Trabalho de Conclusão de Curso - Bacharelado em Matemática

# Teorema Espectral para Operadores Lineares Auto-Adjuntos: Uma Abordagem Trigonométrica

**Bruno Souza dos Santos de Almeida**

Universidade Federal do ABC

**Título:** Teorema Espectral para Operadores Lineares Auto-Adjuntos: Uma Abordagem Trigonométrica

**Autor:** Bruno Souza dos Santos de Almeida
**Orientador:** Prof. Dr. Pedro Lauridsen Ribeiro

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

**Profa. Dra. Ilma Aparecida Marques da Silva**
**ilma.marques@ufabc.edu.br**
Universidade Federal do ABC

**Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos**
**marcus.marrocos@ufabc.edu.br**
Universidade Federal do ABC

Santo André, 29 de setembro de 2018.

# Sumário

# Agradecimento

Agradeço inicialmente à minha família pelo suporte, paciência e investimento durante estes anos de graduação. Além disso, agradeço a todos os amigos, colegas e professores que contribuíram (mesmo que indiretamente) para a realização deste trabalho, em especial o meu orientador Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro pelo envolvimento com o projeto e orientação fundamental para sua realização e o Prof. Marcus Marrocos pelas discussões esclarecedoras.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo demonstrar o teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos ilimitados em um espaço de Hilbert. Inicialmente, estudaremos a solução do problema dos momentos trigonométricos, que permitirá provar o teorema espectral para operadores unitários e, em seguida, estenderemos este resultado para operadores auto-adjuntos ilimitados usando a transformada de Cayley. Desta forma, o enunciado e demonstração do teorema tornam-se construtivas e auto-contidas.

**Palavras-Chave:** Teorema Espectral, Operadores Auto-Adjuntos, Análise Funcional

# Abstract

The goal of this work is to present a proof of the spectral theorem for unbounded self-adjoint linear operators on a Hilbert space. Initially, we will study the solution of the trigonometric moment problem which will allow a proof of the spectral theorem for unitary operators and after that, we will extend this result for unbounded self-adjoint operators using the Cayley transform. This will allow the statement and proof of the theorem to be constructive and self-contained.

**Keywords:** Spectral Theorem, Self-Adjoint Operators, Functional Analysis

# 1 Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração do teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos fechados não necessariamente limitados em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Para mostrar os resultados desejados, usaremos a solução do chamado problema dos momentos trigonométricos usando aspectos de análise real e análise de Fourier; de maneira mais específica, desejamos mostrar o teorema de Féjer dual, que decorre de resultados elementares da teoria de séries de Fourier. Além disso, estudaremos o teorema de representação de Riesz para o espaço $C([a,b])$, onde $[a,b]$ é um intervalo real. Isto permitirá representar funcionais lineares neste espaço como integrais de Riemann-Stieltjes em relação a funções de variação limitada, o que nos fornece uma representação integral para operadores lineares em um espaço de Hilbert, num sentido a ser explicitado mais a frente. Com estas ferramentas, será possível provar o teorema espectral para operadores unitários e a partir daí, usar a transformada de Cayley para estender esta versão do teorema espectral para operadores auto-adjuntos ilimitados.

Tal plano de demonstração busca reduzir a quantidade de pré-requisitos necessários a um mínimo, assumindo apenas uma base sólida de análise real e rudimentos de análise funcional, tornando a demonstração o mais elementar e construtiva possível.

# 2 ELEMENTOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Nesta seção serão apresentadas definições e resultados elementares da teoria de espaços de Hilbert e espaços de Banach que serão utilizados neste trabalho.

Espaços de Hilbert

**Definição 2.1** *Um **produto interno** em um espaço vetorial $V$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ (que no nosso caso será sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ satisfazendo às seguintes propriedades:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *para todo* $x \in V$ *e* $\langle x, x \rangle = 0$ *se e somente se* $x = 0$;

2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ *para todo* $x, y, z \in V$;

3. $\langle x, ay \rangle = a \langle x, y \rangle$, *para todo* $x, y \in V$ *e para todo* $a \in \mathbb{F}$;

4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, *para todo* $x, y \in V$, *onde* $\overline{\langle x, y \rangle}$ *denota o conjugado complexo do escalar* $\langle x, y \rangle$.

*Neste caso, o par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado **espaço com produto interno** ou **espaço pré-hilbertiano**.*

Deve-se observar que, usando as propriedades 2, 3, e 4, obtemos

$$\langle ax + by, z \rangle = \overline{\langle z, ax + by \rangle} = \overline{a \langle z, x \rangle} + \overline{b \langle z, y \rangle} = \overline{a} \langle x, z \rangle + \overline{b} \langle y, z \rangle$$

para todo $a, b \in \mathbb{F}$ e para todo $x, y, z \in V$. Também é comum na literatura adotar-se a convenção de linearidade no *primeiro* argumento do produto interno, de modo que, pela propriedade 4, o produto interno torna-se antilinear no *segundo* argumento. Tal convenção alternativa não altera nenhum dos resultados apresentados abaixo.

Se $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço com produto interno, pode-se definir a função $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

para todo $x \in V$.

**Lema 2.2 (desigualdade de Cauchy-Schwarz)** *Seja* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *um espaço com produto interno. Então*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \,,$$

*para todo* $x, y \in V$.

Usando o Lema 2.2, é imediato verificar que a função $\|\cdot\|$ definida acima é uma **norma** em $V$, ou seja, satisfaz às propriedades:

1. Se $\|x\| = 0$, então $x = 0$;

2. $\|ax\| = |a| \, \|x\| \,, \forall a \in \mathbb{F} \,, \, x \in V$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,, \forall x, y \in V$.

Concluímos daí que todo espaço com produto interno $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um **espaço normado** e, de modo mais geral, um **espaço métrico!**, onde a função distância é definida a partir da norma $\|\cdot\|$ em $V$ por

$$d(x, y) = \|x - y\| \,, \forall x, y \in V \,.$$

Assim, as noções de conjunto aberto, fechado, funções contínuas e convergência de sequências estão definidas em um espaço com produto interno. De maneira mais precisa, um espaço com produto interno é munido da topologia *métrica* herdada pela função distância definida a partir do produto interno. Segue também das propriedades básicas de normas que as operações de adição e multiplicação escalar em $V$ são contínuas com respeito a essa topologia. A noção mais importante a ser usada aqui é a de *sequência de Cauchy*:

**Definição 2.3** *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em um espaço métrico* $(X, d)$ *é uma* ***sequência de Cauchy*** *se, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x_m) < \epsilon$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}$ *tais que* $n, m \geq N$.

**Definição 2.4** *Um espaço métrico é dito* ***completo*** *se toda sequência de Cauchy é convergente e possui limite neste espaço; ou seja, se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy em um espaço métrico completo* $(X, d)$, *então existe* $x \in X$ *tal que* $x_n \to x$ *quando* $n \to \infty$.

**Definição 2.5** *Um* ***espaço de Hilbert*** *é um espaço com produto interno* $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *que é um espaço métrico completo com relação à função distância induzida pelo produto interno.*

Por simplicidade, denotaremos um espaço de Hilbert por $\mathscr{H}$ quando o produto interno estiver subentendido. Denotaremos também os elementos de um espaço de Hilbert por letras gregas $\psi, \phi$, etc., já que os espaços de Hilbert mais comumente considerados são espaços de funções.

Posto que todo subconjunto fechado de um espaço métrico completo é ele mesmo um espaço métrico completo quando imbuído da restrição da função distância, temos que todo subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert é ele mesmo um espaço de Hilbert quando imbuído da restrição do produto interno.

**Definição 2.6** *Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert e seja $\mathcal{M}$ um subespaço vetorial de $\mathscr{H}$. O* ***complemento ortogonal de*** $\mathcal{M}$ *é definido como o conjunto*

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{\phi \in \mathscr{H} \mid \langle \psi, \phi \rangle = 0 \, , \, \forall \psi \in \mathcal{M}\} \, .$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que:

- $\mathcal{M}^{\perp}$ é um subespaço vetorial *fechado* de $\mathscr{H}$ (mesmo que $\mathcal{M}$ não o seja!);
- $\mathcal{M}^{\perp} = \overline{\mathcal{M}}^{\perp}$.

Ainda mais, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.7** *Seja $\mathcal{M}$ um subespaço vetorial fechado do espaço de Hlbert $\mathscr{H}$. Dado $\psi \in \mathscr{H}$, existe um único elemento $\varphi \in \mathcal{M}$ cuja distância a $\psi$ (dada pela função distância em $\mathscr{H}$) é mínima.*

**Demonstração:** Definamos

$$d = \inf_{\phi \in \mathcal{M}} \|\psi - \phi\| \, .$$

Se tomarmos uma sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}$ tal que $\|\psi - \phi_n\| \to d$ quando $n \to \infty$, então usando a *regra do paralelogramo*

$$\|\psi + \phi\|^2 + \|\psi - \phi\|^2 = 2\|\psi\|^2 + 2\|\phi\|^2 \, , \quad \forall \psi, \phi \in \mathscr{H} \, ,$$

temos

$$\begin{aligned}
\|\phi_n - \phi_m\|^2 &= \|(\phi_n - \psi) - (\phi_m - \psi)\|^2 \\
&= 2\|\phi_n - \psi\|^2 + 2\|\phi_m - \psi\|^2 - \| - 2\psi + \phi_n + \phi_m\|^2 \\
&= 2\|\phi_n - \psi\|^2 + 2\|\phi_m - \psi\|^2 - 4\|\psi - \frac{1}{2}(\phi_n + \phi_m)\|^2 \\
&\leq 2\|\phi_n - \psi\|^2 + 2\|\phi_m - \psi\|^2 - 4d^2 \, ;
\end{aligned}$$

daí, tomando o limite $n, m \to \infty$ na última linha, obtemos que $\|\phi_n - \phi_m\| \to 0$, ou seja, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{M}$ e, como $\mathcal{M}$ é espaço de Hilbert, então existe $\varphi \in \mathcal{M}$ tal que $\phi_n \to \varphi$ e $\|\psi - \varphi\| = d$. $\square$

Dado um subespaço vetorial fechado $\mathcal{M} \subset \mathscr{H}$ do espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, posto que $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$, segue da Proposição 2.7 que todo $\psi \in \mathscr{H}$ pode ser *unicamente* escrito na forma

$$\psi = \varphi + \xi \, , \varphi \in \mathcal{M} \, , \xi \in \mathcal{M}^\perp \, . \tag{2.1}$$

Ou seja, existe um isomorfismo natural entre os espaços de Hilbert $\mathscr{H}$ e $\mathcal{M} \times \mathcal{M}^\perp$, dado por $(\varphi, \xi) \mapsto \varphi + \xi$, onde $\mathcal{M} \times \mathcal{M}^\perp$ é munido do produto interno

$$\langle (\varphi_1, \xi_1), (\varphi_2, \xi_2) \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{M}^\perp} \, ,$$

e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}^\perp}$ denotam os produtos internos em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^\perp$, respectivamente. Denota-se

$$\mathscr{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp \, ,$$

com cada $\psi \in \mathscr{H}$ representado na forma (2.1). Como também temos que

$$\mathscr{H} = \mathcal{M}^\perp \oplus \mathcal{M}^{\perp\perp} \, , \quad \mathcal{M}^{\perp\perp} := (\mathcal{M}^\perp)^\perp \supset \mathcal{M} \, ,$$

concluímos que $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$. Mais em geral, se $\mathcal{M}$ é um subespaço vetorial (não necessariamente fechado) de $\mathscr{H}$, temos que $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$.

Um subconjunto $\mathcal{B}$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{M}$ é uma **base ortonormal** para $\mathscr{H}$ se $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal maximal, ou seja, se os elementos de $\mathcal{B}$ são mutuamente ortogonais com norma igual a 1 e, se $\mathcal{B}'$ é um conjunto ortonormal tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. Por uma aplicação imediata do Lema de Zorn decorre que todo espaço de Hilbert possui uma base ortonormal. Ainda, é possível mostrar que, se $\mathcal{B} = (\psi_i)_{i\in I}$ é uma base ortonormal para $\mathscr{H}$, para algum conjunto não-vazio de índices $I$, então para todo $\psi \in \mathscr{H}$

$$\psi = \sum_{i\in I} \langle \psi_i, \psi \rangle \psi_i$$

com $\langle \psi_i, \psi \rangle = 0$ para todo $i \in J \smallsetminus I$, onde $J \subset I$ é algum subconjunto enumerável (a soma converge na topologia de $\mathcal{M}$ se $J$ for infinito), logo

$$\|\psi\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle \psi_i, \psi \rangle|^2 \, .$$

É possível mostrar que um espaço de Hilbert possui base ortonormal *enumerável* se e somente se é um espaço métrico **separável** , isto é, possui um subconjunto enumerável denso (ver por exemplo [4]). Como quaisquer bases ortonormais de um espaço de Hilbert possuem a mesma cardinalidade, então, em um espaço de Hilbert separável toda base ortonormal é enumerável. Por este motivo, a partir de agora serão considerados apenas espaços de Hilbert separáveis a menos que haja menção explícita do contrário.

**Definição 2.8** *Seja $l : \mathscr{H} \to \mathbb{F}$ um funcional linear em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Dizemos que $l$ é* ***limitado*** *se existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$|l(\psi)| \leq K\|\psi\|$$

*para todo $\psi \in \mathscr{H}$. Neste caso, definimos*

$$\|l\| = \sup\{|l(\psi)| \mid \psi \in \mathscr{H} \, , \, \|\psi\| \leq 1\} \, ,$$

*denominada* ***norma operatorial*** *do funcional limitado $l$.*

Se $l_1$ e $l_2$ são funcionais lineares limitados em $\mathscr{H}$, então

$$\|l_1 + l_2\| \leq \|l_1\| + \|l_2\|$$

e

$$\|\alpha l\| = |\alpha| \, \|l\| \, , \forall \alpha \in \mathbb{F} \, ,$$

onde $l_1 + l_2$ e $\alpha l$ são definidos pontualmente, então o espaço de todos os funcionais lineares é um espaço vetorial normado com relação à norma operatorial.

Fixando um elemento $\psi_0 \in \mathscr{H}$ não-nulo, podemos definir um funcional linear $l_{\psi_0} : \mathscr{H} \to \mathbb{F}$ por

$$l_{\psi_0}(\varphi) = \langle \psi_0, \varphi \rangle$$

para todo $\psi \in \mathscr{H}$. Temos, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$|l_{\psi_0}(\varphi)| = |\langle \psi_0, \varphi \rangle| \leq \|\psi_0\| \, \|\varphi\| \, ,$$

de modo que $l_{\psi_0}$ é limitado e $\|l_{\psi_0}\| \leq \|\psi_0\|$. Além disso,

$$l_{\psi_0}\left(\frac{\psi_0}{\|\psi_0\|}\right) = \|\psi_0\| \, ,$$

de modo que, na verdade, $\|l_{\psi_0}\| = \|\psi_0\|$.

Mais interessante é a recíproca do que foi mostrado acima:

**Teorema 2.9 (lema de representação de Riesz)** *Se $l : \mathscr{H} \to \mathbb{F}$ é um funcional linear limitado em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, então existe um único $\varphi \in \mathscr{H}$ tal que $l(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle$, para todo $\psi \in \mathscr{H}$, e $\|l\| = \|\varphi\|$.*

**Demonstração:** Seja $\mathcal{N} = \ker l = \{\psi \in \mathscr{H} \mid l(\psi) = 0\}$. Como $l$ é um funcional linear limitado, então $l$ é contínuo, e portanto $\mathcal{N}$ é um subespaço fechado de $\mathscr{H}$. Se $\mathcal{N} = \mathscr{H}$, então $l(\psi) = 0 = \langle 0, \psi \rangle$, para todo $\psi \in \mathscr{H}$, o que mostra o resultado neste caso. Se $\mathcal{N}$ é um subespaço próprio de $\mathscr{H}$, então, pela Proposição 2.7, existe um $\psi_0 \in \mathcal{N}^\perp$ não-nulo. Definindo então

$$\varphi = \frac{\overline{l(\psi_0)}\psi_0}{\|\psi_0\|^2} ,$$

temos que $l(\psi) = 0 = \langle \varphi, \psi \rangle$ para todo $\psi \in \mathcal{N}$, ou seja, $l(\psi)$ coincide com $\langle \varphi, \psi \rangle$ em $\mathcal{N}$. Ainda, se $\phi = a\psi_0$, então

$$l(\psi) = l(a\psi_0) = al(\psi_0) = \left\langle \frac{\overline{l(\psi_0)}\psi_0}{\|\psi_0\|^2}, a\psi_0 \right\rangle = \langle \varphi, a\psi_0 \rangle .$$

Como os funcionais lineares $l$ e $\langle \varphi, \cdot \rangle$ coincidem em $\mathcal{N}$ e em $\psi_0$, então devem coincidir nos espaços gerados por $\mathcal{N}$ e $\psi_0$. Mas $\mathcal{N}$ e o espaço gerado por $\psi_0$ geram $\mathscr{H}$, pois

$$\phi = \left( \phi - \frac{l(\phi)}{l(\psi_0)}\psi_0 \right) + \frac{l(\phi)}{l(\psi_0)}\psi_0$$

para todo $\phi \in \mathscr{H}$, de modo que $l(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle$ para todo $\psi \in \mathscr{H}$. Para mostrar unicidade, seja $\varphi'$ tal que $l(\psi) = \langle \varphi', \psi \rangle$ para todo $\psi \in \mathscr{H}$. Então, usando a Regra do Paralelogramo, temos que

$$\|\varphi' - \varphi\|^2 = l(\varphi' - \varphi) - l(\varphi' - \varphi) = 0 ,$$

de onde decorre $\varphi' = \varphi$. Para mostrar que $\|l\| = \|\varphi\|$ notamos que, por um lado,

$$\|l\| = \sup_{\|\psi\| \leq 1} |l(\psi)| = \sup_{\|\psi\| \leq 1} |\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\varphi\| \, \|\psi\| = \|\varphi\| ,$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e, por outro lado,

$$\|l\| = \sup_{\|\psi\|\leq 1} |l(\psi)| \geq \left| l\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right) \right| = \left\langle \varphi, \frac{\varphi}{\|\varphi\|} \right\rangle = \|\varphi\| \,,$$

de modo que $\|l\| = \|\varphi\|$. □

**Proposição 2.10** *Um subespaço $\mathcal{S}$ (não necessariamente fechado) de um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é denso se e somente se $\mathcal{S}^\perp = \{0\}$.*

**Demonstração:** Se $\mathcal{S}$ é denso, então dado $\psi \in \mathcal{S}^\perp$, a função $l_\psi : \mathscr{H} \to \mathbb{F}$ definida por $l_\psi(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle$ é um funcional linear limitado que se anula em $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ é denso, então $l_\psi \equiv 0$ e, em particular, $l_\psi(\psi) = \|\psi\|^2 = 0$, o que implica $\psi = 0$, ou seja, $\mathcal{S}^\perp = \{0\}$. Reciprocamente, se $\mathcal{S}^\perp = \{0\}$, então como $\mathcal{S}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{S}}$, tem-se que $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^{\perp\perp} = \mathscr{H}$, ou seja, $\mathcal{S}$ é denso. □

De modo análogo à definição de funcional linear limitado dada acima, podemos definir:

**Definição 2.11** *Um **operador linear limitado** em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ como um operador linear $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ para o qual existe uma constante $K > 0$ tal que $\|T\psi\| \leq K\|\psi\|$, para todo $\psi \in \mathscr{H}$. O conjunto de todos os operadores lineares limitados definidos em $\mathscr{H}$ é denotado por $\mathcal{B}(\mathscr{H})$.*

O conjunto $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ é um espaço vetorial normado, com norma operatorial dada por

$$\|T\| = \sup\{\|T\psi\| \mid \|\psi\| \leq 1\} \tag{2.2}$$

pois, para todo $T$ e $S$ em $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ e para todo $a \in \mathbb{F}$, tem-se $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$ e $\|aT\| \leq |a|\|T\|$.

**Definição 2.12** *Uma **forma sesquilinear hermiteana** em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é uma função $\Omega : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{F}$ tal que, para todo $\psi, \varphi, \xi \in \mathscr{H}$ e para todo $a, b \in \mathbb{F}$, tem-se:*

1. *$\Omega(\psi, a\varphi + b\xi) = a\Omega(\psi, \varphi) + b\Omega(\psi, \xi)$;*

2. *$\Omega(\psi, \varphi) = \overline{\Omega(\varphi, \psi)}$.*

Como consequência das propriedades 1 e 2, decorre a antilinearidade na primeira variável de uma forma sesquilinear $\Omega$, ou seja,

$$\Omega(a\varphi + b\psi, \xi) = \overline{a}\Omega(\varphi, \xi) + \overline{b}\Omega(\psi, \xi)$$

para todo $a, b \in \mathbb{F}$ e para todo $\psi, \varphi, \xi \in \mathscr{H}$.

Dizemos que uma forma sesquilinear $\Omega$ é **limitada** se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|\Omega(\psi, \varphi)| \leq K\|\psi\| \, \|\varphi\| \, ,$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$.

**Teorema 2.13** *Se $\Omega$ é uma forma sesquilinear hermiteana limitada em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, então existe um único operador linear limitado $A$ tal que*

$$\Omega(\psi, \varphi) = \langle A\psi, \varphi \rangle \, , \quad \forall \psi, \varphi \in \mathscr{H} \, .$$

**Demonstração:** Seja $\Omega$ uma forma sesquilinear hermiteana limitada em $\mathscr{H}$. Então existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|\Omega(\psi, \varphi)| \leq \|\psi\| \, \|\varphi\| \, ,$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$.

Fixado $\psi \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$, seja $l_\psi : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ definido por $l_\psi(\varphi) = \Omega(\psi, \varphi)$. Então $l_\psi$ é um operador linear em $\mathscr{H}$ tal que

$$|l_\psi(\varphi)| = |\Omega(\psi, \varphi)| \leq K\|\psi\| \, \|\varphi\| \, ,$$

de modo que $l_\psi$ é um operador linear limitado com cota superior $\frac{K}{\|\psi\|}$. Pelo lema de representação de Riesz, (teorema 2.9), existe um único $\xi \in \mathscr{H}$ tal que $l_\psi(\varphi) = \langle \xi, \varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathscr{H}$. Seja então $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ definido por $A\psi = \xi$. Pela unicidade de $\xi$ o operador $A$ é bem-definido e linear, pois

$$\langle A(\psi_1 + \psi_2), \varphi \rangle = \Omega(\psi_1 + \psi_2, \varphi) = \Omega(\psi_1, \varphi) + \Omega(\psi_2, \varphi) = \langle A\psi_1, \varphi \rangle + \langle A\psi_2, \varphi \rangle \, ,$$

o que implica que $A(\psi_1 + \psi_2) = A\psi_1 + A\psi_2$, e

$$\overline{\langle A(a\psi), \varphi \rangle} = \overline{\Omega(a\psi, \varphi)} = a\overline{\Omega(\psi, \varphi)} = a\overline{\langle A\psi, \varphi \rangle} \, ,$$

o que implica que $A(a\psi) = aA\psi$, para todo $\psi \in \mathscr{H}$ e para todo escalar $a$. