Trabalho de Conclusão de Curso - Bacharelado em Matemática

Teoremas Limite para variáveis aleatórias Bernoulli dependentes

Lucas Roberto de Lima

Universidade Federal do ABC

Título: Teoremas Limite para variáveis aleatórias Bernoulli dependentes

Autor: Lucas Roberto de Lima
Orientador: Prof. Dr. Cristian Favio Coletti

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Miranda Machado
Universidade Federal do ABC

Prof.ª Dr.ª Erika Alejandra Rada Mora
Universidade Federal do ABC

Santo André, 15 de maio de 2018.

Lista de símbolos

Símbolo	Descrição
$\mathbf{1}_A$	função indicadora do conjunto A
φ_X	função característica de X
$\sigma(\cdot)$	σ-álgebra gerada por
Ω	espaço amostral
$Ber(p)$	distribuição de Bernoulli
$\mathbb{E}[X]$	média, esperança, valor esperado, integral de Lebesgue de X
$\mathbb{E}[X\|A]$	esperança condicional de X a um evento A dado
$\mathbb{E}[X\|\mathcal{F}]$	esperança condicional de X a uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ dada
F_X	função distribuição acumulada de X
$\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$	espaço das funções $\mathcal{F}$-mensuráveis com norma L^P finita em $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$
i.i.d.	independentes e identicamente distribuídas
L^1	classe das variáveis aleatórias com média finita
$N(0,1)$	distribuição normal padrão
$N(\mu,\sigma^2)$	distribuição normal com média μ e desvio padrão $\sigma > 0$
$o(g(n))$	classe das funções com crescimento assintótico estritamente menor que $g(n)$
$\mathbb{P}$	probabilidade, medida de probabilidade
$\mathbb{P}(A\|B)$	probabilidade condicional de A a um evento B dado
$\mathbb{P}(A\|\mathcal{F})$	probabilidade condicional de A a uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ dada
q.c.	quase certamente, $\mathbb{P}$–quase certamente
v.a.	variável aleatória
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	produto interno
$\sim$	relação de equivalêcia entre distribuições
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	converge em probabilidade para, converge em medida para
$\xrightarrow{D}$	converge em distribuição para

Sumário

Agradecimentos

Considerando que este trabalho marca a conclusão de minha formação como Bacharel em Matemática, há diversas pessoas que contribuíram direta ou indiretamente, pessoalmente ou profissionalmente com minhas realizações em diversos momentos durante o curso e a estes, mesmo que não nominalmente, gostaria de expressar aqui minha gratidão.

No âmbito acadêmico, agradeço de forma geral ao corpo docente da Univerdade Federal do ABC pela formação interdisciplinar e em matemática. De forma específica, gostaria de agradecer a *Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Boero*, quem contribui significativamente com minha inserção na Matemática ao longo da realização de dois projetos de iniciação científica e gostaria de agradecer especialmente ao *Prof. Dr. Cristian Favio Coletti* por orientar-me neste trabalho e auxiliar-me a iniciar pesquisas em probabilidade.

Agradeço aos membros de minha família que me apoiaram e prestaram suporte nos mais diversos momentos de minha vida e formação pessoal, não limitados a questões do curso.

Por fim, agradeço aos indivíduos a mim relacionados que prestam um apoio essencial para boas realizações e direcionamento em tarefa de vida.

Resumo

Esta monografia apresenta um estudo sobre condições suficientes sob as quais é possível demonstrar a Lei Forte dos Grandes Números, o Teorema Central do Limite e a Lei do Logaritmo Iterado para somas parciais de um determinado modelo de variáveis aleatórias Bernoulli dependentes e, ao fim, apresenta-se uma aplicação dos resultados no passeio aleatório do elefante.

Palavras-chave: Variáveis aleatórias Bernoulli dependentes, Lei Forte dos Grandes Números, Teorema Central do Limite, Lei do Logaritmo Iterado, Passeio aleatório do elefante.

Abstract

This work presents a study of sufficient conditions under which it is possible to proof the strong law of large numbers, the central limit theorem and the law of iterated logarithm for a given partial sum of dependent Bernoulli random variables and, at last, presents an application of the results to the elephant random walk.

Keywords: Dependent Bernoulli random variables, Strong law of large numbers, Central limit theorem, Law of the iterated logarithm, Elephant random walk.

1 Introdução

Teoremas limite podem ser considerados de grande interesse, em especial por descreverem propriedades de importância aplicacional e teórica, contudo os resultados clássicos desses teoremas requerem a independência de variáveis aleatórias. Trataremos de um caso onde há uma relação especial de dependência entre as variáveis aleatórias que nos permite utilizar teoria limite de martingais para obtermos os resultados desejados.

O modelo a ser estudado será dado por uma sequência de variáveis aleatórias de Bernoulli $\{X_n\}_{n\geq 1}$ que satsifazem

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = \theta_n + d_n \frac{S_n}{n},$$

onde $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ e $\{d_n\}_{n\geq 1}$ são sequências de números reais tais que $d_n \in\ ]-1,1[$, $(\theta_n + d_n x) \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$ e todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Esse modelo é derivado de uma série de trabalhos. O modelo de distribuição binomial generalizada introduzido por Drezner e Farnum(1993) no artigo [2] apresenta a relação acima com $\theta_n = p(1-d_n)$, $d_n \leq 1$ e $p \in]0,1[$ satisfazendo o *Teorema Central do Limite* quando $d_n = d \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, conforme apresentado por Heyde(2004) em [4]. Um estudo mais recente realizado por James *et al.*(2008) em [6] mostra teoremas limites para o mesmo modelo de Drezner e Farnum(1993) considerando $d_n \in [0,1[$.

A versão a ser estudada neste texto é baseada num modelo presente na referência principal desta monografia, o artigo [9] *Asymptotics for dependent Bernoulli random variables* por Qi *et al.*(2012), com a diferença de que no artigo $d_n \in [0,1[$. Sob determinadas condições demonstra-se a *Lei Forte dos Grandes Números*, o *Teorema Central do Limite* e a *Lei do Logaritmo Iterado* para este modelo.

Os conceitos matemáticos e probabilísticos necessários e utilizados no texto são apresentados no segundo capítulo, uma abordagem mais fundamental ou detalhada pode ser encontrada nas referências [11] e [12].

Os métodos utilizados para demonstração dos teoremas limite baseiam nas técnicas e proposições presentes no livro [3] *Martingale limit theory and its applications* por Hall e Heyde(1980) e no artigo [6] *Limit theorems for correlated Bernoulli random vari-*

ables por James *et al.*(2008) e são apresentados em sua essência no terceiro capítulo, o de *resultados auxilares*. O quarto capítulo apresenta o principal objeto de estudo deste trabalho abordando o modelo e teoremas limite comentados acima.

Trataremos no quinto capítulo de uma aplicação no passeio aleatório do elefante conforme apresentado no artigo [1] *Central limit theorem and related results for the elephant random walk* por Coletti et al.(2017) e destacamos ao fim do texto possíveis aplicações dos resultados mostrados de outros modelos de interesse físico e demais áreas científicas.

2 Conceitos preliminares

Neste capítulo introduziremos algumas notações básicas e apresentaremos conceitos centrais para o desenvolvimento da teoria apresentada no trabalho. Diversas propriedades e resultados fundamentais da teoria de probabilidades serão considerados conhecidos e podem ser encontrados nas referências [11] e [12].

2.1 Conceitos fundamentais

As variáveis aleatórias serão definidas sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; a esperança, denotada por $\mathbb{E}[\cdot]$, é a integral de Lebesgue. Dado $A \subseteq \Omega$, a função indicadora $\mathbf{1}_A$ é definida por

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } \omega \in A \\ 0\,, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

Seja $\rho(x)$ uma proposição aberta em x, dizemos que *ρ é $\mathbb{P}$–quase-certa* quando o conjunto $B := \{\omega \in \Omega : \rho(\omega)\}$ é $\mathcal{F}$-mensurável com $\mathbb{P}(B) = 1$, sendo abreviada por *ρ q.c.*

A *função distribuição acumulada* $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ de uma variável aleatória X é dada por $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$. A *função característica* $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de uma variável aleatória X caracteriza unicamente a distribuição de X e é definida por

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}].$$

Uma variável aleatória X possui distribuição de Bernoulli exatamente quando $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p \in [0,1]$, denotada por $X \sim \mathrm{Ber}(p)$. Em particular, $X = \mathbf{1}_{(X=1)}$ q.c. Por sua vez, dizemos que a variável aleatória Y possui distribuição *normal* com média μ e desvio padrão $\sigma > 0$ se $\varphi_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2}\right]$, denotada por $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. A distribuição *normal padrão* é dada por $N(0,1)$, em particular, padroniza-se Y pela variável aleatória definida por $\overline{Y} = \frac{Y-\mu}{\sigma}$.

