

Modelo do Votante e de Contato

Isabella Gonçalves de Alvarenga



Universidade Federal do ABC

Título: Modelo do Votante e de Contato

Autor: Isabella Gonçalves de Alvarenga

Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cristian Flavio Coletti

Universidade Federal do ABC

Profa. Dra. Érika Alejandra Rada

Universidade Federal do ABC

Santo André, 24 de abril de 2019.

Sumário

Resumo	viii
Abstract	ix
1. Introdução	1
2. Sistema de partículas interagentes	3
2.1. Modelo do votante	4
2.2. Processo de contato	5
2.3. Contato em uma árvore homogênea	6
2.4. Construção de Harris	10
2.5. Medidas estacionárias	12
3. Campo Médio	17
3.1. Estimativa \mathcal{L}^2	17
3.2. Equações Diferenciais	20
3.3. Modelo do contato	21
3.4. Modelo do Votante	23
4. Coexistência e Simulações	25
4.1. Grafos aleatórios	27
4.2. Simulações	28
A. Algoritmos	30

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a toda equipe do governo brasileiro dos anos de 2005 (em especial ao presidente e ao secretário de educação) até meados de 2016, que fizeram possível a existência dessa universidade e de várias outras instituições de altíssima qualidade. Defender a disseminação do conhecimento é um grande ato de coragem.

Caminhando agora para os agradecimentos mais pessoais, gostaria de agradecer a todos os meus parentes. Aos meus pais, Luis e Célia, que sempre se importaram com os meus estudos e fizeram de tudo para me dar as melhores oportunidades dentro das melhores escolas, e aos meus avós, Oma e Ota, que me ensinaram tudo o que não se aprende dentro da sala de aula. Junto com eles, gostaria de agradecer também aos meus primos e tios.

Obrigada também a todos os funcionários dessa instituição que, de maneira indireta, contribuíram para esse documento: seja limpando a salas de estudo, preparando a comida ou me enviando vários e-mails para que eu não perdesse os prazos de entrega (muito obrigada Felipe). Agradeço também a todos os professores que em algum momento ministraram alguma matéria para mim ou me ajudaram tirando dúvidas no corredor. Em especial, o meu mais sincero carinho por alguns deles que ficaram muito marcados para mim, são eles: Cristian, Sandra, Marrocos, Jerônimo, Vilela, Mariana, Jeferson, Guéron, Grisi, Carol e Ana Lígia. Obrigada por todo o carinho, levo comigo uma parte de todos vocês.

Naturalmente, de maneira ainda mais especial, gostaria de agradecer ao meu orientador, professor, conselheiro, amigo e fiador (nessa ordem cronológica), Daniel. Obrigada por todas as quatro pesquisas, pelo TCC, pelo mestrado, pelas indicações de prêmio e pelas premiações também. Obrigada por me aconselhar na vida pessoal e acadêmica, por dividir sua sala comigo e por ter paciência em todas as vezes que eu consegui um emprego num momento de desespero. E, o mais importante, obrigada por todos os copos (de café e de cerveja) que bebemos juntos.

É claro que quem escreve na lousa é muito importante, mas eram aqueles que sentavam do meu lado que me seguraram durante esses 4 anos. Agradeço a todos os amigos que fiz aqui. Obrigada a todos os que integram a desordem: Carol, Higor, Bruno, Caio, Augusto, Ali, Betão,

Sumário

Caíque, Burno e Carlo. Sem vocês, esse trabalho estaria pronto um quadrimestre atrás, mas de maneira infinitamente mais feliz. Também minha gratidão a Maria e ao Hec, obrigada por todas as semanas (mal dormidas) de prova. À Pietra, minha amiga da vida: obrigada por toda a segurança que você sempre me passou.

Obrigada, a todos os meus alunos, pela a confiança depositada no meu trabalho e por todos os ensinamentos que vocês também me passaram.

Obrigada ao math.stackexchange.com por todas as discussões. E obrigada a Livraria Gênese, por sempre ter as melhores promoções.

Obrigada ao Corinthians, por me ensinar a nunca desistir.

Como o mais especial sempre fica para o fim, gostaria de agradecer ao meu amor, minha companheira, minha namorada e minha melhor amiga, Deborah (união estável dela aqui, otário). Obrigada por me encher de coragem todos os dias para sair de casa e conquistar a liberdade de ser quem eu sou. Obrigada por todo o carinho, por toda a preocupação, por dividir uma cama e uma vida. Obrigada por fazer com que eu me sentisse em casa nesse mundo e por aprender junto comigo o que significa (pelo menos pra gente) amar alguém. Eu te amo infinito não enumerável.

Resumo

Neste trabalho estudamos sistema de partículas interagentes em grafos, em especial o modelo do votante e de contato. Apresentamos resultados sobre o fenômeno de sobrevivências global para ambos os modelos e local para o modelo de contato. Estudamos propriedades das medidas invariantes para o modelo do votante em \mathbb{Z}^d . Expomos resultados para a coexistência no nesse mesmo modelo e também em grafos completos utilizando uma análise de campo médio. Finalmente apresentamos simulações sobre o fenômeno de coexistência em grafos aleatórios de Bernoulli. As simulações indicam a existência de uma transição de fase na frequência de coexistência com parâmetro crítico $\frac{1}{2}$. Esses resultados indicam a dificuldade de formação de consenso de opinião em redes aleatórias conforme a conectividade diminui e ilustram, em um contexto simplificado, o fenômeno sociológico de formação de bolhas ideológicas.

Palavras-chave: Cadeias de Markov, Modelo do Votante, Processos Estocásticos, Construção Gráfica, Grafos, Sistema de Partículas Interagentes

Abstract

In this work we studied interacting particle system in graphs, especially the voter and contact model. We present results on the global for both models and local survival phenomenon for contact model. We study properties of invariant measures for the voter model in \mathbb{Z}^d . We present results for coexistence in this same model and also in complete graphs using an analysis of mean-field. Finally we present simulations about Bernoulli's phenomenon of coexistence in random graphs. The simulations indicate the existence of a phase transition in the frequency of coexistence with critical parameter $\frac{1}{2}$. These results indicate the difficulty of forming consensus of opinion in random networks as the connectedness decreases and illustrate, in a simplified context, the sociological phenomenon of ideological bubble formation.

Keyword: Markov Chains, Voters Model, Stochastic Processes, Graphical Construction, Graphs, Interagent Particle System

1. Introdução

O objetivo desse projeto é estudar sistemas de partículas interagentes em grafos, em especial o modelo do votante e de contato.

O modelo do votante consiste em uma descrição simplificada do comportamento de uma rede social, onde indivíduos (elementos da rede) tentam decidir sobre um determinado assunto como, por exemplo, em quem votar em uma eleição entre dois candidatos.

Nesse modelo consideraremos que há um eleitor em cada vértice de um grafo, onde as conexões indicam que há alguma forma de interação entre um par de eleitores. As opiniões de qualquer eleitor mudam em tempos aleatórios com distribuição exponencial sob a influência de opiniões de seus vizinhos. A opinião de um eleitor em qualquer momento dado pode tomar um de dois valores, etiquetados 0 e 1, tipicamente interpretados como dois candidatos.

Nesse sistema, estamos principalmente interessados no seu comportamento assintótico. Uma vez que as taxas de conversão de uma partícula dependem de seus vizinhos, é óbvio que quando todos as partículas tomam o mesmo valor, o sistema inteiro para de mudar para sempre.

Portanto, o modelo do votante tem duas distribuições invariantes extremas triviais, δ_0 e δ_1 , que representam o consenso. A questão principal que vamos discutir é se existem ou não outras, que então representariam a coexistência de diferentes opiniões em equilíbrio.

Por outro lado, o processo de contato é um processo estocástico usado para modelar o espalhamento de uma doença no conjunto de vértices de um grafo. Nele, os vértices infectados morrem a uma taxa constante, enquanto os locais saudáveis são ocupados em uma taxa λ proporcional ao número de vizinhos infectados.

Se definimos $\theta_t^x(y)$ como número de partículas doentes no vértice y no tempo t e $|\theta_t^{O,x}| = \sum_{y \in \Lambda} \theta_t^x(y)$ o número total de partículas doentes do processo que tem como estado inicial apenas a origem (denotada por O) infectada, temos que esse modelo admite dois parâmetros críticos que correspondem aos valores de λ que determinam as sobrevivências global (λ_1) e

1. Introdução

local (λ_2) da doença deste processo:

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \lambda : P(|\theta_t^{O,\lambda}| \geq 1, \forall t > 0) > 0 \right\}$$

$$\lambda_2 = \inf \left\{ \lambda : P(\limsup_{t \rightarrow \infty} \theta_t^{O,\lambda}(O) = 1) > 0 \right\}$$

isto é, λ_1 é o menor valor de λ para o qual a probabilidade de que exista uma partícula em qualquer instante de tempo seja positiva, (ou seja, para o qual o processo não se extingue); temos que λ_2 é, considerando a sequência $\theta_t^{O,\lambda}(O)$, o menor valor de λ para o qual o supremo dessa sequência seja 1 com probabilidade não nula (isto é, o processo admite sobrevivência local).

2. Sistema de partículas interagentes

Seja E um conjunto finito, denominado de espaço de estado local, e Λ um conjunto enumerável, denominado de reticulado. Seja E^Λ o produto cartesiano de Λ cópias de E , isto é, os elementos de E^Λ são da forma $\eta = (\eta(x))_{x \in \Lambda}$ com $\eta(x) \in E \forall x \in \Lambda$.

De maneira equivalente, E^Λ é o conjunto das funções que associam a cada elemento de Λ um elemento de E , isto é, funções da forma $c : \Lambda \rightarrow E$ (funções que geram configurações).

Se escolhermos Λ como o conjunto dos vértices V de um grafo, estamos associando a cada $v \in V$ um elemento de E . Por exemplo, no modelo do votante, E representa os possíveis candidatos de uma eleição, e $v \in V$, os eleitores. Assim, quando consideramos E^V , estamos atribuindo a cada eleitor a preferência por um candidato.

Um sistema de partículas interagentes é um processo de Markov a tempo contínuo $\xi = (\xi_t)_{t \geq 0}$ com espaço de estado \mathbb{S} da forma E^Λ , isto é, a cada tempo $t \geq 0$, o estado ξ é da forma $\xi = (\xi_t(x))_{x \in \Lambda}$, com $\xi_t(x) \in E \forall x \in \Lambda$. Chamamos $\xi_t(x)$ de estado de espaço de ξ no tempo t na posição x (note que, o que fizemos, foi atribuir a cada tempo $t \geq 0$ um $\eta \in E^\Lambda$).

Em contraposição às cadeias de Markov a tempo discreto, em que a evolução era dada por uma matriz de transição P , o processo de Markov a tempo contínuo temos a caracterização da evolução através de um gerador, que é um operador que age sobre funções $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Um gerador em um sistema de partículas interagentes tem a forma

$$Lf(x) = \sum_{m \in \mathcal{G}} r_m \{ f(m(\eta)) - f(\eta) \}$$

em que \mathcal{G} é um conjunto cujos elementos são mapas $m : E^\Lambda \rightarrow E^\Lambda$, e $(r_m(\eta))_{m \in \mathcal{G}}$ é uma coleção de constantes não negativas, que dizem com qual taxa o mapa m deve ser aplicado sobre a configuração η para ela ser levada para a configuração $m(\eta)$.

De maneira equivalente, de maneira mas explícita, poderíamos definir o gerador por

$$Lf(\eta) = \sum_{m \in \mathcal{G}} r_m(\eta, m(\eta)) \{ f(m(\eta)) - f(\eta) \}$$

2. Sistema de partículas interagentes

e fazendo $m(\eta) = \eta'$, podemos escrever:

$$Lf(\eta) = \sum_{m \in \mathcal{G}} r_m(\eta, \eta') \{ f(\eta') - f(\eta) \}$$

Como em [7], denotando por $\mathcal{C}(\mathbb{S})$ o conjunto das funções $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ que atuam sobre uma dada configuração ξ em um dado tempo $t \geq 0$. Assim, temos um semigrupo de operadores lineares em $\mathcal{C}(\mathbb{S})$, que denotaremos por $\mathcal{S}(t)$.

Faça \mathcal{P} o conjunto de todas as medidas de probabilidade sobre \mathbb{S} . A medida

$$\mathbb{P}_\mu = \int_{\mathbb{S}} \mathbb{P}_\eta \mu(d\eta)$$

descreve a distribuição de um processo markoviano com distribuição inicial μ . Para todo $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S})$, podemos definir a medida $\mu S(t)$ por

$$\int f d(\mu S(t)) = \int S(t) f d\mu$$

Assim, $\mu S(t)$ descreve a distribuição no tempo t do processo com distribuição inicial μ . Naturalmente, dizemos que $\mu \in \mathcal{P}$ é invariante se $\mu S(t) = \mu$. Denotaremos o conjunto de medidas invariantes de \mathcal{P} por \mathcal{P}^s .

Por fim, fixado t , defina a função τ_x a função drift de x , i.e., $\tau_x \xi_t(y) = \xi_t(y + x)$ para todo $y \in \Lambda$. Quando uma medida $\mu \in \mathcal{P}$ satisfaz $\mu(\tau_x \xi_t) = \mu(\xi_t)$ para todo $\xi_t \in E^\Lambda$, ela é chamada de invariante para translações. Faça \mathcal{P}^i o conjunto de todas as medidas invariantes para translações.

2.1. Modelo do votante

Vamos construir o modelo do votante com um número finito de candidatos como em [8]. Seja $S = \{1, \dots, L\}$ o conjunto desses possíveis representantes e considere um grafo $G = G(V, E)$, em que cada elemento de V é um eleitor e, naturalmente, $E \subset V \times V$. Para cada $i, j \in V$, temos o mapa $\text{vot}_{i,j} : S^V \rightarrow S^V$ definido por

$$\text{vot}_{i,j}(\eta)(k) := \begin{cases} \eta(i) & \text{se } k = j \\ \eta(k) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2. Sistema de partículas interagentes

isto é, aplicar $\text{vot}_{i,j}$ para uma configuração η copia o estado de i para j . Para o modelo do votante do vizinho mais próximo, temos o gerador, com $f \in \mathcal{C}(S^V)$, (i.e., $f : S^V \rightarrow \mathbb{R}$) dado por:

$$G_{\text{vot}}f(x) = \frac{1}{|D_0|} \sum_{(i,j) \in \varepsilon^d} \{f(\text{vot}_{i,j}(\eta)) - f(\eta)\} \quad (\eta \in S^V)$$

em que $|D_0|$ é a cardinalidade do conjunto dos vizinhos da origem e ε^d é o conjunto de todos os vizinhos, sendo dois vértices i, j vizinhos somente quando $(i, j) \in E$.

O que esse modelo traduz é a seguinte dinâmica: estabelecemos para cada vértice $i \in V$ do grafo G um relógio, que é uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson. A cada momento que o relógio de um vértice $i \in V$ tocar, isto é, quando o valor do processo de Poisson for igual ao tempo de evolução do processo, iremos atualizar a opinião de i escolhendo-se uniformemente entre a opinião de algum de seus vizinhos.

2.2. Processo de contato

Novamente vamos nos basear em [8] para descrever o processo de contato. Nele, buscamos descrever a evolução de uma infecção sobre uma comunidade. Assim, dado um grafo $G = G(V, E)$, escolhemos o espaço de estado $S = \{0, 1\}$. Se $\xi_t(i) = 1$, dizemos que o organismo $i \in V$ está doente; se $\xi_t(i) = 0$, então $i \in V$ está saudável.

Com $i, j \in V$, definimos um mapa de contaminação $\text{cont}_{i,j} : \{0, 1\}^V \rightarrow \{0, 1\}^V$ dado por

$$\text{cont}_{i,j}(\eta)(k) := \begin{cases} \max\{\eta(i), \eta(j)\} & \text{se } k = j \\ \eta(k) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, se antes da aplicação de $\text{cont}_{i,j}$ o vértice $i \in V$ estiver doente, então após $\text{cont}_{i,j}$ o vértice j também estará doente, independentemente do estado inicial; se $i \in V$ estiver saudável, nada acontece.

Também vamos definir um mapa de recuperação

$$\text{rec}_i(\eta)(k) := \begin{cases} 0 & \text{se } k = i \\ \eta(k) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, quando o mapa rec_i atua sobre um vértice $i \in V$, este vértice, se estava doente, se recupera; já se estava saudável, nada acontece.

2. Sistema de partículas interagentes

O gerador do processo de contato do vizinho mais próximo (isto é, apenas vértices vizinhos podem transmitir a doença) com taxa de contaminação $\lambda \geq 0$ e taxa de recuperação $\delta \geq 0$ é dado por:

$$G_{\text{cont}}f(\eta) := \lambda \sum_{(i,j) \in \varepsilon^d} \{f(\text{cont}_{i,j}(\eta)) - f(\eta)\} + \\ + \delta \sum_{i \in V} \{f(\text{rec}_i(\eta)) - f(\eta)\} \quad (\eta \in \{0,1\}^V)$$

Logo, essa atualização nos diz que cada vértice infectado contamina outro vértice com taxa λ e se recupera com taxa $\delta = 1$.

2.3. Contato em uma árvore homogênea

Vamos estudar uma variação do modelo apresentado em 2.2 nos baseando por [11]. Agora, ao invés do indivíduo se recuperar, ele pode morrer com a doença, fazendo com que o respectivo vértice não participe mais da dinâmica.

Considere Λ como o conjunto dos vértices de um grafo de uma árvore homogênea de grau d , denotada por Γ_d , isto é, um grafo conexo e acíclico tal que todos os seus vértices possuem grau igual a $d + 1$ exceto por um vértice (denominado de raiz, e denotado por O) que possui grau d , para algum $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 3$. Definimos o processo de contato no tempo t , denotado por θ_t , da seguinte maneira:

1. Se existe uma partícula no vértice $x \in \Lambda$, então para cada um dos d vizinhos y de x esperamos um tempo com média exponencial de parâmetro $\frac{1}{\lambda}$ e temos o nascimento de uma partícula em y ;
2. Uma partícula espera um tempo com média exponencial de parâmetro 1 e morre;
3. Existe no máximo uma partícula por vértice, i.e., nascimentos em vértices já ocupados são descartados;

A terceira exigência quebra a independência entre as descendências de cada vértice. Seja $\theta_t^{x,\lambda}$ o processo de contato que começa com apenas uma partícula no tempo $t = 0$ localizada no vértice $x \in \Lambda$ e tem parâmetro λ . Também definimos $\theta_t^x(y)$ como número de partículas no vértice y e $|\theta_t^x| = \sum_{y \in \Lambda} \theta_t^x(y)$ o número total de partículas.

2. Sistema de partículas interagentes

Assim, temos dois parâmetros críticos que correspondem aos valores de λ que determinam as sobrevivências global (λ_1) e local (λ_2) do processo:

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \lambda : P(|\theta_t^{O,\lambda}| \geq 1, \forall t > 0) > 0 \right\}$$

$$\lambda_2 = \inf \left\{ \lambda : P(\limsup_{t \rightarrow \infty} \theta_t^{O,\lambda}(O) = 1) > 0 \right\}$$

isto é, λ_1 é o menor valor de λ para o qual a probabilidade de que o número total de partículas seja não nulo em qualquer instante de tempo seja positiva, ou seja, para o qual o processo não se extingue; considerando a sequência $\theta_t^{O,\lambda}(O)$, temos que λ_2 é o menor valor de λ para o qual o supremo dessa sequência seja 1 com probabilidade não nula. O próximo teorema estabelece limites para os valores de λ_1 e λ_2 dependendo de d .

Teorema 1. [11] *Sendo λ_1 e λ_2 definidos como anteriormente, temos, para o processo de contato em uma árvore homogênea de grau d , as seguintes desigualdades:*

$$\frac{1}{d} \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{d-2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{d-1}} \leq \lambda_2$$

Em particular, temos duas transições de fase (i.e., $\lambda_1 < \lambda_2$) se $d \geq 7$.

Demonstração. A estratégia para obtermos os limites inferiores de λ_1 e λ_2 é considerar o processo de ramificação, que modela uma dinâmica populacional em que cada indivíduo da geração n produz um número aleatório de indivíduos na geração $n+1$ de maneira independente, e usar os resultados já conhecidos.

Vamos definir um outro processo de Markov b_t^O sob o mesmo espaço de estado em que uma partícula $x \in \Lambda$ dá origem a uma partícula $y \in \Lambda$ com taxa $\lambda dp(x, y)$, em que $p(x, y) = \frac{1}{d}$ se y é um dos vizinhos de x e $p(x, y) = 0$ caso contrário. De maneira idêntica ao item 2 do processo originalmente considerado, a partícula morre com taxa igual a 1.

Como em b_t^O não há restrições sobre o número de indivíduos por vértices, podemos construir $\theta_t^{O,\lambda}$ e b_t^O usando a técnica de acoplamento de modo que $\theta_t^{O,\lambda}(x) \leq b_t^O(x)$ para cada $x \in \Lambda$. Denotamos dois valores críticos para b_t^O por $\lambda_1(b)$ e $\lambda_2(b)$. Dado que b_t^O possui mais partículas que η_t^0 , temos que $\lambda_1(b) \leq \lambda_1$ e $\lambda_2(b) \leq \lambda_2$. Como usamos uma parametrização diferente, já que

2. Sistema de partículas interagentes

a taxa que estamos considerando é $d\lambda$ ao invés de λ , obtemos que $d\lambda_1(b) = 1$ e $d\lambda_2(b) = \frac{d}{2\sqrt{d-1}}$, i.e., os limites inferiores desejados.

