ é uma vizinhança clopen de x em Y. Segue do Lema 4.15 que x é um ponto de acumulação regular de Y. E como $Y \approx X$, X possui pontos de acumulação regulares.

Seja R o conjunto dos pontos de acumulação regulares de X. Resta mostrar que $|\overline{R}| = \aleph_0$ e que, para cada $1 \leq \beta < \alpha$, $|R \cap I_\beta^X| = \aleph_0$.

Seja $\beta < \alpha$ e denote por $R_\beta = R \cap I_\beta^X$ o conjunto de pontos regulares de posto β. Se R_β é finito, então $Y = X \setminus R_\beta$ não possui pontos regulares de posto β; como $Y \approx X$, $R_\beta = \emptyset$. Então R_β é vazio ou infinito. Como $\beta < \alpha$, existe algum γ tal que $\beta \leq \gamma < \alpha$ e $R_\gamma \neq \emptyset$. Seja $Y = \bigcup_{\zeta<\beta} I_\zeta^X \cup X^\gamma$. Se um ponto possui posto γ em X, então esse mesmo ponto possui posto β em Y. Como a propriedade de ser um ponto regular é hereditária, Y possui pontos regulares de posto β. Como $Y \approx X$, $R_\beta \neq \emptyset$. E, como já haviamos argumentado, R_β não pode ser finito e não vazio. Logo, $|R_\beta| = \aleph_0$, e isto vale para qualquer β tal que $1 \leq \beta < \alpha$.

Para mostrar que $\overline{R}$ é enumerável, nós primeiramente vamos mostrar que algum ponto em I_1^X é irregular em X. Seja x um ponto irregular de X. Então existe uma vizinhança aberta U de x tal que, para toda vizinhança V de x, $\overline{V} \not\subseteq U$. Consideremos $Y = (X \setminus U) \cup (I_0^X \cap U) \cup \{x\}$. Temos que $Y \approx X$ e $\mathrm{rk}^Y(x) = 1$. Portanto, é suficiente mostrar que x é irregular em Y. Seja $V \cap Y$ uma vizinhança arbitrária de x em Y sendo V aberto em Y. Do Lema 1.17 e do fato de $I_0^X = I_0^Y$ ser denso em X e em Y temos que $\overline{V \cap Y}^Y = \overline{V}^X \cap Y$. Consequentemente,

$$\overline{V \cap Y}^Y \setminus (U \cap Y) = (\overline{V}^X \cap Y) \setminus (U \cap Y) = (\overline{V}^X \setminus U) \cap Y = \overline{V}^X \setminus U \neq \emptyset.$$

Como $V \cap Y$ era arbitrária, $U \cap Y$ testemunha que x não é um ponto regular em Y. Portanto, X possui pontos irregulares em I_1^X.

Suponha que $\overline{R}$ seja não enumerável. Fazendo $Y = \overline{R} \cup I_0^X$, temos que $I_1^Y \subseteq R$. Decorre do Lema 4.13 que todo ponto de I_1^Y é ponto regular de Y. Como $Y \approx X$, isto contradiz a conclusão do parágrafo anterior, e segue que $\overline{R}$ é enumerável. □

Tudo o que resta para demonstrar o Teorema 4.12 é mostrar que no caso (2) o conjunto dos pontos regulares de X é um subconjunto fechado de I_1^X. Para os dois resultados que se seguem, vamos assumir que X não é regular e não possui pontos fortemente irregulares. Continuaremos usando R para denotar o conjunto dos pontos de acumulação regulares de X, α para denotar o menor ordinal não nulo tal que $R \cap I_\alpha^X = \emptyset$ e R_β para denotar $R \cap I_\beta^X$.

Lema 4.17 *Cada R_β, $0 < \beta < \alpha$, é fechado em X. Em particular, como $R_1 \subseteq I_1^X$, temos que*

R_1 é fechado e relativamente discreto.

Demonstração: Temos que $\overline{R_1}^X$ é enumerável pois $\overline{R}^X$ é enumerável. Seja $Y = X \setminus (\overline{R_1}^X \setminus R_1) \approx X$. Afirmamos que $R_1^Y = R_1^X$. Já sabemos que $R_1^X \subseteq R_1^Y$ pois regularidade em um ponto é uma propriedade hereditária. Suponha que $x \in R_1^Y \setminus R_1^X$. Temos que $X \setminus Y \subseteq X^2$. De fato, note que $R_1^X \subseteq X^1$; então qualquer ponto de acumulação de R_1^X está contido em X^2 e, como todos os pontos de $X \setminus Y$ são pontos de acumulação de R_1^X, temos que $X \setminus Y \subseteq X^2$. Assim, $I_0^X = I_0^Y$ e $I_1^X = I_1^Y$ pois as vizinhanças que testemunham que os pontos de I_0^X e I_1^X são isolados em X e em X^1, respectivamente, permanecem iguais em Y. Então $x \in R_1^Y \setminus R_1^X \subseteq I_1^Y = I_1^X$, ou seja, $x \in I_1^X$. Como x é fracamente irregular em X, x possui uma vizinhança U em X tal que $\overline{U}^X \subseteq I_0^X \cup I_1^X = I_0^Y \cup I_1^Y$. Como $x \in R_1^Y$, pelo Lema 4.15 temos que x possui uma vizinhança clopen $V \subseteq I_0^Y \cup \{x\}$ em Y. Como $V \subseteq I_0^Y \cup I_1^Y$ e $I_0^Y \cup I_1^Y = I_0^X \cup I_1^X$ é aberto em X, temos que V é aberto em X e $U \cap V$ é uma vizinhança de x em X. Além disso,

$$\overline{U \cap V}^X \subseteq \overline{U}^X \cap \overline{V}^X \subseteq \overline{U}^X \cap (\overline{V}^Y \cup (X \setminus Y)) \subseteq \overline{V}^Y = V.$$

A primeira inclusão é imediata. Para a segunda inclusão, note que, se $x \in \overline{U}^X \cap \overline{V}^X$, então $x \in \overline{U}^X$ e $x \in \overline{V}^X$. Mas $\overline{V}^Y = \overline{V}^X \cap Y$, então temos dois casos: $x \in \overline{V}^X$ e $x \in Y$ ou $x \in \overline{V}^X$ e $x \notin Y$. Em ambos os casos, temos que $x \in \overline{U}^X \cap (\overline{V}^Y \cup (X \setminus Y))$. Por fim, para a última inclusão, note que $\overline{U}^X \cap (\overline{V}^Y \cup (X \setminus Y)) = (\overline{U}^X \cap \overline{V}^Y) \cup (\overline{U}^X \cap X \setminus Y)$, mas $(\overline{U}^X \cap X \setminus Y) = \emptyset$ pois $\overline{U}^X \subseteq I_0^X \cap I_1^X$ e $X \setminus Y \subseteq X^2$. Então, $x \in \overline{U}^X \cap \overline{V}^Y$ e, consequentemente, $x \in \overline{V}^Y$.

Como $V \cap I_1^X = \{x\}$, $\overline{U \cap V}^X \subseteq I_0^X \cup \{x\}$. Como todo subconjunto de I_0^X é aberto, temos que $\overline{U \cap V}^X$ é aberto e, consequentemente, clopen em X. Segue do Lema 4.15 que x é um ponto regular de X. Então $x \in R_1^X$, e $R_1^X = R_1^Y$.

Assim,

$$\overline{R_1^Y}^Y = \overline{R_1^X}^Y = \overline{R_1^X}^X \cap Y = R_1^X = R_1^Y.$$

Então R_1^Y é fechado em Y e, como $Y \approx X$, R_1^X é fechado em X.

Por fim, seja $0 < \beta < \alpha$ e seja $Y = X \setminus \bigcup_{0<\gamma<\beta} I_\gamma^X$. Temos que $Y \approx X$ e $R_\beta^X = R_1^Y$. Então R_β^X é fechado em Y. Como Y é a união de um subespaço fechado de X (a saber, X^β) e I_0^X, e como $R_\beta \cap I_0^X = \emptyset$, R_β é fechado em X. □

Lema 4.18 *$\alpha = 2$, ou seja, $R \subseteq I_1^X$.*

Demonstração: Suponha $\alpha > 2$ e seja $X_0 = X$. Tome $X_1 = (X_0 \setminus I_1^{X_0}) \cup R_1^{X_0}$. Temos que X_1 é coenumerável em X. Temos ainda que $R_1^{X_0} \subseteq R_1^{X_1}$ (já que regularidade em um ponto é hereditária), $R_1^{X_0} \subseteq X_1$ (por construção) e, como $I_0^{X_0} \subseteq X_1$, todo ponto com posto 1 em X_0 permanece com posto 1 em X_1. Além disso, $R_1^{X_0} \neq R_1^{X_1}$, já que $R_1^{X_0}$ é fechado em X_0, o que implica que todo $x \in R_2^{X_0}$ se torna um ponto de posto 1 em X_1 e, como regularidade em um ponto é hereditária, um elemento de $R_1^{X_1}$.

Usando recursão transfinita, definimos agora uma sequência $\langle X_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de X. Seja $X_0 = X$. Dado X_β nós definimos $X_{\beta+1} = (X_\beta \setminus I_1^{X_\beta}) \bigcup R_1^{X_\beta}$. Para β limite, nós tomamos $X_\beta = \bigcap_{\gamma<\beta} X_\gamma$. Segue por indução transfinita e pelo argumento do parágrafo anterior que, para todo $\beta < \omega_1$, X_β é coenumerável em X, e consequentemente homeomorfo a X, e $R_1^{X_\beta} \subseteq R_1^{X_{\beta+1}} \neq R_1^{X_\beta}$.

Seja $Y = \bigcup_{\beta<\omega_1} R_1^{X_\beta}$. Como $R_1^{X_\beta} \subsetneq R_1^{X_{\beta+1}}$ para todo β, Y é não enumerável e, portanto, homeomorfo a X. Existe algum $\gamma < \omega_1$ tal que $I_0^Y \subseteq \bigcup_{\beta<\gamma} R_1^{X_\beta}$, isto segue do fato que I_0^Y é enumerável e dos $R_1^{X_\beta}$ serem crescentes para $\beta < \omega_1$, isto é, $R_1^{X_\beta} \subsetneq R_1^{X_{\beta+1}}$. Então $\bigcup_{\beta<\gamma+1} R_1^{X_\beta}$ não é relativamente discreto (como $I_0^Y \subseteq \bigcup_{\beta<\gamma} R_1^{X_\beta}$ temos que $R_1^{X_{\gamma+1}}$ não possui pontos isolados de Y, o que é suficiente para concluir que as topologias de subespaço e discreta não coincidem em $\bigcup_{\beta<\gamma+1} R_1^{X_\beta}$, isto é, $\bigcup_{\beta<\gamma+1} R_1^{X_\beta}$ não é relativamente discreto). Por outro lado, $\bigcup_{\beta<\gamma+1} R_1^{X_\beta} \subseteq R_1^{X_{\gamma+1}}$, então; pelo Lema 4.17 e o fato de que $X_{\gamma+1} \approx X$, $\bigcup_{\beta<\gamma+1} R_1^{X_\beta}$ é relativamente discreto, já que $R_1^X \subseteq I_1^X$ é fechado e relativamente discreto. E isto é uma contradição. Portanto, $\alpha = 2$. □

Isto completa a demonstração do Teorema 4.12.

O método da demonstração do Lema 4.18 pode ser abstraído em um resultado mais geral:

Proposição 4.19 *Assuma que X satisfaz a condição (2) do Teorema 4.12. Se D é um subconjunto enumerável de X que não contém pontos regulares, então $R^X = R^{X\setminus D}$.*

Demonstração: Alterando nossa notação novamente, se $Y \subseteq X$ e $h : X \to Y$ é um homeomorfismo, nós usaremos D^Y para indicar $h[D]$. Quando um homeomorfismo h não é explicitamente mencionado, é assumido que h foi escolhido arbitrariamente e fixado.

Suponhamos que D não contém pontos regulares e que $R^X \neq R^{X\setminus D}$. Como todo ponto isolado é também um ponto regular, $D \cap I_0^X = \emptyset$. Logo, se $\mathrm{rk}(x) = 1$, então $\mathrm{rk}^{X\setminus D}(x) = 1$. Como regularidade é uma propriedade hereditária, isto implica que $R^X \subseteq R^{X\setminus D}$. Então $R^X \subsetneq R^{X\setminus D}$. Como na demonstração do Lema 4.18, nós definimos uma sequência transfinita de subespaços não enumeráveis de X tomando $X_0 = X$, $X_{\beta+1} = X_\beta \setminus D^{X_\beta}$, e, para um α limite, $X_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta$. Para cada $\beta < \omega_1$, $X_\beta \approx X$ e $R^{X_\beta} \subsetneq R^{X_{\beta+1}}$.

Seja $Y = \bigcup_{\beta<\omega_1} R^{X_\beta}$. Como $R^{X_\beta} \subsetneq R^{X_{\beta+1}}$ para todo $\beta < \omega_1$, Y é não enumerável e, portanto, $Y \approx X$. Como na demonstração do Lema 4.18, existe algum $\gamma < \omega_1$ tal que $I_0^Y \subseteq \bigcup_{\beta<\gamma} R^{X_\beta}$. Então $\bigcup_{\beta<\gamma+1} R^{X_\beta}$ não é relativamente discreto. Por outro lado, $\bigcup_{\beta<\gamma+1} R^{X_\beta} \subseteq R^{X_{\gamma+1}}$, então; pelo Lema 4.17 e o fato que $X_{\gamma+1} \approx X$, $\bigcup_{\beta<\gamma+1} R^{X_\beta}$ é relativamente discreto, o que é uma contradição. Dessa maneira, $R^X = R^{X\setminus D}$. $\square$

Corolário 4.20 *Assuma que X satisfaz a condição (2) do Teorema 4.12. Se U é um subconjunto aberto de X tal que $R \subseteq U$ então $X^1 \subseteq \overline{U}$. Em outras palavras, é impossível separar qualquer ponto de acumulação de X de R por meio de conjuntos abertos.*

Demonstração: Seja U um aberto de X tal que $R \subseteq U$, e suponha que exista algum $x \in X^1 \setminus \overline{U}$. Como $I_1^X = I_0^{X^1}$ é denso em X^1, podemos assumir que $x \in I_1$. Seja V uma vizinhança aberta de x tal que $V \subseteq X^1 \setminus \overline{U}$, tal que $V \subseteq \{x\} \cup I_0$, e tal que $\overline{V} \subseteq I_0 \cup I_1$ (lembre que x é fracamente irregular). Temos que $\overline{V} \cap U = \emptyset$, então, em particular, $V \cap R = \emptyset$. Seja $\partial V = \overline{V} \setminus V$. Pela Proposição 4.19, $R^X = R^{X\setminus\partial V}$, então x é irregular em $X \setminus \partial V$. Por outro lado, V é uma vizinhança clopen de x em $X \setminus \partial V$, e segue pelo Lema 4.15 que x é regular em $X \setminus \partial V$. Uma contradição. $\square$

5 Considerações finais

O Problema de Toronto é provavelmente muito díficil, e para chegarmos a essa conclusão basta olhar para o grupo de pesquisadores que vêm tentando respondê-lo: Shelah, Kunen, Steprans, Dow etc.

Embora o artigo de Brian [1] tenha sido nossa principal referência, os resultados iniciais deste trabalho tiveram grande influência dos artigos de Hernández [4] e Rivera [7]. A escolha em trabalhar inicialmente com estes artigos se deu em grande parte pela forma didática como eles estão escritos, o que facilitou o contato inicial com o problema.

Entender mais a fundo a linguagem da Topologia Geral e da Teoria dos Conjuntos foi um processo natural ao longo do estudo do artigo [1], e a iniciativa para pesquisar esse material foi, pessoalmente, um ponto muito importante. Ter contato com a linguagem e com técnicas de demonstração de áreas tão importantes é crucial para a vida acadêmica de um pesquisador em Matemática.

O objetivo de Brian em [2] não era construir espaços de Toronto de Hausdorff e não discretos em alguma extensão genérica e mostrar que sua existência é consistente com ZFC, mas sim mostrar que tais espaços não existem. Muitos resultados da forma "se existe um espaço de Toronto de Hausdorff e não discreto, então valem tais propriedades"encontrados em [1] surgiram dessas tentativas. O Capítulo 4 deste trabalho apresenta uma série de resultados deste tipo, incluindo um (Teorema 4.12) que mostra que se um HATS não discreto não é regular, então ele deve estar em conformidade com um dos dois tipos bem específicos apresentados no enunciado do teorema.

O problema principal apresentado neste trabalho continua aberto, porém questões mais fáceis de serem tratadas surgiram da análise de Brian. Uma delas é que o Teorema 4.12 pode ser melhorado. O resultado apresenta dois tipos de HATS não discretos e não regulares, e o autor espera que ao menos um dos dois casos possa ser eliminado. Se mostrássemos que os dois são impossíveis, isso significaria que todo HATS não discreto é regular e, consequentemente, responderia parte das questões colocadas por Steprans em [8].

Esperamos que este trabalho forneça um bom panorama acerca do que é conhecido sobre o Problema de Toronto.

Referências Bibliográficas

[1] W. R. Brian, *The Toronto problem*, Topology Appl. **162** (2014), 76-90.

[2] W. R. Brian, *Topics in General and Set-Theoretic Topology: slice sets, rigid subsets of $\mathbb{R}$, cleavability, Toronto spaces and neight*, Tese (Doutorado em Matemática), Universidade de Oxford, Reino Unido (2013), 109-142.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.

[4] N. C. Hernández, *Observaciones sobre Espacios de Toronto*, Divulg. Mat. **6 (2)** (1998), 87-91.

[5] K. Hrbacek e T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, New York, 1999.

[6] K. Kunen, *Set Theory: an introduction to independence proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[7] M. Rivera, *Toronto Spaces*, The Harvard College Mathematics Review, **Spring 2011 (3)**, 24-27.

[8] J. Steprans, *Steprans' problems*, in: Open Problems in Topology (J. van Mill and G. M. Reed eds.), North-Holland, 1990, 15-20.

[9] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, Mineola, 2004.