Dizemos que uma variável aleatória X, que assume valores não negativos, apresenta *perda de memória* se, para dados $t, s > 0$, $\mathbb{P}(X > t + s | X \geq s) = \mathbb{P}(X > t)$.

A função gama $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

e possui como propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e, indutivamente, $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Para x suficientemente grande, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pode-se obter pela fórmula de Stirling a aproximação

$$\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)} = x^{\alpha-\beta}\left(1 + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{2x} + r(x)\right),$$

com $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$.

Modos de convergêcia. Considere $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias e uma variável aleatória X definidas sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Se, para todo $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ quando $n \to \infty$, dizemos que X_n *converge em probabilidade* para X, sendo denotado por $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
- Se, para todo $x \in \mathbb{R}$ no qual $F_X(x)$ é contínua, $\mathbb{P}(X_n \leq x) \to \mathbb{P}(X \leq x)$ quando $n \to \infty$, dizemos que X_n *converge em distribuição* para X, denotada por $X_n \xrightarrow{D} X$.

Notação assintótica $o(\cdot)$. A classe $o(g(n))$ classifica as funções com crescimento assintótico estritamente menor que $g(n)$. Em particular, se $g(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

De forma abreviada denotaremos $f(n) \in o(g(n))$ por $f(n) = o(g(n))$ e lê-se "$f(n)$ é de ordem (de magnitude) menor que $g(n)$". Ainda, $f(n) = h(n) + o(g(n))$ indica $(f(n) - h(n)) \in o(g(n))$ e $f(n) = h(n) \cdot o(g(n))$ indica $f(n)/h(n) \in o(g(n))$. As seguintes propriedades serão utilizadas sem demonstração no texto:

- Para $h(n)$ e $g(n)$ não nulas para todo $n \in \mathbb{N}$, $h(n) \cdot o(g(n)) \equiv o(h(n)g(n))$.
- Se $h(n) \in [a, b]$ para $a \in \mathbb{R}_{>0}$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $o(\pm h(n)g(n)) = o(g(n))$.

Particularmente, em alguns momentos quando $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$, $f(n)$ será livremente substituída por $o(1)$ para simplificação da notação.

2.2 Esperança condicional

Considere inicialmente a construção da esperança condicional a um evento B dado pela alteração do espaço de probabilidade de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para $(B, \mathcal{F} \cap B, \mathbb{P}(\cdot|B))$. Com isso, se $\mathbb{P}(B) \neq 0$ define-se a esperanca condicional da variável aleatória X dado o evento B como

$$\mathbb{E}[X|B] = \int_B X d\mathbb{P}(\cdot|B) = \int_\Omega X\mathbf{1}_B d\mathbb{P}/\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}$$

e se $\mathbb{P}(B) = 0$, $\mathbb{E}[X|B] := 0$. Esta definição de esperança condicional restrita a eventos dados pode ser estendida para sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, a qual, em vez de um número, será uma variável aleatória.

Caso discreto

Considerando o caso discreto, fixe uma família de eventos disjuntos $\{E_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$, com I enumerável, tal que $\bigcup_{i \in I} E_i = \Omega$. Note que $\mathcal{E} = \{\bigcup_{j \in J} E_j : J \subseteq I\} = \sigma(E_i, i \in I)$ é sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Seja $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, definimos a variável aleatória $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ como

$$Y(\omega) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[X|E_i]\mathbf{1}_{E_i}(\omega).$$

Para cada E_i, $i \in I$, temos $Y[E_i] \equiv \mathbb{E}[X|E_i]$ constante e podemos verificar que Y é $\mathcal{E}$-mensurável e integrável pois

$$\mathbb{E}[|Y|] = \sum_{i \in I} |\mathbb{E}[X|E_i]| \leq \sum_{i \in I} \mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_{E_i}] = \mathbb{E}[|X|] < \infty.$$

Ainda temos para cada $E \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_E] = \int_E Y d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X|E]\mathbb{P}(E) = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_E].$$

Note que a relação $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ pode ser estendida e define-se a *probabilidade condicional de A a uma σ-álgebra $\mathcal{E}$ dada* por $\mathbb{P}(A|\mathcal{E}) := \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{E}]$.

Buscamos generalizar a definição de $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ para $\mathcal{E}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ qualquer.

Teorema fundamental e definição

Teorema 2.1 *(Existência e unicidade quase certa) Seja $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\mathcal{E}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Então existe variável aleatória Y tal que*

(a) *Y é $\mathcal{E}$-mensurável;*

(b) *Y é integrável e $\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_E] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_E]$, para todo $E \in \mathcal{E}$.*

Neste caso, Y é denominada (uma versão da) *esperança condicional de X dado $\mathcal{E}$*, a qual escrevemos $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ quase certamente. Caso uma variável aleatória Z é tal que $\mathcal{E} = \sigma(Z)$, escrevemos de forma alternativa $Y = \mathbb{E}[X|Z]$ q.c.
Demonstração do teorema: (Unicidade quase certa) Suponha que existam variáveis aleatórias Y e Z que satisfaçam (a) e (b), então existe um evento $A = \{Y > Z\}$ e temos

$$\mathbb{E}[(Y-Z)\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A] - \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] - \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = 0.$$

Portanto,$Y \leq Z$ q.c. De forma análoga temos $Y \geq Z$ q.c., logo $Y = Z$ q.c.
(Existência) Considere a demonstração feita em 2 partes:

(1) *Existência de $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ para $X \in \mathcal{L}^2$.* Suponha $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}) := \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, então $(\mathcal{L}^2(\mathcal{F}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ com $\langle U, V \rangle := \mathbb{E}[UV]$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{L}^2(\mathcal{E}) = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ completo, logo existe Y projeção ortogonal de $\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ em $\mathcal{L}^2(\mathcal{E})$ (Teorema 6.1 de [12], a qual satisfaz o item (a)) tal que

$$\|X - Y\|_2^2 = \mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = \inf\left\{\mathbb{E}\left[(X-W)^2\right] : W \in \mathcal{L}^2(\mathcal{E})\right\},$$

$$\langle X - Y, Z \rangle = 0, \text{ para todo } Z \in \mathcal{L}^2(\mathcal{E}).$$

Com isso, sendo $E \in \mathcal{E}$, $Z := \mathbf{1}_E \in \mathcal{L}^2(\mathcal{E})$ e

$$\langle X - Y, \mathbf{1}_E \rangle = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_E] - \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_E] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[X\mathbf{1}_E] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_E],$$

satisfazendo o item (b). Ou seja, a projeção ortogonal Y de $\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ é uma versão da esperança condicional de X dado $\mathcal{E}$, quando $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F})$.

(2) *Existência de $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ para $X \in \mathcal{L}^1$.* Podemos decompor X em $X = X^+ - X^-$, logo basta mostrar o caso quando $X \in (\mathcal{L}^1)^+ = (\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))^+$ e considerar a generalização. Neste caso podemos escolher uma sequência de variáveis aleatórias limitadas $(X_n)_{n\geq 0}$ tal que $0 \leq X_n \uparrow X$. $X_n\mathcal{L}^2$, logo podemos escolher Y_n uma versão de $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{E}]$.

Dado que $0 \leq Y_n \uparrow Y$ q.c., temos $Y(\omega) := \limsup Y_n(\omega)$. Então $Y \in m\mathcal{E}$ e $Y_n \uparrow Y$ q.c. Pelo teorema da convergência monótona considerando os resultados para X_n e Y_n, temos para cada $E \in \mathcal{E}$, $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_E] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_E]$, satisfazendo o item (b). O item (a) é satisfeito pois os Y_n's são $\mathcal{E}$-mensuráveis e $Y_n \uparrow Y$.