Para o limite superior de λ_1 , vamos considerar um processo $\tilde{\theta}_t^0$ que opera da seguinte maneira: Começamos com uma única partícula localizada na origem. Vamos escolher $d - 1$ vértices aleatoriamente dentre os d vizinhos mais próximos. A partícula da raiz vai dar origem a uma nova partícula com taxa λ em cada um dos $d - 1$ vértices previamente escolhidos. Assim, cada partícula pode dar origem a uma nova localizada em quaisquer um dos seus vizinhos com exceção do parente acima. Se um vértice for ocupado e a partícula morrer, ele permanecerá vazio para sempre. Novamente, cada partícula morre com taxa 1 e existe no máximo uma partícula por vértice.

Como usual, vamos definir a distância entre dois vértices $x, y \in \Lambda$ como o tamanho do caminho mais curto conectando x a y . Definimos $Z_0 = 1$ e Z_k como o número de vértices que tem distância k da raiz e que são ocupados por uma partícula de $\tilde{\theta}_t^0$. Temos que cada partícula em $\tilde{\theta}_t^0$ dá origem a uma nova com probabilidade $\frac{\lambda}{\lambda+1}$ em cada um dos $d - 1$ vértices permitidos, logo o tamanho esperado da descendência de cada partícula é $(d - 1)\frac{\lambda}{\lambda+1}$.

Note que uma árvore não possui ciclos, logo cada par distinto de vértices de $\tilde{\theta}_t^0$ tem pares distintos de descendências. Logo Z_k é um processo de ramificação discreto e é supercrítico (i.e., o processo sobrevive globalmente) se, e somente se,

$$(d - 1)\frac{\lambda}{\lambda + 1} > 1$$

A última desigualdade nos dá que $\lambda > \frac{1}{d-2}$. Mas Z_k sobrevive se, e somente se, o processo $\tilde{\theta}_t^0$ sobrevive globalmente. Então, o primeiro valor crítico de $\tilde{\theta}_t^0$ é $\frac{1}{d-2}$. Como as regras de nascimento de $\tilde{\theta}_t^0$ são mais restritivas que de θ_t^0 , temos que $\tilde{\theta}_t^0(x) \leq \theta_t^0(x)$ para cada $x \in \Lambda$. Logo $\frac{1}{d-2}$ é um limite superior para λ_1 . \square

O próximo teorema apresentado em [11] visa propor uma solução analítica para estudar o valor esperado de $|\theta_t^O|$.

Teorema 2. *Para o processo de contato em uma árvore homogênea com grau $d \geq 3$, existem duas constantes $c(\lambda, d)$ e $C(d)$ tais que*

$$e^{c(\lambda, d)t} \leq E(|\theta_t^O|) \leq C(d) e^{c(\lambda, d)t}$$

e além disso, $c(\lambda, d)$ é uma função contínua em λ .

2. Sistema de partículas interagentes

Além desse resultado, também temos os próximos dois teoremas também apresentados em [11]:

Teorema 3. *Se $\lambda > \lambda_1$, temos que $c(\lambda, d) > 0$.*

Teorema 4. *Se $c(\lambda, d) > 0$, então $\lambda \geq \lambda_1$.*

Com esses resultados em mente, vamos demonstrar o seguinte corolário como em [11].

Corolário 5. *Nós temos que*

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda : c(\lambda, d) \leq 0\}$$

E além disso, $c(\lambda_1, d) = 0$, i.e., λ_1 é o maior valor possível para o qual nós temos $c(\lambda, d) = 0$.

Demonstração. Dos teoremas 3 e 4, temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} c(\lambda, d) \leq 0 \text{ e } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} c(\lambda, d) \geq 0$$

Mas como $\lambda \rightarrow c(\lambda, d)$ é uma função contínua obtemos que $c(\lambda_1, d) = 0$.

Do teorema 3, temos que λ_1 é uma cota superior do conjunto $\{\lambda : c(\lambda, d) \leq 0\}$. Mas acabamos de mostrar que λ_1 pertence a esse conjunto, portanto $\lambda_1 = \sup\{\lambda : c(\lambda, d) \leq 0\}$. \square

Temos também, como mostrado em [11], uma consequência desse corolário e do Teorema 2:

Corolário 6. *Temos que se $\lambda = \lambda_1$*

$$1 \leq E\left(|\theta_t^{O, \lambda_1}|\right) \leq C(d)$$

em que $C(d)$ é uma constante que depende apenas de d .

Isto é, o número esperado de partículas do processo de contato permanece limitado para qualquer t .

Valem também os seguintes dois resultados como mostrado em [11].

Corolário 7. *Considere a função que relaciona λ à probabilidade de sobrevivência para o processo de contato em uma árvore homogênea com $d \geq 3$*

$$\lambda \rightarrow P(|\theta_t^{O, \lambda}| \geq 1, \forall t > 0)$$

é contínua em λ_1 , i.e., a mudança de fase é contínua.

2. Sistema de partículas interagentes

Mas o próximo teorema mostra que o mesmo resultado não vale para λ_2 :

Teorema 8. *Se $\lambda_1 < \lambda_2$, então a função*

$$\lambda \rightarrow P(\limsup_{t \rightarrow \infty} \theta_t^{O,\lambda}(O) = 1)$$

não é contínua em λ_2 .

2.4. Construção de Harris

Façamos a construção do modelo do votante em \mathbb{Z}^d usando estratégias um pouco diferentes da definição explícita do gerador como na Seção 2.1 usando as mesmas estratégias de [7]. A vantagem aqui é que teremos, de alguma maneira, mais controle sobre a realização. Podemos também implementar uma construção análoga para o processo de contato, como feito em [12].

Defina $E = \{0, 1\}$ e $\Lambda = \mathbb{Z}^d$. Seja $\eta \in E^\Lambda$ uma configuração possível, e, sendo $x \in \mathbb{Z}^d$, escrevemos $\eta(x)$ para o valor de E atribuído a x na configuração η (i.e., $\eta(x) = 1$ ou $\eta(x) = 0$). Iniciaremos o sistema atribuindo a cada elemento de Λ um elemento de E de maneira justa, ou seja, para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ atribuiremos uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro $\frac{1}{2}$. Assim, no tempo $t = 0$, temos que $\mathbb{P}(\eta(x) = 0) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\eta(x) = 1)$

Para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, vamos escolher um processo de Poisson independente, isto é, uma coleção de v.a. i.i.d N^x com taxa 1. Escreva $\{T_n^x\}_{n \geq 1}$ para os tempos escolhidos, chamados de tempos de realização.

Vamos tomar uma cadeia de Markov a tempo contínuo com probabilidade de transição p que dá origem a uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d R_n^x para cada estado x de modo que $\mathbb{P}(x + R_n^x = y) = p(y - x)$ para todo $y \in \mathbb{Z}^d$ (aqui, estamos garantindo a invariância por translação). Isto é, dado um $n \in \mathbb{N}$, cada vértice x muda de opinião nos tempos T_n^x e adota a opinião do vértice $x + R_n^x$.

Poderíamos também ter construído o mesmo processo agora definindo como x muda para a opinião do vértice y . Para isso, tomamos $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, um processo de Poisson independente $N^{x,y}$ com taxa $p(x - y)$ e definimos os $\{T_n^{x,y}\}_{n \geq 1}$ correspondentes. As duas construções são equivalentes, mas vamos adotar a segunda pela simplicidade da notação.

Podemos representar esse processo graficamente adicionando um eixo temporal a cada vértice de \mathbb{Z}^d e desenhamos uma seta entre $(y, T_n^{x,y})$ e $(x, T_n^{x,y})$ e um \times em $(x, T_n^{x,y})$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ e $n \in \mathbb{N}$.

2. Sistema de partículas interagentes

Uma comparação para entender esse processo é a seguinte: imagine que existe água entrando pelos vértices que estão associados ao valor 1 na configuração inicial. O eixo temporal adicionado a cada vértice é entendido como um cano pelo qual essa água pode seguir, subindo por ele até que ela encontre um \times , o que representaria um tubo fechado, e assim a seta seria um canal que conectaria dois tubos diferentes e a água passaria a seguir então por esse outro tubo (no problema original, \times representa o momento que um vértice muda para a opinião do outro).

Dizemos que há um caminho entre $(x, 0)$ e (y, t) se existe uma sequência de tempos $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m < s_{m+1} = t$ e estados $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y$ tais que

1. para $i = 1, \dots, m$ existe uma seta de x_{i-1} para x_i nos tempos s_i .
2. não existe \times no estado x_i entre as vezes s_i e s_{i+1} para todo $i = 0, \dots, m$.

Esse processo é definido por um processo de Markov a tempo contínuo $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$ com ξ como o estado inicial (i.e., $\xi = \xi_0$ é uma configuração) e tal que $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, temos que $\xi_t(x) := \xi(x, t) = 1$ se, e somente se, existe um $y \in \mathbb{Z}^d$ tal que existe um caminho de $(y, 0)$ para (x, t) e $\xi(y, 0) = 1$.

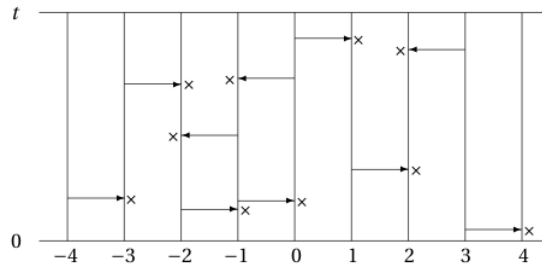


Figura 2.1.: Construção de Harris em \mathbb{Z}

Da construção, se existe um caminho de $(x, 0)$ para (y, t) , o valor do estado y no tempo t é o mesmo valor do estado x no tempo 0. Além disso, para todo vértice y , existe e é único um vértice x tal que existe um caminho de $(x, 0)$ para (y, t) . Assim, vamos definir um processo dual fazendo com que as setas tomem direções contrárias e olharemos o tempo do fim para o começo.

2. Sistema de partículas interagentes

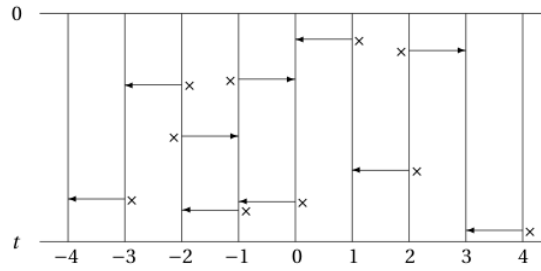


Figura 2.2.: Dual da construção de Harris em \mathbb{Z}

A evolução dos antecessores de x no dual são passeios aleatórios, denotados por $(X^x(t))_{t \geq 0}$, com probabilidade de transição p^* definido por $p^*(y) = p(-y) \forall y \in \mathbb{Z}^d$. A medida associada a ele é denotada por \mathbb{P}_x e sua esperança por \mathbb{E}_x . Temos:

$$\xi(x, t) = 1 \iff \xi(X^x(t), 0) = 1$$

Para dois diferentes vértices x e y , os passeios aleatórios $(X^x(t))_{t \geq 0}$ e $(X^y(t))_{t \geq 0}$ são independentes até se atingirem, e a partir dali eles se acoplam.

Considere $A \subset \mathbb{Z}^d$ qualquer. A família dos antecessores

A é denotada por $X^A(t) = \{X^x(t) \in \mathbb{Z}^d : x \in A\}$. Temos que

$$\xi(x, t) = 1 \forall x \in A \iff \xi(x, 0) = 1 \forall x \in X^A(t)$$

2.5. Medidas estacionárias

Note que o conjunto de todas as configurações possíveis de \mathbb{Z}^d forma uma σ -álgebra. Assim, consideremos \mathcal{P}^i o conjunto das medidas invariantes por translações (como no Capítulo 2) nas configurações possíveis agora em \mathbb{Z}^d . Trivialmente, existem duas medidas invariantes: δ_0 e δ_1 (a todos os vértices de \mathbb{Z}^d são atribuídos quase certamente somente 0 ou somente 1, respectivamente). É amplamente conhecido, como mostrado em [13], que se o passeio é recorrente, então estas são as únicas medidas estacionárias possíveis.

Assim, considere um passeio aleatório transiente. Sejam \mathcal{P}_e^i o conjunto de medidas extremas, isto é, daquelas que não podem ser escritas como combinações convexas dos elementos de \mathcal{P}^i .

A próxima proposição de [7] mostra que de fato existe uma medida invariante além daquelas triviais.

2. Sistema de partículas interagentes

Proposição 9. *Considere μ_α a medida produto de Bernoulli de parâmetro α em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, i.e., $\mu_\alpha(\eta(x) = 1) = \alpha$ de maneira independente para cada $x \in \mathbb{Z}^d$. Existe uma medida limite $\overline{\mu_\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_\alpha S(t)$.*

Demonstração. Para $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito e escrevendo $A \in X_t$ para $X_t(a) = 1 \forall a \in A$, temos que

$$\mu_\alpha S(t)(X_t : A \in X_t) = \mu_\alpha(X_t : \{X^A(t)\} \in X_t)$$

Como os passeios aleatórios X^x são coalescentes, o número de pontos distintos $\{X^A(t)\}$ é decrescente e limitado inferiormente por 1, logo, o limite existe. Sejam $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{Z}^d$ e $i_1, \dots, i_r \in \{0, 1\} \forall r$. Temos que $\mu S(t)(\xi : \xi(x_1) = i_1, \dots, \xi(x_r) = i_r)$ pode ser escrito em termos da forma $\mu S(t)(\xi : A \subset \xi)$ com $A \subset \{x_1, \dots, x_r\}$ usando o princípio da inclusão exclusiva.

Como a coleção $\{\xi : \xi(x_1) = i_1, \dots, \xi(x_r) = i_r\}$ é uma álgebra (a álgebra dos cilindros), ela gera uma única menor σ -álgebra que contém todos esses conjuntos, que coincide com a σ -álgebra com a qual equipamos \mathbb{Z}^d . Usando o teorema da extensão de Carathéodory, existe uma medida limite $\overline{\mu_\alpha}$. □

A próxima Proposição também de [7] mostra que medidas invariantes, neste caso, também são medidas invariantes por translação.

Proposição 10. *Toda medida estacionária é invariante por translação.*

Demonstração. A estratégia é novamente usar a representação dual e, portanto, o acoplamento dos passeios aleatórios. Vamos tomar um conjunto de passeios que coincidem só até o momento R e depois se desenvolvem independentemente.

Considere o conjunto de todos os passeios aleatórios acoplantes $\{X^A\}$ partindo de pontos de A . Seja $c_t^A(k)$ a probabilidade de termos exatamente k passeios aleatórios distintos em t , com $k \leq |A|$. Escreva $c^A(k) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} c_t^A(k)$, esse limite existe pois $c_t^A(k)$ é decrescente e limitado inferiormente por 1. Vamos definir processos acoplados dependendo de $R > 0$ tais que o conjunto $\{X_R^A\}$ se desenvolvem como $\{X^A\}$ para $t < R$ mas param de coincidir e se desenvolvem de maneira independente.

Podemos escolher R suficientemente grande tal que, para $\epsilon > 0$ fixado, vale $|c_R^A(k) - c^A(k)| < \frac{\epsilon}{|A|} \forall 1 \leq k \leq |A|$. Agora seja μ pertencente ao conjunto das medidas estacionárias de \mathbb{Z}^d denotado por \mathcal{P}^s . É suficiente mostrar que $\mu(\xi : A \in \xi) = \mu(\xi : A + z \in \xi)$ para todo $z \in \mathbb{Z}^d$.

Como μ é estacionária, vale $\mu(\xi : A \in \xi) = \mu(\xi : X^A(t) \in \xi)$.

2. Sistema de partículas interagentes

Escolha R tal que a desigualdade acima seja satisfeita A . Denotamos $X^{A,R}$ a coleção de passeios aleatórios distintos (i.e., que não se acoplaram) depois de R , começando de pontos de A . Seja $X^{A+z,R}$ definido de maneira análoga. Podemos agora acoplar $X^{A,R}$ e $X^{A+z,R}$ componente a componente (o primeiro passeio aleatório de $X^{A,R}$ com o primeiro passeio aleatório de $X^{A+z,R}$ e assim por diante). Usando que dois passeios aleatórios com a mesma distribuição se acoplam após um tempo suficientemente grande, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X^{A,R}(t) = X^{A+z,R}(t)) = 1$.

Mas, para R suficientemente grande, da desigualdade vale que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X^A(t) = X^{A+z}(t)) > 1 - \epsilon$. Então, com exceção de uma probabilidade pequena ϵ , temos que $\mu S(t)(\xi : A \in \xi) = \mu S(t)(\xi : A + z \in \xi)$ para t suficientemente grande. \square

Antes de apresentarmos o teorema sobre medidas invariantes por translação diferentes das duas triviais em um passeio aleatório transiente, precisamos dos dois seguintes lemas de [7]. Neles, $\mu \in \mathcal{P}_e^i$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{Z}^d$ com $r \in \mathbb{N}$ e R será escolhido novamente a fim de satisfazer a desigualdade anterior. Fixando $\epsilon > 0$, temos:

Lema 11. *Seja*

$$D_t(x_1, \dots, x_r, R) :=$$

$$|\mu \otimes \mathbb{P}(\eta(X^{x_1}(t)) = \dots = \eta(x^{x_r}(t)) = 1) - \mu \otimes \mathbb{P}(\eta(X^{x_1,R}(t)) = \dots = \eta(X^{x_r,R}(t)) = 1)|$$

para todo $t \geq 0$. Então $D_t(x_1, \dots, x_r, R) \leq \epsilon$ para R suficientemente grande e $t > R$. Isto é, a diferença de comportamento entre esses dois conjuntos é pequena.

Demonstração. Seja

$$\tau(x_1, \dots, x_r, R) = \inf\{s > R : \exists i \neq j \text{ tal que } X^{x_i}(R) \neq X^{x_j}(R), X^{x_i}(s) = X^{x_j}(s)\}$$

Isto é, o primeiro tempo de acoplamento depois de R . Condicionando no evento $\tau \leq t$, temos $D_t(x_1, \dots, x_r, R) \leq \mathbb{P}(\tau(x_1, \dots, x_r, R) < t)$. Como $\mathbb{P}(\tau(x_1, \dots, x_r, R) < t)$ é não crescente em R , temos o resultado. \square

Lema 12. *Seja $c_R^{x_1, \dots, x_r}(k)$ a probabilidade de existirem k passeios aleatórios distintos no tempo*

2. Sistema de partículas interagentes

R. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \otimes \mathbb{P}(\eta(X^{x_1, R}(t) = \eta(X^{x_r, R}(t) = 1)) = \sum_{k=1}^r c_R^{x_1, \dots, x_r}(k) \alpha^k$$

Por fim, também enunciamos e demonstramos o Teorema Ergódico como em [7]:

Teorema 13. Se $\mu \in \mathcal{P}_e^i$ então temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \bar{\mu}_\alpha$$

em que

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)^d} \sum_{|x|_\infty \leq n} \eta(x) \quad \mu\text{-q.c.} \quad e \quad \bar{\mu}_\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_\alpha S(t)$$

com μ_α uma distribuição de Bernoulli com parâmetro α .

Demonstração. Usando a decomposição ergódica, precisamos apenas mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \bar{\mu}_\alpha$$

se μ é ergódica. Além disso, como o conjunto dos cilindros é denso no conjunto das funções contínuas e limitadas (sendo que todas as funções contínuas são limitadas pois o espaço é compacto), devemos então provar que

$$\mathbb{P}_\mu(\eta(x_1, t) = \dots = \eta(x_r, t) = 1) \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mu}_\alpha}(\eta(x_1) = \dots = \eta(x_r) = 1)$$

conforme $t \rightarrow \infty$, para todo $r \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{Z}^d$.

Temos que $\mathbb{P}_{\bar{\mu}_\alpha}(\eta(x_1) = \dots = \eta(x_r) = 1) = \sum_{k=1}^r c_R^{x_1, \dots, x_r}(k) \alpha^k$. Mas, vimos que a diferença de comportamento entre esses dois conjuntos é pequena, ou seja, $|\mu \otimes \mathbb{P}(\eta(X^{x_1}(t)) = \dots = \eta(X^{x_r}(t)) = 1) - \mu \otimes \mathbb{P}(\eta(X^{x_1, R}(t)) = \dots = \eta(X^{x_r, R}(t)) = 1)| < \epsilon$ para todo $t > 0$. Mas, sabemos que $|c_R^A(k) - c^A(k)| < \frac{\epsilon}{|A|}$ e que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \otimes \mathbb{P}(\eta(X^{x_1, R}(t)) = \eta(X^{x_r, R}(t)) = 1) = \sum_{k=1}^r c_R^{x_1, \dots, x_r}(k) \alpha^k$. Logo,

$$|\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \otimes \mathbb{P}(\eta(X^{x_1, R}(t)) = \eta(X^{x_r, R}(t)) = 1) - \sum_{k=1}^r c_R^{x_1, \dots, x_r}(k) \alpha^k| \leq \epsilon + \frac{\epsilon}{1 - \alpha}$$

□

Por fim, o próximo Teorema de [7] fornece a expressão da medida limite:

2. Sistema de partículas interagentes

Teorema 14. *Seja $\overline{\mu}_\alpha$ o limite da medida produto de Bernoulli.*

1. *Se o núcleo de transição é recorrente e $\mu \in \mathcal{P}^i$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \alpha \delta_0 + (1 - \alpha) \delta_1$, em que $\alpha = \mu\{\eta : \eta(x) = 1\}$;*
2. *Se o núcleo de transição é transiente e $\mu \in \mathcal{P}_e^i$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \overline{\mu}_\alpha$, em que $\alpha = \mu\{\eta : \eta(x) = 1\}$.*

3. Campo Médio

Como estamos estudando o modelo do votante e o processo de contato sobre grafos aleatórios, pode ser uma tarefa difícil decidir sobre propriedades desses processos de maneira mais geral, como, por exemplo, decidir sobre a existência de parâmetros críticos e sobre seus valores ou limites. Isso porque, como o grafo é aleatório, pode ser difícil inferir sobre suas particularidades (no processo de Erdős–Rényi ainda temos controle sobre o número de ligações de cada vértice, já pelo processo binomial, dependendo de p , não podemos ter nem essa certeza).

A principal ideia do campo médio é substituir o grafo aleatório em que o processo acontece pelo grafo completo com N vértices, e assim estudar o comportamento dos modelos quando $N \rightarrow \infty$, e, depois, quando $t \rightarrow \infty$.

Mudaremos sutilmente a notação com o propósito de simpatizar com a linguagem de equações diferenciais ordinárias, ao invés do contexto probabilístico da Seção 2.

3.1. Estimativa \mathcal{L}^2

Vamos construir o campo médio para os dois modelos de interação de partículas seguindo [8].

Seja $X = (X_t)_{t \geq 0}$ uma cadeia de Markov a tempo contínuo com estado de espaço enumerável S . Vamos assumir que em cada configuração $x \in S$, a taxa total de salto $r_m(x)$ é finita e denotaremos por $r_m(x, x')$ a taxa de salto de x para x' para cada par distinto de configurações x e x' . Vamos assumir que X não explode adotando a condição de que $r_m(x)$ é limitada para todo $x \in S$.

Como em [14], vamos fazer uma escolha de funções coordenadas $x^i : S \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, d$ e seja $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d) : S \rightarrow \mathbb{R}^d$. Considere o processo que toma valores em \mathbb{R}^d denominado $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ dado por $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^d) = \mathbf{x}(X_t)$. Ou seja, o que estamos fazendo é criar funções coordenadas agindo nas configurações do sistema e levando-as para um escalar de modo que elas transformem o processo de Markov a tempo contínuo em um processo d dimensional.

3. Campo Médio

Defina, para cada configuração $x \in S$, o vetor drift

$$\beta(x) = \sum_{x' \neq x} (\mathbf{x}(x') - \mathbf{x}(x)) r_m(x, x')$$

e $\beta(x) = \infty$ se a série não convergir absolutamente.

Nosso objetivo é derivar estimativas explícitas que permitam aproximar \mathbf{X} pela solução de uma equação diferencial. Também vamos discutir como o cálculo de certas probabilidades associadas pode ser simplificado quando essas aproximações puderem ser feitas.

Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ e seja $x_0 \in U$. Seja $b : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função Lipschitz. A equação diferencial $\dot{x}_t = b(x_t)$ possui solução maximal com respeito a ζ única $(x_t)_{t \leq \zeta}$ (i.e., não existe solução em U definida num intervalo de tempo maior do que t qualquer), começando de x_0 , com $x_t \in U \forall t < \zeta$.

Nossa análise consistirá em comparar as equações

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_0 + M_t + \int_0^t \beta(X_s) ds, \quad 0 \leq t \leq T_1$$

$$x_t = x_0 + \int_0^t b(x_s) ds, \quad 0 \leq t \leq \zeta$$

em que $T_1 = \inf\{t \geq 0 : \beta(X_t) = \infty\}$ e a primeira equação serve para definir o processo $(M_t)_{0 \leq t \leq T_1}$. Este processo é um martingal

Vamos usar duas desigualdades para conseguir uma estimativa. A primeira delas é a desigualdade \mathcal{L}^2 de Doob como mostrada em [16], que afirma que dado um martingal $(M_t)_{t \leq t_0}$ vale

$$\mathbb{E}(\sup_{t \leq t_0} |M_t|^2) \leq 4\mathbb{E}(|M_{t_0}|^2)$$

A segunda, é o lema de Gronwall como mostrado em [15], que afirma que para qualquer função real f integrável em $[0, t_0]$, vale que

$$f(t) \leq C + D \int_0^t f(s) ds \forall t \Rightarrow f(t_0) \leq C e^{Dt_0} \quad (3.1)$$

Seja K a constante de Lipschitz de \dot{b} em U com relação à norma euclideana $|\cdot|$. Fixe $t_0 < \zeta$ e $\varepsilon > 0$ e assumamos que $\forall x \in S$ e $t \leq t_0$ vale que $|\mathbf{x}(x') - x_t| \leq \varepsilon \Rightarrow \mathbf{x}(x) \in U$.

3. Campo Médio

Defina $\delta = \frac{\varepsilon e^{-Kt_0}}{3}$ e fixe $\varepsilon^2 > A > 0$. Defina $T = \inf\{t \geq 0 : \mathbf{X}_t \notin U\}$ e também

$$\alpha(x) = \sum_{x' \neq x} |\mathbf{x}(x') - \mathbf{x}(x)|^2 r_m(x, x')$$

com $x \in S$.

Agora, sendo $a \wedge b := \min\{a, b\}$, considere os eventos

$$\Omega_0 = \{|\mathbf{X}_0 - x| \leq \delta\},$$

$$\Omega_1 = \left\{ \int_0^{T \wedge t_0} |\beta(X_t) - b(\mathbf{x}(X_t))| dt \leq \delta \right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ \int_0^{T \wedge t_0} \alpha(X_t) dt \leq At_0 \right\}, \text{ e}$$

$$\Omega'_2 = \{T \wedge t_0 \leq T_1 \text{ e } \sup_{t \leq T \wedge t_0} |M_t| \leq \delta\}$$

considere a função aleatória $f(t) = \sup_{s \leq t} |\mathbf{X}_s - x_s|$ no intervalo $[0, T \wedge t_0]$. Então

$$f(t) \leq |\mathbf{X}_0 - x_0| + \sup_{s \leq t} |M_s| + \int_0^t |\beta(X_s) - b(\mathbf{x}(X_s))| ds + \int_0^t |b(\mathbf{X}_s) - b(x_s)| ds$$

Logo, no evento $\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega'_2$, f satisfaz 3.1 com $C = 3\delta$ e $D = K$, então $f(T \wedge t_0) \leq \varepsilon$, o que implica que $T > t_0$ e então $f(t_0) \leq \varepsilon$. Considere agora o tempo de parada

$$\bar{T} = T \wedge t_0 \wedge \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \alpha(X_s) ds > At_0\}$$

Por Cauchy-Schwartz, vale que $|\beta(x)|^2 \leq r_m(x)\alpha(x)$ para todo $x \in S$, logo $\bar{T} \leq T_1$. Agora, usando a desigualdade de Doob, vale que $\mathbb{E}(\sup_{t \leq \bar{T}} |M_t|^2) \leq 4At_0$.

Em Ω_2 , temos que $\bar{T} = T \wedge t_0$, logo $\Omega_2 \setminus \Omega'_2 \subset \{\sup_{t \leq \bar{T}} |M_t| > \delta\}$ e portanto, pela desigualdade de Chebyshev, $\mathbb{P}(\Omega_2 \setminus \Omega'_2) \leq 4At_0/\delta^2$. Assim, vale o seguinte Teorema de [8]:

Teorema 15. *Nas condições definidas, acima, vale:*

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq t_0} |\mathbf{X}_t - x_t| > \varepsilon) \leq 4At_0/\delta^2 + \mathbb{P}(\Omega_0^c \cup \Omega_1^c \cup \Omega_2^c)$$

3. Campo Médio

3.2. Equações Diferenciais

Para cada $N \geq 1$, seja $X^N = (X_t^N)_{t \geq 0}$ um processo markoviano com estado de espaço finito S_N e gerador G_N . Seja $f_N : S_N \rightarrow \mathbb{R}$ um conjunto de funções indexado por $N \in \mathbb{N}$.

O que queremos fazer é entender as condições que fazem com que os processos $f_N(X_t^N)_{t \geq 0}$ se aproximem de soluções $(y_t)_{t \geq 0}$ de uma equação diferencial no limite $N \rightarrow \infty$.

Definiremos duas funções $\alpha = \alpha_N$ e $\beta = \beta_N$ que descrevem respectivamente a variação quadrática e o drift do processo $f(X_t)$, isto é, essas funções são dadas por:

$$\alpha(x) := \sum_{x' \in S} G(x, x') (f(x') - f(x))^2$$

$$\beta(x) := \sum_{x' \in S} G(x, x') (f(x') - f(x))$$

A ideia é que se α tende a zero e β se aproxima de $f(X_t)$ por uma função bastante especial, uma função Lipschitz, então $f(X_t)$ deve estar, no limite, dado pela solução de uma equação diferencial.

Vamos restringir a imagem das funções f_N e, ao invés delas tomarem valores na reta real \mathbb{R} , elas vão tomar valores num intervalo fechado I com fronteiras à esquerda e à direita dadas por $I_- := \inf I$ e $I_+ := \sup I$, que podem ser finitos ou não. Vamos assumir que existe uma função $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ globalmente Lipschitz tal que

$$\sup_{x \in S_N} |\beta_N(x) - b(f_N(x))| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (3.2)$$

Isto é, a função de drift β é uniformemente aproximada por $b \circ f_N$. Por fim, assumindo que $b(I_-) \geq 0$ se $I_- > -\infty$ e $b(I_+) \leq 0$ se $I_+ < \infty$, a equação diferencial $\frac{\partial}{\partial t} y_t = b(y_t)$ com $t \geq 0$ tem uma única solução $(y_t)_{t \geq 0}$ no intervalo I para cada estado inicial $y_0 \in I$.

Teorema 16. *Assuma que $f_N(X_0^N)$ converge em probabilidade a y_0 e que, além da existência de uma função b como em 3.2, vale que*

$$\sup_{x \in S_N} \alpha_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Então, para cada $T < \infty$ e $\epsilon > 0$, vale que

$$\mathbb{P} [|f_N(X_t^N) - y_t| \leq \epsilon \forall t \in [0, T]] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

3. Campo Médio

Demonstração. Vamos fixar $T > 0$ e $\varepsilon > 0$ e também $y_0 \in I$. Vamos denotar por L a constante de Lipschitz da função b . O Teorema 15 permite não nos permite falar sobre f_N em todo o intervalo I , mas sim com a condição adicional de que $f_N(x)$ não é maior do que ε de um valor possível da solução da equação diferencial ordinária. No nosso caso, essas hipóteses adicionais já serão automaticamente satisfeitas dada a convergência em probabilidade e a finitude do espaço de estado.

Defina $\delta := \frac{1}{3}\varepsilon e^{-LT}$. Vamos considerar os eventos $\Omega_0 := \{|f(X_0) - y_0| \leq \delta\}$ e $\Omega_1 := \{\int_0^T |\beta(X_t) - b(f(X_t))| dt \leq \delta\}$. Para $K > 0$ vamos definir

$$\Omega_{K,2} := \left\{ \int_0^T \alpha(X_t) dt \leq KT \right\}$$

Assim sendo, o Teorema 15 nos dá que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t \in [0, T]} |f(X_t) - y_t| > \varepsilon \right] \leq 4KT\delta^{-2} + \mathbb{P}(\Omega_0^C \cup \Omega_1^C \cup \Omega_{K,2}^C). \quad (3.3)$$

Assumindo que $f_N(X_0^N) \rightarrow y_0$ em probabilidade implica que $\mathbb{P}(\Omega_0^C) \rightarrow 0$ conforme $N \rightarrow \infty$. Defina $A_N := \sup_{x \in S_N} \alpha_N(x)$ e $B_N := \sup_{x \in S_N} |\beta_N(x) - b(f_N(x))|$. Então $A_N \rightarrow 0$ da hipótese do teorema e $B_N \rightarrow 0$ da escolha de b . Como

$$\int_0^T \alpha(X_t) dt \leq A_n T$$

temos que $\mathbb{P}(\Omega_{A_N,2}^C) = 0$ para todo N . Fazendo $K = A_N$ em 3.3, temos que o lado direito dessa desigualdade vai a zero quando $N \rightarrow \infty$. \square

3.3. Modelo do contato

Assim, considere o processo de contato num grafo completo $G = G(V, E)$ finito com gerador dado por:

$$\begin{aligned} G_{\text{cont}} f(x) &:= \lambda \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \{ f(\text{cont}_{i,j}(x)) - f(x) \} + \\ &+ \sum_{i \in V} \{ f(\text{rec}_i(x)) - f(x) \} \quad (x \in \{0, 1\}^V) \end{aligned}$$

em que $\mathcal{N}_i = \{j : \{i, j\} \in E\}$, isto é, \mathcal{N}_i é a vizinhança do vértice i ; temos que cada vértice se

3. Campo Médio

recupera com taxa 1, e que agora a taxa de contaminação é a total entre todas as contaminações de um dado vértice.

Seja V um conjunto com N elementos do conjunto de vértices de $G = G(V, E)$. Temos que $E_N = \{\{i, j\} : i, j \in V_N\}$. Assim, vamos estudar o comportamento do processo no grafo $G = G(V_N, E_N)$. Começamos buscando entender a fração de vértices infectados dada por $\bar{X}_t = \bar{X}_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i \in V_N} X_t(i)$, com $t \geq 0$. Assim, temos que $\bar{X}_t \in \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1\}$ e, sendo \bar{x} um possível valor de \bar{X}_t , temos as seguintes taxas:

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x} + \frac{1}{N} \quad \text{com taxa } r_+(\bar{x}) := N(1 - \bar{x})\lambda\bar{x}$$

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x} - \frac{1}{N} \quad \text{com taxa } r_-(\bar{x}) := N\bar{x}$$

Como $r_+(\bar{x})$ e $r_-(\bar{x})$ são apenas funções de \bar{x} , temos que $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo.

Queremos usar o Teorema 16 para concluir que \bar{X} pode, para N suficientemente grande, ser aproximado por uma solução de uma equação diferencial. Calculemos então α e β :

$$\alpha_N(x) = r_+(\bar{x})\frac{1}{N^2} + r_-(\bar{x})\frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}(\lambda\bar{x}(1 - \bar{x}) + \bar{x})$$

$$\beta_N(x) = r_+(\bar{x})\frac{1}{N} + r_-(\bar{x})\frac{1}{N} = (\lambda\bar{x}(1 - \bar{x}) + \bar{x})$$

E pelo teorema segue que o limite do campo médio quando $N \rightarrow \infty$, a fração de indivíduos infectados pode ser aproximada pelas soluções da equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{X}_t = b_\lambda(\bar{X}_t) \quad \text{com } (t \geq 0), \text{ em que } b_\lambda(\bar{x}) := \lambda\bar{x}(1 - \bar{x})$$

a equação $b_\lambda(\bar{x}) = 0$ tem soluções $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = 1 - \lambda^{-1}$, sendo que esta segunda está no intervalo $[0, 1]$ dos possíveis valores de \bar{X}_t se, e somente se, $\lambda \geq 1$.

Ou seja, o ponto fixo $\bar{x} = 0$ é estável para $\lambda \leq 1$ mas instável para $\lambda > 1$, para o caso em que $\bar{x} = 1 - \lambda^{-1}$ é o único ponto fixo para todas as soluções que começam com estado não nulo.

3. Campo Médio

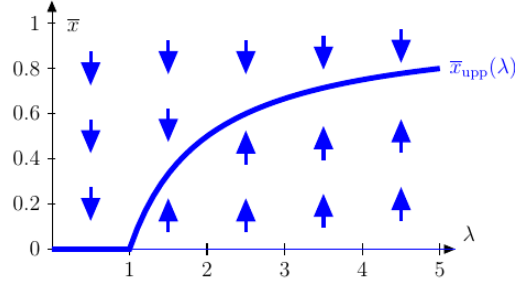


Figura 3.1.: Pontos fixos no campo médio no modelo do contato em função do parâmetro λ [8]

Deixando $\bar{x}_{\text{upp}}(\lambda) := 0 \vee (1 - \lambda^{-1})$ denotar o ponto fixo estável, vemos que o campo médio para o modelo do contato exibe uma transição de fase de segunda ordem no ponto crítico $\lambda_c = 1$. Como $\bar{x}_{\text{upp}}(\lambda) \propto (\lambda - \lambda_c)$ conforme $\lambda \downarrow \lambda_c$, o ponto crítico associado é $c = 1$ (coerente com o que se sabe do processo de contato em dimensões $d \geq 4$).

3.4. Modelo do Votante

Vamos considerar o modelo do votante em um grafo completo $G = G(V, E)$ finito com apenas dois partidos, isto é, o estado de espaço é dado por $S = \{0, 1\}$; de maneira análoga, considere V_N um conjunto com N vértices de V . Considerando o grafo completo $G = G(V_N, E_N)$ com os vértices dados por V_N , temos o gerador

$$G_{\text{vot}} f(x) = \frac{1}{|V_N|} \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \{f(\text{vot}_{i,j}(x)) - f(x)\} \quad \text{com } (x \in \{0, 1\}^V)$$

em que ε é o conjunto de arestas orientadas de $G = G(V_N, E_N)$. Queremos entender qual a fração de eleitores que votariam no partido 1, isto é, $\bar{X}_t = \bar{X}_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i \in V_N} X_t(i)$, com $t \geq 0$. Assim, temos que $\bar{X}_t \in \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1\}$ e, sendo \bar{x} um possível valor de \bar{X}_t , temos as seguintes taxas:

$$\begin{aligned} \bar{x} &\rightarrow \bar{x} + \frac{1}{N} && \text{com taxa } r_+(\bar{x}) := N(1 - \bar{x})\bar{x} \\ \bar{x} &\rightarrow \bar{x} - \frac{1}{N} && \text{com taxa } r_-(\bar{x}) := N(1 - \bar{x})\bar{x} \end{aligned}$$

Note que $N(1 - \bar{x})$ é o número de vértices atribuídos o valor 0, e cada um desses vértices decidem-se por 1 com taxa \bar{x} . A derivação de $r_-(\bar{x})$ é feita de maneira análoga. Calculando α e

3. Campo Médio

β , temos

$$\alpha_N(x) := r_+(\bar{x})\frac{1}{N^2} + r_-(\bar{x})\frac{1}{N^2} = \frac{2}{N}\bar{x}(1 - \bar{x})$$
$$\beta_N := r_+(\bar{x})\frac{1}{N} - r_-(\bar{x})\frac{1}{N} = 0$$

Usando novamente o Teorema 16, vemos que o limite quando $N \rightarrow \infty$ faz com que o processo $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$ é bem aproximado pelas soluções da equação diferencial $\frac{\partial}{\partial t} \bar{X}_t = 0$ para $(t \geq 0)$, isto é, t é bem aproximado por uma função constante de t .

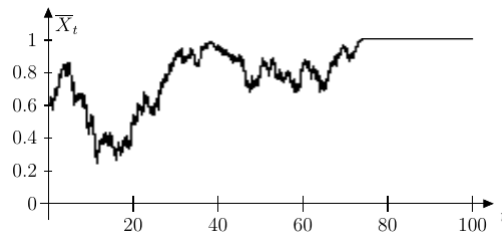


Figura 3.2.: Consenso de opiniões após t suficientemente no modelo do votante num grafo completo. [8]

4. Coexistência e Simulações

No modelo do votante estamos principalmente interessados no seu comportamento assintótico. Uma vez que as taxas de conversão de um vértice depende de seus vizinhos, é óbvio que quando todos os vértices tomam o mesmo valor, o sistema inteiro para de mudar para sempre.

Portanto, neste modelo temos duas distribuições estacionárias extremas triviais, δ_0 e δ_1 , que representam o consenso. A questão principal que vamos discutir é se existem ou não outras, que então representariam a coexistência de diferentes opiniões em equilíbrio.

Definição 17. Dizemos que ocorre **coexistência** se houver uma distribuição estacionária com densidades positivas de 0 e 1's.

Definição 18. Se para todos x, y e todas as configurações iniciais $\eta \in S := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[\eta_t(x) \neq \eta_t(y)] = 0$$

dizemos que ocorre **clusterização**.

As questões que estamos interessados versam sobre a existência de clusterização e ou de coexistência. E no caso de coexistência no tamanho de cada componente de uma configuração. Para ser mais preciso estamos interessados em determinar se temos percolação em cada uma dessas componentes.

Um comportamento assintótico relevante é o fenômeno de percolação, isto é, quando temos a formação de componentes conexas infinitas.

Definição 19. **Clusters** são definidos como componentes conexas em $\{x : \eta(x) = 0\}$ ou $\{x : \eta(x) = 1\}$.

Dizemos que temos percolação $\{x : \eta(x) = 0\}$ (ou $\{x : \eta(x) = 1\}$) se essa componente for infinita com probabilidade positiva.

Nos teoremas seguintes apresentamos alguns dos resultados conhecidos para os modelos linear e threshold nos baseando por [17] e [18].

4. Coexistência e Simulações

Como desenvolvido em [18], no modelo linear do votante, sendo $p(\cdot, \cdot)$ as probabilidades de transição do passeio aleatório irredutível em \mathbb{Z}^d , e, portanto, temos que $p(x, y) \geq 0$ e $\sum_y p(x, y) = 1$.

Neste modelo, as taxas de transição são funções lineares na configuração η dadas por:

$$c(x, \eta) = \begin{cases} \sum_y p(x, y)\eta(y) & \text{para todo } \eta(x) = 0 \\ \sum_y p(x, y)(1 - \eta(y)) & \text{para todo } \eta(x) = 1 \end{cases}$$

O próximo Teorema apresentado em [18] nos dá uma relação entre coexistência, clusterização e coexistência:

Teorema 20. *Para o modelo linear do votante temos que*

1. o processo clusteriza se $d = 1$ e $\sum_x |x|p(0, x) < \infty$, ou se $d = 2$ e $\sum_x |x|^2 p(0, x) < \infty$;
2. O processo coexiste se $d \geq 3$

Já o modelo threshold é definido da seguinte forma seguindo a notação de [17]: seja \mathcal{N} uma vizinhança de $0 \in \mathbb{Z}^d$ obtida intersectando qualquer conjunto compacto, conexo e simétrico (por exemplo, uma bola de raio r centrada 0 na métrica Euclidiana) de \mathbb{R}^d com \mathbb{Z}^d ; vamos assumir que \mathcal{N} contém todos os vetores $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ (já que, caso contrário, $\mathcal{N} = \{0\}$).

Para um inteiro positivo T , o modelo threshold de vizinhança \mathcal{N} e threshold T possui as taxas de transições dadas por:

$$c(x, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\{y \in x + \mathcal{N} : \eta(y) \neq \eta(x)\}| \geq T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

De maneira mais simples, o modelo nos diz que a taxa de transição do vértice x é 1 se o número de vértices que não tem o mesmo valor de x é maior ou igual que o threshold T ; caso contrário, o vértice x fica no mesmo estado e não muda.

O próximo teorema, apresentado em [17], nos dá resultados sobre coexistência, clusterização e convergência desse modelo em \mathbb{Z}^d .

Teorema 21. *Para o modelo threshold temos:*

1. Se $T > \frac{|\mathcal{N}|-1}{2}$, então o processo fixa no sentido de que cada vértice muda de opinião apenas finitas vezes.

4. Coexistência e Simulações

2. Se $d = 1$ e $T = \frac{|\mathcal{N}|-1}{2}$, então o processo clusteriza.
3. Se $T = 1$ e $R \geq 1$ e $d > 1$ então o processo em \mathbb{Z}^d coexiste.

4.1. Grafos aleatórios

Um grafo G é um par $G = G(V, E)$, em que V denota o conjunto dos vértices e E , o conjunto das arestas. Se $V = \{v_i : i \in I\}$, então os elementos de E são pares ordenados da forma (v_i, v_j) , em que $i, j \in I$. Assim, podemos ver E como um subconjunto de $V \times V$, em que $(v_i, v_j) \in E$ se, e somente se, há uma aresta que liga v_i a v_j . Aqui, vamos considerar apenas grafos não direcionados, isto é, (v_i, v_j) e (v_j, v_i) referem-se à mesma aresta. Quando $(v_i, v_j) \in E \forall i, j \in I$, dizemos que o grafo é completo. O conjunto dos vizinhos de um vértice v_i é denotado por $D_i = \{v_j : (v_i, v_j) \in E\}$. O grau de um vértice v_i é definido como $|D_i|$, e é denotado por $\deg(v_i)$.

Quando dizemos que um grafo é aleatório, queremos dizer que ele foi escolhido com uma certa distribuição de probabilidade entre um conjunto de grafos. O modo como essa escolha é feita pode garantir (ou não) algum controle sobre as propriedades deste grafo. Os dois modelos de grafos aleatórios que serão apresentados são variações do trabalho de Erdős–Rényi.

Uma maneira intuitiva de construir um grafo aleatório é começar com um grafo completo de n vértices e deletar suas arestas seguindo alguma regra. Podemos associar a cada elemento de E uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p . Assim, após o sorteio, cada aresta fica com probabilidade p e sai com $1 - p$ de maneira independente. Se p for próximo de 1, devemos ter um grafo conexo; caso contrário, o grafo espera-se ser desconexo. Quando $p = 0.5$, temos pouquíssimo controle sobre as propriedades do grafo. Note que quando deletamos uma aresta $(v_i, v_j) \in E$, também deletamos (v_j, v_i) , já que o grafo é não direcionado. Esse modelo de construção é conhecido como binomial.

Um outro modelo de geração de grafos aleatórios é escolher uniformemente um grafo entre os grafos de n vértices com cada vértice tendo grau k . Note que aqui temos como condição necessária que o produto nk seja par, já que do lema do aperto de mão, $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$. Assim, dado um vértice $v_i \in V$, podemos construir k meias arestas e conectá-las escolhendo de maneira uniforme entre cada meia aresta disponível, isto é, que ainda não tenha sido ligada. A relevância desse método é que ele garante quantas ligações cada vértice realiza.

4. Coexistência e Simulações

4.2. Simulações

Como vimos na seção 3.4, o modelo do votante em grafos completos admite assintoticamente apenas a existência de um único cluster, i.e., não admite coexistência. Utilizando os algoritmos elaborados, simulamos a dinâmica do modelo do votante para grafos aleatórios de Bernoulli $G = (V, E)$ de parâmetro $p = 1 - \lambda$. As simulações realizadas mostraram a possibilidade da existência de um parâmetro crítico relacionada à frequência de coexistência nesse modelo. Para $\lambda < \frac{1}{2}$, temos a formação de consenso, i.e., a existência de um único cluster para N suficientemente grande. Para $\lambda > \frac{1}{2}$, observamos a coexistência de opiniões divergentes. Também observamos que a frequência de coexistência cresce rapidamente em função do parâmetro λ do grafo.

λ	Frequência de Coexistência
0	0
\vdots	\vdots
0.45	0
0.5	0.025
0.55	0.05
0.6	0.05
0.65	0.075
0.7	0.1
0.75	0.175
0.8	0.3
0.85	0.575
0.9	0.975

Tabela 4.1.: Frequência de Coexistência para Grafos de Bernoulli $N=50$. Foram realizadas 40 simulações para cada λ .

4. Coexistência e Simulações

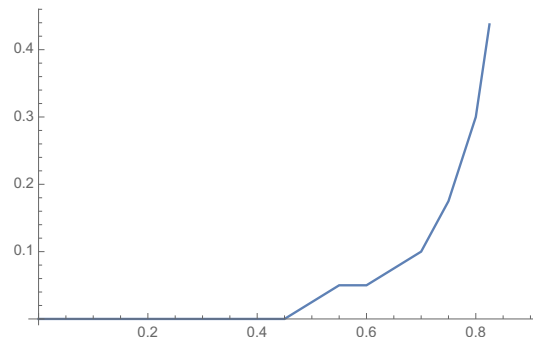


Figura 4.1.: Frequência de Coexistência para Grafos de Bernoulli com $N = 50$. Foram realizadas 40 simulações para cada λ .

A. Algoritmos

Foram construídos pacotes em Mathematica para a simulação de sistema de partículas interagentes em grafos gerais.

O próximo código tem por finalidade simular a dinâmica do modelo de contato num grafo. Ele parte atribuindo a cada vértice uma quadrupla, cuja primeira entrada é o número do vértice no grafo, a segunda é o estado dele (saudável, infectado, morto), a terceira é uma variável aleatória de distribuição exponencial de parâmetro λ e a quarta é uma variável aleatória exponencial de parâmetro 1. A dinâmica segue a mesma descrição feita em 3.3.

```
1 \[Lambda] = 12; estados = {0, 1, 2};
2 (*sau=0 inf=1 morto=2*)
3 Estadoinicial [graph_] := Join {{{1, 1, RandomVariate[ExponentialDistribution[\[Lambda]]], RandomVariate[
   ExponentialDistribution[1]]}, Table[{i, 0, Infinity, Infinity}, {i, 2, Length[VertexList[graph]]}]
4 seed2 = Table{RandomVariate[ExponentialDistribution[1]], 1}, 1700];
5 seed3 = Table{RandomVariate[ExponentialDistribution[\[Lambda]]], 0}, 1700];
6 est2 = Estadoinicial [teste]
7 Menorrelogio[lista_] := Block{{ relinf, relmort},
8   relinf = Sort[ lista, #1[[3]] < #2[[3]] &][[1]]; relmort = Sort[ lista, #1[[4]] < #2[[4]] &][[1]];
9   If [ relinf [[3]] < relmort [[4]], relinf, relmort] ]
10 Atualizar3[graph_, estado_] := Block{{vizinhos, estadosvizinhos, esta, numero, quematualiza, vertices, a
   },
11 vertices = Sort[VertexList[graph]]; quematualiza = Menorrelogio[estado][[1]]; vizinhos = AdjacencyList[
   graph, quematualiza];
12 estadosvizinhos = DeleteCases[Table[estado[[i]], {i, vizinhos}], (#1[[2]] != 0 &); quematualiza =
   Menorrelogio[estado];
13 esta = estado;
14 If [quematualiza[[2]] < quematualiza[[3]],
15   If [ Length[estadosvizinhos] != 0, numero = RandomChoice[estadosvizinhos][[1]]];
```

A. Algoritmos

```
16 esta[[numero]] = {numero, 1, RandomVariate[ExponentialDistribution[ $\lambda$ ]], RandomVariate[
    ExponentialDistribution[1]]};
17 a = quematualiza[[1]]; esta = ReplacePart{esta, a -> {a, 2, Infinity, Infinity }}];
18 esta ]
19
20 Dinamica3[graph_, passos_] := Block{dim, dim[0] = est2;
21 For[n = 1, n <= passos, n++, dim[n] = Atualizar3[graph, dim[n - 1]] ];
22 Table[dim[i], {i, 0, passos}] ]
```

Os próximos dois algoritmos geram grafos aleatórios a partir do método de Bernoulli ou a partir dos parâmetros n (número de vértices) e m (número de ligações de cada vértice). Note que, através do segundo método, temos um grafo homogêneo de grau m .

```
1 Grafos aleatórios
2
3 Bernoulli
4
5 GrafoAleatorio [n_, p_] :=
6 Block{i,
7     nedges = (n*(n - 1))/2;
8     Arestas = EdgeList[CompleteGraph[n]];
9     Moedas = RandomVariate[BernoulliDistribution[p],
10     nedges];
11
12 ArestasNovas = Table[0, {i, nedges}];
13 For[i = 1, i <= nedges, i++,
14     If [Moedas[[i]] == 0, ArestasNovas[[i]] = 0, ArestasNovas[[i]] = Arestas[[i ]]];
15
16 Graph[DeleteCases[ArestasNovas, 0], VertexLabels -> "Name"]
17
18 GrafoAleatorio[12, 0.7]
```

A. Algoritmos

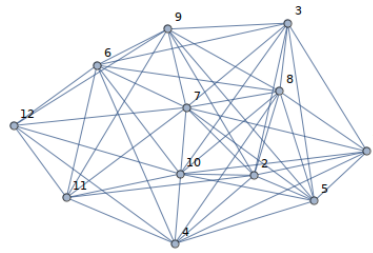


Figure A.1.: Grafo aleatório gerado por Bernoulli

```

1 Parâmetros m e n
2 GrafoAleatorio2[n_, m_] := Block[{i, N, j, t, a, p}, Vertices = Table[i, {i, n}]; GrausDisponiveis = Table
  [m, {i, n}]; N = 2*n*m;
3 Arestas = Table[0, {i, N}]; j = 1; Conexoes = Table[0, {i, m}]; t = 1;
4 For[a = 1, a <= n, a++,
5   For[l = 1, l <= m, l++,
6     If [GrausDisponiveis[[a]] > 0,
7       For[p = 0, p <= n, p++,
8         If [GrausDisponiveis[[p]] <= 0, Vertices [[p]] = 0, Vertices [[p]] = p]];
9       Ligacao = RandomChoice[DeleteCases[Vertices, 0]];
10      Conexoes[[t]] = Ligacao; t++; Arestas[[j]] = a <-> Ligacao; j++;
11      GrausDisponiveis[[Ligacao]] = GrausDisponiveis[[Ligacao]] - m; GrausDisponiveis[[a]] = GrausDisponiveis
        [[a]] - 1; ] ]
12 For[r = 1, r <= m, r++,
13   If [Conexoes[[r]] != a,
14     GrausDisponiveis[[Conexoes[[r]]]] = GrausDisponiveis[[Conexoes[[r]]]] + 1,
15     GrausDisponiveis[[a]] = GrausDisponiveis[[a]] + 1; t = 1; ] ]
16 Conexoes = Table[0, {i, m}]; t = 1; ]
17 Graph[DeleteCases[Arestas, 0], VertexLabels -> "Name" ]
18 GrafoAleatorio2[5, 2]

```

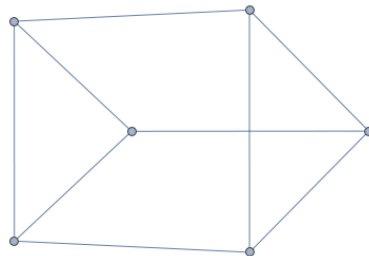


Figure A.2.: Grafo aleatório gerado exigindo $n = 5$ e $m = 2$

A. Algoritmos

O próximo código gera um relógio para cada vértice do grafo com distribuição exponencial de parâmetro 1. A saída do programa dá a sequência de chamada dos vértices, sendo que a cada vértice foi atribuído um desse relógio.

```
1 Relogio
2 seed = RandomVariate[ExponentialDistribution[1], 10000];
3 relogio[graph_, numero_] := Mod[Flatten[Table[Position[Ordering[Take[seed, numero]], i], {i, 1, numero}]],
4   Length[VertexList[graph]]] /. {0 -> Length[VertexList[graph]]}
5 Take[seed, 10] {0.609607, 1.75359, 0.506106, 0.956463, 0.704033, 0.084663, 2.23239, \ 0.555516, 2.7619,
6   0.229925}
7 Ordering[Take[seed, 10]] {6, 10, 3, 8, 1, 5, 4, 2, 7, 9}
```

```
7 relogio[teste, 11] {5, 9, 3, 7, 6, 1, 10, 4, 11, 2, 8}
```

O seguinte programa escolhe uma configuração inicial aleatória atribuindo a cada vértice um valor entre 0, 1 de modo a simular, por exemplo, a escolha de um cidadão sobre dois partidos que disputam uma eleição.

```
1 Estado inicial
2 Estado Inicial estados = {0, 1};
3 Estadoinicial [graph_] :=
4   RandomChoice[estados, Length[VertexList[graph]]] Plotaestado[graph_, state_] :=
5   Block[{G, table, edges, generator, i, cores, estadossubs}, cores = {Blue, Red};
6   subs = Table[i -> colors[[i + 1]], {i, 0, 1}]; estadossubs = state /. subs;
7   cores = Table[j -> estadossubs[[j]], {j, VertexList[graph]}]; Graph[graph, VertexStyle -> cores,
8     VertexLabels -> "Name"]
9 est = Estadoinicial [grafoteste] Plotaestado[grafoteste, est]
10 {1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1}
```

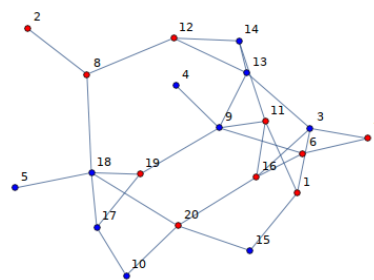


Figure A.3.: Estado Inicial

A seguinte dinâmica manipula o grafo da seguinte maneira: quando o relógio do vértice toca, ele muda de opinião independente da configuração dos seus vizinhos. Pode-se notar que não há uma convergência no estado final.

A. Algoritmos

```

1 Dinâmica (Sempre muda)
2 seedestados = RandomChoice[estados, 10000];
3 Atualizar [estado_, numero_] := Block[{esta}, esta = estado;
4   esta[[numero]] = Mod[est[[numero]] + 1, Length[estados]]; esta]
5 Dinamica[graph_, passos_] :=
6   Block[{rel, esta, dim}, rel = relógio [graph, passos];
7     esta = Estadoinicial [graph]; dim[0] = esta;
8     dim[n_] := Atualizar [dim[n - 1], relógio [graph, passos][[n ]]];
9     Table[dim[i], {i, 1, passos} ]
10 a = Dinamica[grafoteste, 30]; Plotaestado[grafoteste, a [[1]]]
11 ListAnimate[Table[Plotaestado[grafoteste, a[[i ]]], {i, 1, 30}]]

```

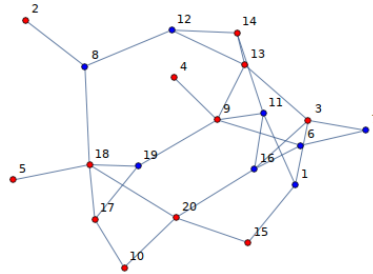


Figure A.4.: Estado final da dinâmica sempre muda

Já a seguinte dinâmica realiza o seguinte processo: quando o relógio toca, o vértice escolhe sua opinião de acordo com a opinião da maioria dos seus vizinhos; em caso de empate, a decisão é aleatória. Note que aqui existe a formação de dois aglomerados que compartilham da mesma opinião.

```

1 Dinâmica (Vizinho)
2 Atualizar2 [graph_, estado_, numero_] :=
3   Block[{vizinhos, estadosvizinhos, contafreq, esta}, vizinhos = AdjacencyList[graph, numero];
4     estadosvizinhos = Table[estado[[i ]], {i, vizinhos}]; contafreq = Commonest[estadosvizinhos];
5     esta = estado; esta[[numero]] = RandomChoice[contafreq]; esta]
6 Dinamica2[graph_, passos_] :=
7   Block[{rel, dim, relógiolocal },
8     relógiolocal := relógio [graph, passos]; dim[0] = est;
9     For[n = 1, n <= passos, n++,
10      dim[n] = Atualizar2[graph, dim[n - 1], relógiolocal [[n ]]] ];
11     Table[dim[i], {i, 0, passos} ] est = Estadoinicial [grafoteste ];
12 a = Dinamica2[grafoteste, 30];
13 ListAnimate[Table[Plotaestado[grafoteste, a[[i ]]], {i, 1, 30}]]

```

A. Algoritmos

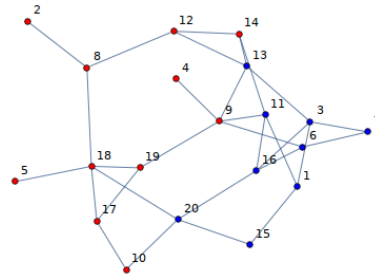


Figure A.5.: Estado final da dinâmica do vizinho

O próximo algoritmo foi feito para contar a frequência de coexistência de opiniões diferentes no grafo de Bernoulli de parâmetro λ com N vértices.

```

1  Atualizar2[graph_, estado_, numero_] := Block{{vizinhos, estadosvizinhos, contafreq, esta},
2  vizinhos = AdjacencyList[graph, numero];
3  estadosvizinhos = Table[estado[[i]], {i, vizinhos}];
4  contafreq = Commonest[estadosvizinhos];
5  esta = estado;
6  If [FreeQ[contafreq, esta[[numero]]], esta[[numero]] = RandomChoice[contafreq]];
7  esta
8  ]
9
10 Dinamica2[graph_, passos_] := Block{{rel, dim, relogiocal},
11 relogiocal := relogio[graph, passos];
12 dim[0] = est;
13 For[n = 1, n <= passos, n++,
14   dim[n] = Atualizar2[graph, dim[n - 1], relogiocal [[n]]
15 ];
16 Table[dim[i], {i, 0, passos}]
17 ]
18
19 Dinamica2final[graph_, passos_] := Block{{rel, dim, relogiocal},
20 relogiocal := relogio[graph, passos];
21 dim[0] = est;
22 For[n = 1, n <= passos, n++, dim[n] = Atualizar2[graph, dim[n - 1], relogiocal [[n]]]
23 ];
24 dim[passos]
25 ]
26

```

A. Algoritmos

```
27 dimf [\ Lambda]_, n_] := Block{}, teste = Aleatorio[CompleteGraph[n], \[Lambda]];
28 est = Estadoinicial [teste];
29 Total[Dinamica2final[testeste, 100]]]
30
31 Coexistencia[\ Lambda]_, n_] := Block{as},
32 as = dimf [\ Lambda], n];
33 If [as == 0 || as == n, 0, 1]
34 ]
```

Referências Bibliográficas

- [1] DURRETT, R.; KESTEN, H. (1991). Random walks, Brownian motion, and interacting particle systems.
- [2] DURRETT, R. (1995). Ten lectures on particle systems. Lectures on Probability Theory, 97-201.
- [3] KINGMAN, J. F. C. (1992). Poisson processes. Vol. 3. Clarendon Press.
- [4] LIGGETT, T. M. (2010). Continuous time Markov processes: an introduction (Vol. 113). American Mathematical Soc..
- [5] LIGGETT, T. (2012). Interacting particle systems (Vol. 276). Springer Science & Business Media.
- [6] LIGGETT, T. M. (2002). Interacting particle systems - An introduction. In School and conference on probability theory (Vol. 17, pp. 307-340).
- [7] SCHOPFER, S. (2012). Limit Behaviour of the Voter Model, Exclusion Process and Regenerative Chains (Doctoral dissertation, ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE).
- [8] SWART, J. M. (2017). A course in interacting particle systems. arXiv preprint arXiv:1703.10007
- [9] RÁTH, B.; VALESIN, D. (2015). Percolation on the stationary distributions of the voter model. arXiv preprint arXiv:1502.01306.
- [10] FERRARI, P. A.; GALVES, A. (1997). Acoplamento em processos estocásticos, IMPA
- [11] SCHINAZI, RINALDO B. (2014). Classical and spatial stochastic processes: with applications to biology. Springer.

Referências Bibliográficas

- [12] SCHINAZI, RINALDO B. (2014). Classical and Spatial Stochastic Processes. Springer.
- [13] NORRIS, JAMES R. (1998). Markov chains. No. 2. Cambridge university press.
- [14] DARLING, R. W. R.; JAMES R. NORRIS. (2008). Differential equation approximations for Markov chains. Probability surveys 5, 37-79.
- [15] GRONWALL, T. H. (1919). Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Annals of Mathematics, 292-296.
- [16] R, DANIEL; M, YOR. (2013). Continuous martingales and Brownian motion. Vol. 293. Springer Science & Business Media.
- [17] LIGGETT, T. M. (1997). Stochastic models of interacting systems. The Annals of Probability 25.1, 1-29.
- [18] LIGGETT, T. M. (2013). Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes. springer science & Business Media.