Para a generalização considerando $X \in \mathcal{L}^1$, $X = X^+ - X^-$ com $0 \leq X_n^+ \uparrow X^+$ e $0 \leq X_n^- \uparrow X^-$; Y_n^+, Y_n^+ versões de $\mathbb{E}[X_n^+|\mathcal{E}]$ e $\mathcal{E}(X_n^-|\mathcal{E})$, respectivamente; $0 \leq Y_n^+ \uparrow Y^+$ e $0 \leq Y_n^- \uparrow Y^-$. Com isso podemos observar que $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_E] = \mathbb{E}[X^+\mathbf{1}_E] - \mathbb{E}[X^-\mathbf{1}_E] = \mathbb{E}[Y^+\mathbf{1}_E] - \mathbb{E}[Y^-\mathbf{1}_E] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_E]$, para $E \in \mathcal{E}$ e $Y = Y^+ - Y^-$.

□

Propriedades da esperança condicional

Elencamos aqui algumas propriedades destacadas na seção 9.7 e demonstradas na seção 9.8 de [12], considerando $\mathbb{E}[|X|] < \infty$

(a) Se Y é qualquer versão de $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$, então $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$.

(b) Se X é $\mathcal{E}$-mensurável, então $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}] = X$ q.c.

(c) (linearidade) $\mathbb{E}[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2|\mathcal{E}] = \alpha_1\mathbb{E}[X_1|\mathcal{E}] + \alpha_2\mathbb{E}[X_2|\mathcal{E}]$ q.c.

(d) (positividade) Se $X \geq 0$, então $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}] \geq 0$.

(e) (convergêcia monótona) Se $0 \leq X_n \uparrow X$, então $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{E}] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$

(f) (convergência dominada) Se, para todo $n \geq 1$ e para todo $\omega \in \Omega$, $|X_n(\omega)| \leq X(\omega)$ e $X_n \to X$ q.c., então $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{E}] \to \mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ q.c.

(g) (lema de Fatou para eperança condicional) Se $X_n \geq 0$, então $\mathbb{E}[\liminf X_n|\mathcal{E}] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n|\mathcal{E}]$.

(h) Seja $\mathcal{F}$ sub-σ-álgebra de $\mathcal{E}$, então $\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{E}])|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

(i) Seja Z variável aleatória $\mathcal{E}$-mensurável, então $\mathbb{E}[ZX|\mathcal{E}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ q.c.

(j) (independência) Se $\mathcal{F}$ e independente de $\sigma(\sigma(X), \mathcal{E})$, *i.e.*, se dados $E \in \sigma(\sigma(X), \mathcal{E})$ e $F \in \mathcal{F}$ tem-se $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$, então $\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{F})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$.

   Em particular, se X é independente de $\mathcal{F}$, $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$.

2.3 Martingais em tempo discreto

Ao definir uma sequência de variáveis aleatórias $X = \{X_n\}_{n\geq 0}$, muitas vezes é útil identificar relações entre seus elementos. Martingais são caracterizados por relações entre os elementos de X contudo, antes de definir um martingal, precisamos descrever o que é um *espaço de probabilidade filtrado* e um processo (estocástico) a ele adaptado. Como estamos no caso discreto, considere $n \in \{1, 2, \dots, T\}$ no caso finito e $n \in \mathbb{N}^*$ no caso infinito.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, denominamos $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$ uma *filtração* quando é uma família crescente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, i.e.

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$$

e definimos

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right) \subseteq \mathcal{F}.$$

Com isso, define-se $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}, \mathbb{P})$ como o *espaço de probabilidade filtrado*.

Ainda, dizemos que um processo estocástico em tempo discreto $X = \{X_n\}_{n\geq 1}$ é *adaptado* (à filtração $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$) se, para cada n, X_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável. Denominamos também como *filtração natural* de um processo X a menor filtração a qual X é processo adaptado, *i.e.*, $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ com $\mathcal{F}_n = \sigma(X_u : u \leq n)$.

Definição 2.2 (Martingal) *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade filtrado. O processo estocástico* $X = \{X_n\}_{n\geq 1}$ *(em tempo discreto) é denominado um* martingal *se, e somente se:*

(a) X *é adaptado a* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$,

(b) $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, *para todo* n,

(c) $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$ *q.c., para todo* $m \leq n$.

Por vezes denota-se um martingal por $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ identificando a filtração adaptada.

Definição 2.3 (Diferença martingal) *Seja* $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ *um martingal e* $\mathcal{F}_0 := \sigma(\emptyset) = \{\emptyset, \Omega\}$, *define-se* Y_n *uma* diferença martingal *por*

$$Y_n = X_n - \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}].$$

Note que $Y_1 = X_1 - \mathbb{E}[X_1]$ e $Y_n = X_n - X_{n-1}$ para $n > 1$, logo $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j + \mathbb{E}[X_1]$.

Definição 2.4 (Arranjo martingal) *Seja* $\{S_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, i \in \{1,2,\ldots,k_n\}\}$ *um martingal para cada* $n \geq 1$. *Denomina-se* arranjo martingal *uma sequência de sequências de martingais* $\{S_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, i \in \{1,2,\ldots,k_n\}, n \geq 1\}$.

Exemplo 2.5 Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $\mathbb{E}[X_n] = \mu_n$ e $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$ a filtração natural. Então a sequência de variáveis aleatórias $\{M_n\}_{n\geq 1}$ definida por

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k$$

é martingal adaptado a $\mathcal{F}_n$, pois $(X_n - \mu_n)$ é independente de $X_1,\ldots,X_{n-1}$, $(X_n - \mu_n)$ é independente de $\mathcal{F}_{n-1}$ e definindo $M_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n - \mu_n + M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[X_n - \mu_n|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[X_n - \mu_n] + M_{n-1} \\
&= M_{n-1}.
\end{aligned}$$

Em paticular, o *passeio aleatório simples* é um exemplo desse modelo onde $\mathbb{E}[X_n] = 0$ para todo $n \geq 1$.

Exemplo 2.6 Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $\mathbb{E}[X_n] = 1$ e $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$. Defina a a sequência de variáveis aleatórias $\{M_n\}_{n\geq 1}$ por

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k,$$

então $\{M_n, \mathbb{F}_n, n \geq 1\}$ é martingal, pois definindo $M_0 = 1$ e pela independência de X_n em $\mathcal{F}_{n-1}$ segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= M_{n-1}\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= M_{n-1}\mathbb{E}[X_n] \\
&= M_{n-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.7 O *processo de ramificação de Galton-Watson* descreve um processo de reprodução em gerações. Considere $\{X_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ um arranjo de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com valores em $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{E}[X_{ni}] = \mu > 0$.

O processo de Galton-Watson simples $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ é definido por $Z_0 = 1$ e

$$Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{nk}.$$

Seja $M_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$ e $\mathcal{F}_n = \sigma(M_1, \ldots, M_n)$, note que $\mathbb{E}[M_n] < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela independência de X_{ni} em $\mathcal{F}_{n-1}$ e definindo $M_0 = Z_0 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{nk} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{nk}\right] \\
&= \frac{1}{\mu^n}\mu Z_{n-1} \\
&= M_{n-1}.
\end{aligned}$$

Com isso, $\{M_n, \mathbb{F}_n, n \geq 1\}$ é um martingal.

Há uma diversidade de resultados obtidos para martingais e por esse motivo eles são um recurso prático para demonstração de alguns teoremas para determinados modelos, de forma que muitas vezes é mais simples obter martingal e utilizar resultados conhecidos na demonstração de algumas proposições.

Serão obtidos martingais a partir dos modelos a serem apresentados neste trabalho e utilizaremos resultados para martingais na demonstração dos teoremas limite. Enunciamos abaixo algumas proposições de teoria limite para martingais presentes em [3] as quais utilizaremos no próximo capítulo.

Proposição 2.8 (Teorema 2.17 de [3]) *Sejam* $\left\{\sum_{k=1}^{n} Z_k, \mathcal{F}_n, n \geq 1\right\}$ *um martingal e* $p \in [1,2]$. *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|Z_k|^p|\mathcal{F}_{n-1}] < \infty$ *q.c., então* $\sum_{k=1}^{\infty} Z_k$ *converge quase certamente.*

Proposição 2.9 (Corolário 3.1 de [3]) *Seja* $\left\{\sum_{k=1}^{i} Z_{nk}, \mathcal{F}_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\right\}$ *um arranjo martingal com* $\mathcal{F}_{ni} \subseteq \mathcal{F}_{n+1,i}$, $\sum_{k=1}^{i} Z_{nk} \in \mathcal{L}^2$ *e* $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{i} Z_{nk}\right] = 0$ *para todo*

$i \in \{1,2,\ldots,k_n\}$, $n \geq 1$. Seja também σ^2 uma variável aleatória finita quase-certamente. Se

(i) para todo $\varepsilon > 0$, $\mathbb{E}\left[Z_{ni}^2 \mathbf{1}_{(|Z_{ni}|>\varepsilon)} | \mathcal{F}_{n,i-1}\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

(ii) $V_{nk_n}^2 = \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}\left[Z_{ni}^2 | \mathcal{F}_{n,i-1}\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$,

então

$$\sum_{k=1}^{k_n} Z_{nk} \xrightarrow{D} Z$$

tal que $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right]$.

Proposição 2.10 (Teoremas 4.7 e 4.8 de [3]) *Seja $\left\{\sum_{k=1}^n Y_k, \mathcal{F}_n, n \geq 1\right\}$ um martingal com média zero tal que $|Y_k| \leq c_k \in \mathbb{R}_{>0}$ para todo $k \geq 1$, e seja $\{W_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com W_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mensurável, $\lim_{n\to\infty} W_n = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} W_n/W_{n+1} = 1$. Se*

$$W_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[Y_k^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] \to 1 \text{ q.c.} \quad e \quad \sum_{k=1}^{\infty} W_n^{-4} \mathbb{E}\left[Y_k^4 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] < \infty \text{ q.c.},$$

então

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sqrt{2W_n^2 \ln(\ln(W_n^2))}} = 1 \text{ q.c.} \quad e \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sqrt{2W_n^2 \ln(\ln(W_n^2))}} = -1 \text{ q.c.}$$

3 Resultados auxiliares

O objetivo deste capítulo é apresentar resultados a serem utilizados nos capítulos posteriores. Em especial, parte das proposições apresentadas referem-se a teoremas limite para diferenças martingais e outra parte refere-se a resultados para sequências e séries dos modelos a serem estudados. Diversos destes resultados estão presentes em [6] e [9].

Lema 3.1 (Lema de Kronecker) *Sejam* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais com* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ *e* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência crescente de números reais positivos com* $b_n \uparrow \infty$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} b_k a_k = 0.$$

Demonstração: Fixe $S_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$. Pelo método da soma por partes de Abel, tem-se que $\sum_{k=p}^{n} a_k b_k = \sum_{k=p}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) - S_{p-1}b_p + S_n b_n$. Tomando $p = 1$ e dividindo a igualdade por b_n obtem-se

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k a_k = S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)S_k.$$

Seja $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}^*$ para n suficientemente grande tal que $|S_m - s| < \varepsilon$ para $m \geq N$. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k a_k &= S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{N-1}(b_{k+1} - b_k)S_k - \frac{1}{b_n}\sum_{k=N}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)S_k \\
&= S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{N-1}(b_{k+1} - b_k)S_k - \frac{1}{b_n}\sum_{k=N}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)s - \frac{1}{b_n}\sum_{k=N}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)(S_k - s) \\
&= S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{N-1}(b_{k+1} - b_k)S_k - \frac{b_n - b_N}{b_n}s - \frac{1}{b_n}\sum_{k=N}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)(S_k - s).
\end{aligned}$$

Note que,

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=N}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)(S_k-s)\right| < (1-b_N/b_n)\varepsilon \leq \varepsilon$$

Ainda, $S_n \to s$, $-\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{N-1}(b_{k+1}-b_k)S_k \to 0$ e $-\frac{b_n-b_N}{b_n}s \to -s$ quando $n\to\infty$. Com isso, segue o resultado

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} b_n a_n = 0$$

$\square$

Lema 3.2 *Sejam $\{d_n\}_{n\geq 1}$ e $\{a_n\}_{n\geq 1}$ sequências de números reais tais que $d_n \in]-1,1[$ e $a_n := \prod_{k=1}^{n-1}(1+k^{-1}d_k)$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$. Seja também $\{A_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que $A_n^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^{-2}$. Com isso, tem-se:*

(i) $\{a_n/n\}_{n\geq 1}$ decrescente ;

(ii) Se $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n = 0$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n = 0$ se, e somente se, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-d_k}{k+1} = \infty$.

Demonstração:

(i) Note que $\frac{1}{n} = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{(n-1)+1} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+1}$, logo, para $n>1$,

$$\frac{a_n}{n} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+d_k}{k+1} = \frac{a_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1+d_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1}\cdot\left(1-\frac{1-d_{n-1}}{n}\right)$$

e como $d_k \in]-1,1[$ para todo $k\in\mathbb{N}^*$, segue que $\left(1-\frac{1-d_{n-1}}{n}\right)\in]0,1[$ para $n>1$, ou seja, $a_n/n < a_{n-1}/(n-1)$ para todo $n>1$.

(ii) Como $\{a_n/n\}_{n\geq 1}$ é descrescente e $a_k/k \in]0,1]$ para todo $k\in\mathbb{N}^*$, então $\{a_n/n\}_{n\geq 1}$ converge para algum $v\in[0,1]$. Considere a contrapositiva de (ii), então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n = v > 0$ e segue $a_n/n \geq v$ para todo $n\geq 1$, logo $a_n^{-2} \leq (vn)^{-2}$ para todo $n\geq 1$.

Com isso, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2} \leq v^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2} < \infty$. Portanto $\lim\limits_{n\to\infty} A_n < \infty$.

(iii) Note que

$$\frac{a_n}{n} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+d_k}{k+1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1-d_k}{k+1}\right)$$

e $\frac{1-d_n}{n+1} > 0$, então, pela proposição 4 do capítulo 7 de [8], $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-d_k}{k+1}\right) \in \mathbb{R}^*$ se, e somente se, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1-d_k}{k+1} < \infty$. Como a sequência $\{a_n/n\}_{n\geq 1}$ é descrescente com $a_n/n \in]0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-d_k}{k+1}\right) \in [0,1]$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ se, e somente se, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1-d_k}{k+1} = \infty$.

□

Lema 3.3 *Sejam $p \in]0,1[$ e $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência definida por $a_n = \prod_{k=1}^{n-1}(1+(2p-1)/k)$. Então a série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^{-2}$ converge se, e somente se, $p > 3/4$.*

Demonstração: Note que $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$ e

$$n\left(1-\frac{1/a_{n+1}^2}{1/a_n^2}\right) = n\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1}^2} = \frac{2(2p-1)+\frac{(2p-1)^2}{n}}{1+\frac{2(2p-1)}{n}+\frac{(2p-1)^2}{n^2}},$$

logo $R := \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1/a_{n+1}^2}{1/a_n^2}\right) = 4p-2$. Pelo método de Raabe, apresentado em [8] (capítulo IX §38 item 170); tem-se que $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^{-2}$ converge para $R > 1$ e diverge para $R \leq 1$.

Com isso, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} < \infty$ para $p > 3/4$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} = \infty$ para $p \leq 3/4$.

□

Lema 3.4 *Sejam $\{Y_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ uma sequência de diferenças martingais. Se $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{n-1}] < \infty$ q.c., então $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k < \infty$ q.c.*

Demonstração: Seja $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ um martingal que defina a sequência de diferenças martingais dada, *i.e.*, $Y_n = X_n - \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]$, então $\sum_{k=1}^{n} Y_k = X_n + \mathbb{E}[X_1]$. Note que $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ é $\mathcal{F}_n$-mesurável pois é uma soma de X_n com uma constante e $\mathbb{E}\left[|\sum_{k=1}^{n} Y_k|\right] \leq \mathbb{E}[|X_n|] + \mathbb{E}[X_1] < \infty$. Ainda,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n+1} Y_k \middle| \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}[X_{n+1} + \mathbb{E}[X_1]|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n + \mathbb{E}[X_1] \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} Y_k.\end{aligned}$$

Logo $\left\{\sum_{k=1}^{n} Y_k, \mathcal{F}_n, n \geq 1\right\}$ é martingal e o resultado segue da proposição 2.8. □

Lema 3.5 *Sejam* $\{Y_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ *uma sequência de diferenças martingais e* $\{B_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de constantes positivas com* $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$*. Se* $B^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{n-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$*, então*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{B_n} \xrightarrow{D} N(0,\sigma^2).$$

Demonstração: Fixe $Z_{ni} = Y_i/B_n$ com $i \in \{1,2\ldots,n\}$. Note que a condição de Lindeberg condicional $\mathbb{E}\left[Z_{ni}^2 \mathbf{1}_{(|Z_{ni}|>\varepsilon)}|\mathcal{F}_{n,i-1}\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ é satisfeita para todo $\varepsilon > 0$, pois para cada $i \geq 1$, $Y_i < \infty$ q.c. e $\{B_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de constantes positivas com $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$, logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ tem-se $|Z_{ni}| < \varepsilon$ q.c., ou seja, para n suficientemente grande tem-se

$$\mathbb{P}\left(\left|\mathbb{E}\left[Z_{ni}^2|\mathcal{F}_{n,i-1}\right]\mathbf{1}_{(|Z_{ni}|>\varepsilon)}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Portanto, pela proposição 2.9, $\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{B_n} \xrightarrow{D} Z$ tal que $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right]$, como a função característica define unicamente a função distribuição, segue que $Z \sim N(0,\sigma^2)$. □

Lema 3.6 *Sejam* $\{Y_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ *uma sequência de diferenças martingais tal que* $|Y_k| \leq c$ *para todo* $k \geq 1$*. Se existe de uma sequência não decrescente de constantes positivas* $\{W_n\}_{n\geq 1}$ *com* $\lim_{n\to\infty} W_n = \infty$*,* $\lim_{n\to\infty} W_n/W_{n+1} = 1$ *e*

$$W_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] \to 1 \text{ q.c.},$$

então

$$\limsup_{n\to\infty} \pm \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sqrt{2W_n^2\ln(\ln(W_n^2))}} = 1 \text{ q.c.}$$

Demonstração: Pela proposição (2.10), basta mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_n^{-4}\mathbb{E}[Y_k^4|\mathcal{F}_{k-1}] < \infty \text{ q.c.}$$

Defina a sequência de variáveis aleatórias não negativas $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ por

$Z_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}]$ e assumindo $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $Z_1^2 = \mathbb{E}[Y_1^2] > 0$ segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} Z_k^{-4}\mathbb{E}[Y_k^4|\mathcal{F}_{k-1}] &\leq c^2 \sum_{k=2}^{\infty} Z_k^{-4}\mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] \\
&\leq c^2 \sum_{k=2}^{\infty} Z_k^{-4}(Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \\
&\leq c^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{Z_k^2 - Z_{k-1}^2}{Z_k^2 Z_{k-1}^2} = c^2 \sum_{k=2}^{\infty} (Z_k^{-2} - Z_{k-1}^{-2}) = c^2 Z_1^{-2} < \infty \text{ q.c.}
\end{aligned}$$

Como $W_n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] \to 1$ q.c., existe $M > 0$ tal que $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] \leq M W_n^2$ a menos de um conjuto de medida nula. Com isso, segue da desigualdade anterior que

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_n^{-4}\mathbb{E}[Y_k^4|\mathcal{F}_{k-1}] \leq M^4 \left(\frac{\mathbb{E}[Y_1^4]}{\mathbb{E}[Y_1^2]} + \sum_{k=2}^{\infty} Z_k^{-4}\mathbb{E}[Y_k^4|\mathcal{F}_{k-1}] \right) < \infty \text{ q.c.}$$

$\square$

4 Teoremas Limite

Os teoremas limite clássicos geralmente requerem independência e/ou distribuição idêntica entre as variáveis aleatórias de uma sequência. Diversos destes teoremas foram generalizados e seus resultados obtidos sob outras hipóteses para determinados modelos.

Neste capítulo apresentamos uma versão baseada e levemente mais abrangente de resultados presentes no artigo [9], com a diferença que, no modelo a ser apresentado abaixo, o artigo considera como hipótese uma sequência de números reais $\{d_n\}_{n\geq 1}$ onde $d_n \in [0,1[$ e neste texto tomamos $d_n \in]-1,1[$. Os resultados a serem obtidos são os mesmos, porém a modificação aumenta a possibilidade de suas aplicações em outros modelos, como no exemplo do passeio aleatório do elefante, o qual não se adequa ao modelo proposto no artigo e apresentaremos uma aplicação para este exemplo no capítulo 5.

Com isso, exibiremos condições para a *Lei Forte dos Grandes Números*, o *Teorema Central do Limite* e a *Lei do Logaritmo Iterado* para um processo de Bernoulli dependente dado pelo modelo a seguir.

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_k \sim \text{Ber}(p_k)$ e $p_1 \in]0,1[$ satisfazendo

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = \theta_n + d_n \frac{S_n}{n} \tag{1}$$

onde $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ e $\{d_n\}_{n\geq 1}$ são sequências de números reais tais que $d_n \in\ ]-1,1[$, $(\theta_n + d_n x) \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$ e todo $n \in \mathbb{N}^*$; $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$ a σ-álgebra gerada por $X_1,\ldots,X_n$; S_n é a soma parcial $\sum_{i=1}^n X_i$. Defina a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ por

$$a_n := \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{d_k}{k}\right).$$

Sejam $\{A_n\}_{n\geq 1}$ e $\{B_n\}_{n\geq 1}$ sequências de números reais positivos tais que

$$A_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} \ \text{ e } \ B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k(1-p_k)}{a_k^2}.$$

Defina

$$T_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n}.$$

Note que T_n é $\mathcal{F}_n$−mensurável pois $\mathcal{F}_n$ é a menor σ-álgebra onde $X_1, \ldots, X_n$ são mensuráveis e $\mathbb{E}[|T_n|] < \infty$ pois $T_n \leq a_n^{-1}(|S_n| + |\mathbb{E}[S_n]|) \leq 2n$. Ainda,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= a_n^{-1}\mathbb{E}[S_{n-1} + X_n - \mathbb{E}[S_{n-1}] - \mathbb{E}[X_n] \mid \mathcal{F}_{n+1}] \\
&= \frac{S_{n-1} + \theta_{n-1} + d_{n-1}S_{n-1}(n-1)^{-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]]}{a_n} \\
&= \frac{\theta_{n-1} + (1 + d_{n-1}/(n-1))S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}] - \theta_{n-1} - d_{n-1}\mathbb{E}[S_{n-1}]/(n-1)}{a_n} \\
&= \frac{(1 + d_{n-1}/(n-1))(S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}])}{a_n} = \frac{S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}]}{a_{n-1}} = T_{n-1}.
\end{aligned}$$

Logo $\{T_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ é martingal e sua diferença martingal associada é $\{Y_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ com $Y_1 = T_1 - \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1]) \mid \{\emptyset, \Omega\}] = T_1 - \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_1] = T_1$ e $Y_n = T_n - T_{n-1}$ para $n > 1$. Com isso, para $n > 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
Y_n &= \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n} - \frac{S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}]}{a_{n-1}} \\
&= \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n] - (1 + d_{n-1}(n-1)^{-1})(S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}])}{a_n} \\
&= \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{a_n} - d_{n-1}\frac{S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}]}{(n-1)a_n}, \qquad (2)
\end{aligned}$$

e portanto

$$|Y_n| \leq \frac{|X_n - \mathbb{E}[X_n]|}{a_n} + \frac{1}{a_n}\left|\frac{S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}]}{n-1}\right||d_n| < \frac{2}{a_n} \qquad (3)$$

Note ainda que, como $\mathbb{E}[X_n] = p_n$, tem-se para $n > 1$

$$\begin{aligned}
p_n &= \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]] \\
&= \theta_{n-1} + \frac{d_{n-1}}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}[X_k] = \theta_{n-1} + \frac{d_{n-1}}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}p_k \qquad (4)
\end{aligned}$$

4.1 Lei Forte dos Grandes Números

Os primeiros resultados registrados de lei de grandes números datam de registros escritos por Jakob Bernoulli em 1689 mas os primeiros resultados da *Lei Forte dos Grandes Números* são atribuídos a Borel em 1909 e uma versão generalizada a Cantelli em 1917.

O resultado clássico considera uma sequência de v.a.'s $\{X_n\}_{n\geq 1}$ i.i.d. com $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ e $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, assim tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu$ q.c., ou seja, $\frac{S_n}{n}$ aproxima-se a menos de um conjunto de medida nula de μ para n suficientemente grande. Apresentamos abaixo a generalização desta lei e, na sequêcia, condição sob a qual o modelo (1) a satisfaz.

Definição 4.1 *Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias integráveis $\{X_n\}_{n\geq 1}$ satisfaz a* Lei Forte dos Grandes Números *se, para $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} = 0 \quad q.c.$$

Teorema 4.2 *O modelo (1) satisfaz a* Lei Forte dos Grandes Números *se, e somente se,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-d_k}{k+1} = \infty.$$

Demonstração: Se $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-d_k}{k+1} < \infty$, então segue dos itens (i) e (iii) do lema 3.2 que $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} a_n/n \in]0,1]$ e, pela negação do item (ii) do lema 3.2, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \neq \infty$, portanto $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^2 < \infty$.

Como $|Y_n| < 2/a_n$ por (3), tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[|Y_n|^2 \Big| \mathcal{F}_{n-1}\Big] < 4 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2} = \lim_{n\to\infty} 4A_n^2 < \infty \text{ q.c.}$$

Com isso, segue do lema 3.4 que $\sum_{k=1}^n Y_k = T_n$ converge quase certamente para uma variável aleatória T.

Buscamos mostrar que T é não-degenerada, segue do lema de Fatou que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\liminf_{m\to\infty}(T_n - T_m)^2\right] &\leq \liminf_{m\to\infty}\mathbb{E}[(T_n - T_m)^2] = \liminf_{m\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{m} Y_k\right)^2\right] \\
&\leq \liminf_{m\to\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{m} Y_k^2 + 2\sum_{i<j} Y_i Y_j\right], \ i,j \in \{n+1,\dots,m\} \\
&\leq \liminf_{m\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{m} \mathbb{E}\left[Y_k^2\right] + 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right]\right) \\
&\leq \liminf_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\mathbb{E}\left[Y_k^2\right] < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4}{a_k^2},
\end{aligned}$$

pois para $i < j$, tem-se $\mathbb{E}[Y_i Y_j] = \mathbb{E}\left[Y_i \mathbb{E}[Y_j|\mathbb{F}_{j-1}]\right] = \mathbb{E}\left[Y_i\left(\mathbb{E}[T_j|\mathcal{F}_{j-1}] - T_{j-1}\right)\right] = 0$. Logo $\mathbb{E}[(T_n - T)^2] < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4}{a_k^2}$ pois $\mathbb{E}[(T_n - T)^2] = \mathbb{E}\left[\liminf_{m\to\infty}(T_n - T_m)^2\right]$.

Com isso, segue que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[(T_n - T)^2\right] = 0$ e portanto $Var(T) = \lim_{n\to\infty} Var(T_n)$. Note que, por T_n ter média 0, tem-se para $n \geq 1$ e $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$

$$Var(T_n) = \mathbb{E}[T_n^2] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[Y_k^2\right] + 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[Y_k^2\right] > 0,$$

pois $\mathbb{E}[Y_1^2] = \mathbb{E}[T_1^2] = p_1(1-p_1) > 0$ e $\mathbb{E}\left[Y_k^2\right] \geq 0$ para todo $k > 1$. Portanto $Var(T) > 0$, logo

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} = 0\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}T_n = 0\right) = \mathbb{P}(\alpha T = 0) < 1,$$

i.e., a lei forte dos grandes números não é satisfeita.

Considere agora $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-d_k}{k+1} = \infty$, segue do lema 3.2($iii$) que $\lim_{n\to\infty} a_n/n = 0$.

Fixe $Z_n = \frac{a_n}{n}Y_n$. Note que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[|Z_k|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{a_k^2|Y_k|^2}{n^2} \;\middle|\; \mathcal{F}_k\right] < 4\sum_{k=1}^{\infty} n^{-2} < \infty,$$

então pelo lema 3.4 $\sum_{k=1}^{\infty} Z_k$ converge quase certamente e pelo lema 3.1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}Z_k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}T_n = \lim_{n\to\infty}\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} = 0 \text{ q.c.}$$

□

4.2 Teorema Central do Limite

O *Teorema Central do Limite* certamente é um dos resultados mais importantes em probabilidade devido sua vasta aplicabilidade e diversas consequências. Os resultados iniciais conhecidos são de de Moivre e Laplace descrevendo uma soma de v.a.'s Bernoulli i.i.d. Ao longo da história diversos matemáticos contribuiram com generalizações do teorema, em especial Lévy, Lyapunov, Chebyshev, Lindeberg dentre outros contribuiram fortemente com diversos resultados correlatos ao *Teorema Central do Limite* no início do século XX.

O resultado clássico considera como hipótese uma sequência de v.a.'s $\{X_n\}_{n\geq 1}$ i.i.d. com $\mathbb{E}[X_n] = \mu < \infty$ e $Var(X_n) = \sigma^2 > 0$, definindo $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Há versões mais gerais e variantes do teorema, utilizaremos o Teorema Central do Limite para diferenças martingais apresentado pelo lema 3.5 para demonstrar o resultado abaixo.

Teorema 4.3 *Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias que satisfaz o modelo (1). Se $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ e $\{A_n/B_n\}_{n\geq 1}$ é limitada, então*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n B_n} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Demonstração: Note que de $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ segue $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$, pois $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \frac{p_k(1-p_k)}{a_n^2} < \sum_{k=1}^n a_n^{-2} = A_n^2$. Com isso, dos itens (ii) e (iii) do lema 3.2 e do teorema 4.2, tem-se que a *lei forte dos grandes números* é satisfeita, *i.e.* $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} = o(1)$ q.c. Da decomposição de Y_k dada em (2) e por $\mathbb{E}[X_k] = p_k$ segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y_k^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] &= \frac{1}{a_n^2}\mathbb{E}\left[\left(X_k - \mathbb{E}[X_k] - \frac{S_{k-1} - \mathbb{E}[S_{k-1}]}{k-1} d_{k-1}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] \\
&= \frac{1}{a_n^2}\mathbb{E}\left[(X_k - \mathbb{E}[X_k])^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] + 2\left(\theta_{k-1} + d_{k-1}\frac{S_{k-1}}{k-1} - p_k + 1\right) o\left(\frac{1}{a_k^2}\right) \\
&= \frac{1}{a_n^2}\mathbb{E}\left[X_k^2 - 2p_k X_k + p_k^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] + o\left(\frac{1}{a_k^2}\right) \text{ q.c.}
\end{aligned}$$

Em particular, por (4) e $X_k^2 = X_k$ tem-se

$$\mathbb{E}\left[X_k^2\middle|\mathcal{F}_{k-1}\right] = \mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] = \theta_{k-1} + d_{k-1}\frac{\mathbb{E}[S_{k-1}]}{k-1} + d_{k-1}\frac{S_{k-1}-\mathbb{E}[S_{k-1}]}{k-1} = p_k + o(1) \text{ q.c.},$$

logo

$$\mathbb{E}\left[Y_k^2\middle|\mathcal{F}_{k-1}\right] = \frac{1}{a_k^2}\Big((1-2p_k)(p_k+o(1)) + p_k^2\Big) + o\left(\frac{1}{a_k^2}\right) = \frac{p_k(1-p_k)}{a_k^2} + o\left(\frac{1}{a_k^2}\right) \text{ q.c.}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}]}{B_n^2} &= \frac{\sum_{k=1}^n \frac{p_k(1-p_k)}{a_k^2}}{B_n^2} + \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2}}{B_n^2}o(1)\\ &= \frac{B_n^2}{B_n^2} + \left(\frac{A_n}{B_n}\right)^2 o(1) = 1 + o(1) \text{ q.c.},\end{aligned}$$

pois, por hipótese, $\{A_n/B_n\}_{n\geq 1}$ é limitada. Logo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}]}{B_n^2} = 1 \text{ q.c.} \tag{5}$$

Portanto segue do lema 3.5 que

$$\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{B_n} = \frac{T_n}{B_n} = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n B_n} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

□

4.3 Lei do Logaritmo Iterado

A *Lei do Logaritmo Iterado* surgiu de esforços para determinação da taxa de convergência para leis de grandes números. Khintchine demonstrou este resultado para soma de variáveis aleatórias Bernoulli i.i.d. em 1924 e Kolmogorov mostrou uma generalização para outras distribuições em 1929.

Posteriormente, em 1941, Hartman e Wintner apresentaram uma versão mais detalhada para uma soma de variáveis aleatórias Y_k i.i.d. com média zero e variância 1 onde

$$\limsup_{n\to\infty} \pm\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sqrt{2n\ln(\ln(n))}} = 1 \text{ q.c.}$$

Apresentamos aqui uma versão mais generalizada conforme segue.

Teorema 4.4 *Seja* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias que satisfaz o modelo (1). Se* $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ *e* $\{A_n/B_n\}_{n\geq 1}$ *limitada, então*

$$\limsup_{n\to\infty} \pm \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n B_n \sqrt{\ln(\ln(B_n))}} = \sqrt{2} \; q.c.$$

Demonstração: Note que, sendo $B_k \neq 0$ para $k \geq 1$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{B_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{B_n^2}{B_n^2 + \frac{p_{k+1}(1-p_{k+1})}{a_{k+1}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{p_{n+1}(1-p_{n+1})}{a_{n+1} B_n^2}}} = 1.$$

Como estamos sob as mesmas hipóteses do teorema 4.3, (5) também é válido, então segue do lema 3.6 que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \pm \frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sqrt{2B_n^2 \ln(\ln(B_n^2))}} &= \limsup_{n\to\infty} \pm \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n B_n \sqrt{\ln(\ln(B_n))}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ln(\ln(B_n^2))}{\ln(\ln(B_n))}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \limsup_{n\to\infty} \pm \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n B_n \sqrt{\ln(\ln(B_n))}} \sqrt{\frac{\ln(\ln(B_n))}{\ln(\ln(B_n))} + \frac{\ln(2)}{\ln(\ln(B_n))}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \limsup_{n\to\infty} \pm \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n B_n \sqrt{\ln(\ln(B_n))}} \sqrt{1 + o(1)} \\
&= 1 \; \text{q.c.}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \pm \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n B_n \sqrt{\ln(\ln(B_n))}} = \sqrt{2} \;\; \text{q.c.}$$

□

5 Aplicação no passeio aleatório do elefante

O passeio aleatório do elefante é um modelo de passeio aleatório unidimensional apresentado em [10]. Este modelo foi denominado dessa forma fazendo referência a alegoria dos elefantes possuirem uma ótima memória, o que se relaciona ao fato de não ocorrer perda de memória nesse modelo.

5.1 O modelo

No passeio aleatório do elefante, a posição inicial é dada por $\chi_0 \in \mathbb{Z}$ e o elefante move-se um passo à direita ou à esquerda em $\mathbb{Z}$ em tempo discreto, representamos sua posição no tempo $n \in \mathbb{N}$ pela variável aleatória χ_n e define-se

$$\chi_{n+1} = \chi_n + \eta_{n+1}$$

onde $\eta_{n+1} = \pm 1$ é uma variável aleatória sujeita às regras abaixo:

(i) A partir da posição inicial χ_0, o elefante move-se para a direita com probabilidade $q \in [0,1]$ e para a esquerda com probabilidade $1-q$, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(\eta_1 = 1) = q \ \text{ e } \ \mathbb{P}(\eta_1 = -1) = 1-q.$$

(ii) no passo $n+1$ um número $n' \in \{1,2,\dots,n\}$ é escolhido com probabilidade $1/n$.

(iii) Para um $p \in [0,1]$ dado, tem-se $\mathbb{P}(\eta_{n+1} = \eta_{n'}) = p$ e $\mathbb{P}(\eta_{n+1} = -\eta_{n'}) = 1-p$.

Pelo item (ii) o elefante olha para todo seu passado a cada passo e escolhe de forma equiprovável algum de seus passos anteriores sendo que a probabilidade de replicar o sentido do passo escolhido é dada pelo item (iii). Com isso, esse modelo apresenta memória infinita para $p \in \,]0,1[$, pois a escolha de cado passo depende das escolhas anteriores.

Indutivamente tem-se

$$\chi_n = \chi_0 + \sum_{k=1}^{n} \eta_k,$$

a menos de uma translação, sempre podemos considerar $\chi_0 = 0$. Seja, portanto, $\chi_0 = 0$; logo $\chi_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$. Note que uma variável aleatória Bernoulli $X_n = \mathbf{1}_{(\eta_n=1)}$ pode ser associada a cada η_n pela relação $\eta_n = 2X_n - 1$ q.c. e, consequentemente, $\chi_n = 2S_n - n$ q.c. Note que, pela definição de X_n, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Pelos resultados apresentados em [1] e [10], tem-se

$$\mathbb{P}(\eta_{n+1} = \eta|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(1 + (2p-1)\eta_k\eta) \text{ para } n \geq 1 \text{ e } \eta = \pm 1, \tag{6}$$

$$\mathbb{E}[\chi_{n+1}] = \frac{2q-1}{\Gamma(2p)}\left(n^{2(p-1)} + o(1)\right), \tag{7}$$

$$\mathbb{E}[\eta_{n+1}] = \frac{(2p-1)(2q-1)}{\Gamma(2p)}\left(n^{2(p-1)} + o(1)\right) \quad \text{e} \tag{8}$$

$$\mathbb{E}[\eta_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (2p-1)\frac{\chi_n}{n}, \tag{9}$$

substituindo η_n e χ_n por $2X_n - 1$ e $2S_n - n$ em (9), respectivamente, obtém-se

$$2\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) - 1 = (2p-1)\frac{2S_n - n}{n} = 2\left(1 - p + (2p-1)\frac{S_n}{n}\right) - 1.$$

Com isso, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = (1-p) + (2p-1)\frac{S_n}{n}$, ao fixar $p \in \,]0,1[$, tem-se $\theta_n = 1 - p$, $d_n = 2p - 1 \in \,]-1,1[$ e $(\theta_n + d_n \cdot x) \in]0,1[$ para $x \in [0,1]$, o modelo (1) é satisfeito.

Ainda,

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{2p-1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k + 2p - 1)}{(n-1)!} = \frac{\frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(2p)}\frac{\Gamma(2p+2)}{\Gamma(2p+1)}\cdots\frac{\Gamma(n+2p-1)}{\Gamma(2p+n-2)}}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n+2p-1)}{\Gamma(n)\Gamma(2p)}.$$

Em particular,

$$a_n = \frac{\Gamma(n+2p-1)}{\Gamma(n)\Gamma(2p)} = \frac{n^{2p-1}}{\Gamma(2p)}(1 + o(1)) \tag{10}$$

Definimos

$$M_n = \frac{\chi_n - \mathbb{E}[\chi_n]}{a_n} = \frac{2S_n - n - 2\mathbb{E}[S_n] + n}{a_n} = 2T_n,$$

logo $\{M_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ é martingal e sua diferença martingal associada é $\{D_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$

com $D_n = 2Y_n$, e portanto $|D_n| < \frac{4}{a_n}$.

$$D_n = \frac{\eta_n - \mathbb{E}[\eta_n]}{a_n} - \frac{\chi_{n-1} - \mathbb{E}[\chi_{n-1}]}{(n-1)a_n}(2p-1). \tag{11}$$

Defina também a sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de reais não negativos por

$$s_n^2 = 4q(1-q) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{a_k^2}$$

e conforme apresentado em [1]

$$s_n^2 = \frac{\Gamma(2p)^2}{3-4p}(n^{3-4p} + o(1)) \quad \text{para } p < 3/4 \text{ e} \tag{12}$$

$$s_n^2 = \Gamma(3/2)^2(\ln(n) + o(1)) \quad \text{para } p = 3/4. \tag{13}$$

5.2 Teoremas limite

Considerando o modelo apresentado, podemos aplicar diretamente os resultados do capítulo anterior para o passeio aleatório do elefante. Assim faremos abaixo com a *Lei Forte dos Grandes Números* e utilizaremos uma demonstração análoga do *Teorema Central do Limite* neste caso.

Teorema 5.1 *O passeio aleatório do elefante satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números para todo $p \in]0,1[$.*

Demonstração: Basta notar que $\frac{\chi_n - \mathbb{E}[\chi_n]}{a_n} = 2\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n}$ com $d_n = 2p-1$ no modelo (1). Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-d_k}{k+1} = 2(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$, segue do teorema 4.2 que $\frac{a_n}{n} M_n \to 0$ q.c. □

Teorema 5.2 *Seja $\{\chi_n\}_{n\geq 1}$ o passeio aleatório do elefante com $p \in \left]0, \frac{3}{4}\right]$, então*

$$\frac{\chi_n - \mathbb{E}[\chi_n]}{s_n a_n} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Demonstração: Como $s_n \neq 2B_n$, não podemos usar diretamente teorema 4.3, contudo, pode-se demonstrar o teorema de forma análoga conforme segue abaixo.

Buscamos estimar $\mathbb{E}[D_k^2|\mathcal{F}_{n-1}]$. Como o passeio aleatório do elefante satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números para $p \in \left]0, \frac{3}{4}\right]$, tem-se $\frac{\chi_{k-1} - \mathbb{E}[\chi_{k-1}]}{k-1}(2p-1)$ sendo $\mathcal{F}_{k-1}$-mensurável e $o(1)$. Ainda, por (8), tem-se que $\mathbb{E}[\eta_n] = o(1)$ para $p \in \left]0, \frac{3}{4}\right]$.

Com isso, segue de (11) que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[D_k^2\middle|\mathcal{F}_{k-1}\right] &= \frac{1}{a_n^2}\mathbb{E}\left[\left((\eta_k-\mathbb{E}[\eta_k])-\frac{\chi_{k-1}-\mathbb{E}[\chi_{k-1}]}{k-1}(2p-1)\right)^2\middle|\mathcal{F}_{k-1}\right]\\
&= \frac{1}{a_n^2}\mathbb{E}\left[1-2\mathbb{E}[\eta_k]\eta_k+(\mathbb{E}[\eta_k])^2\middle|\mathcal{F}_{k-1}\right]+2\left((2p-1)\frac{\chi_{k-1}}{k-1}-\mathbb{E}[\eta_k]+1\right)o\left(\frac{1}{a_k^2}\right)\\
&= \frac{1}{a_n^2}+\frac{2\mathbb{E}[\eta_k](2p-1)\chi_{k-1}}{a_k^2(k-1)}+\frac{(\mathbb{E}[\eta_k])^2}{a_k^2}+o\left(\frac{1}{a_k^2}\right)\\
&= \frac{1}{a_n^2}+o\left(\frac{1}{a_k^2}\right)\ \text{ q.c. para todo } k>1,
\end{aligned}$$

pois a_k^2, $\frac{2(2p-1)\chi_{k-1}}{a_k^2(k-1)}$ e $\left((2p-1)\frac{\chi_{k-1}}{k-1}-\mathbb{E}[\eta_k]+1\right)$ são limitadas e não nulas; e $\eta_k=\pm 1$. Note ainda que pelo lema 3.3, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}=\infty$, para $p\in\left]0,\frac{3}{4}\right]$; e $\mathbb{E}\left[D_1^2|\mathcal{F}_0\right]=\mathbb{E}\left[(\eta_1-\mathbb{E}[\eta_1])^2\right]=1-(2q-1)^2=4q(1-q)=s_1^2$, logo

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=1}^n\mathbb{E}[D_k^2|\mathcal{F}_{k-1}]}{s_n^2} &= \frac{4q(1-q)+\sum_{k=2}^n\frac{1}{a_k^2}}{s_n^2}+\frac{\sum_{k=2}^n\frac{1}{a_k^2}}{s_n^2}o(1)\\
&= \frac{s_n^2}{s_n^2}+\left(\frac{4q(1-q)}{\sum_{k=2}^n\frac{1}{a_k^2}}+1\right)^2 o(1)\\
&= 1+o(1)\ \text{ q.c.,}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n\mathbb{E}[D_k^2|\mathcal{F}_{k-1}]}{s_n^2}=1\text{ q.c.}\tag{14}$$

Portanto segue do lema 3.5 que

$$\frac{\sum_{k=1}^n D_k}{s_n}=\frac{M_n}{s_n}=\frac{\chi_n-\mathbb{E}[\chi_n]}{s_na_n}\xrightarrow{D}N(0,1).$$

□

Note que $p=3/4$, limitante superior do intervalo de p para o qual demonstrou-se o *Teorema Central do Limite*, é ponto crítico onde o passeio aleatório torna-se superdifusivo, conforme apresentado em [10]. Ainda, temos de forma específica o corolário a seguir.

Corolário 5.3 *Seja* $\{\chi_n\}_{n\geq 1}$ *o passeio aleatório do elefante, então*

$$\frac{\chi_n - \frac{2q-1}{\Gamma(2p)} n^{2p-1}}{\sqrt{n/(3-4p)}} \xrightarrow{D} N(0,1) \text{ para } p \in \left]0, \frac{3}{4}\right[\text{ e}$$

$$\frac{\chi_n - \frac{2q-1}{\Gamma(3/2)} n^{1/2}}{\sqrt{n \ln n}} \xrightarrow{D} N(0,1) \text{ para } p = 3/4.$$

Demonstração: Conforme apresentado em (7), $\mathbb{E}[\chi_{n+1}] = \frac{2q-1}{\Gamma(2p)}\left(n^{2(p-1)} + o(1)\right)$ e segue de (10), (12) e (13) que $s_n a_n = \sqrt{n/(3-4p)} + o(1)$ para $p \in \left]0, \frac{3}{4}\right[$ e $s_n a_n = \sqrt{n \ln n} + o(1)$ para $p = 3/4$. Portanto, o resultado segue diretamente do teorema 5.2. $\square$

6 Conclusões

Conforme o estudo apresentado neste texto, conclui-se que uma sequência de variáveis aleatórias que se enquadra no modelo (1) satisfaz a *Lei Forte dos Grandes Números*, o *Teorema Central do Limite* e a *Lei do Logaritmo Iterado* sob as condições apresentadas. Além disso, a aplicação no passeio aleatório do elefante propicia demonstração para teoremas limite neste caso.

Destacamos a possibilidade de aplicação dos resultados estudados neste trabalho em modelos que se adequam a (1) e que tais proposições ainda não foram estudadas, ao exemplo dos modelos de interesse físico apresentados nos artigos [5] *Memory-induced anomalous dynamics in a minimal random walk model* por Harbola *et al.*(2014) e [7] *Anomalous diffusion induced by enhancement of memory* por Kim(2014).

Referências Bibliográficas

[1] COLETTI, C.F.; GAVA, R.; SCHÜTZ, G. M. *Central limit theorem and related results for the elephant random walk*. Journal of Mathematical Physics, v.58, 053303, mai. 2017.

[2] DREZNER, Z.; FARNUM, N. *A generalized binomial distribution*. Comm. Statist. Theory Methods 22, p 3051–3063, mar. 1993.

[3] HALL, P.; HEYDE, C. C. *Martingale limit theory and its applications*. New York, USA: Academic Press, 1980.

[4] HEYDE, C. C., *Asymptotics and criticality for a correlated Bernoulli process*. Australian and New Zealand Journal of Statistics, v.46, p.53–57, fev. 2004.

[5] HARBOLA, U.; KUMAR, N.; LINDENBERG, K. *Memory-induced anomalous dynamics in a minimal random walk model*. Physical Review E, v.90, iss.2, 022136, ago. 2014.

[6] JAMES, B.; JAMES, K.; QI, Y. *Limit theorems for correlated Bernoulli random variables*. Statistics and Probability Letters, v.78, p. 2339–2345, fev. 2008.

[7] KIM, H.-J. *Anomalous diffusion induced by enhancement of memory*. Physical Review E, v.90, iss.1, 012103, jul. 2014.

[8] KNOPP, K. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. 5. ed. Berlin- Heidelberg: Springer Verlag, 1964.

[9] QI, Y.; WU, L.; YANG, J. *Asymptotics for dependent Bernoulli random variables*. Statistics and Probability Letters, v.82, p. 455-463, mar. 2012.

[10] SCHÜTZ, G. M.; TRIMPER, S. *Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk*. Phys. Rev. E 70, 045101 (2004).

[11] SHIRYAEV, A. N. *Probability*. 2. ed. New York, USA: Springer, 1996.

[12] WILLIAMS, D. *Probability with martingales*. New York, USA: Cambridge University Press, 1991.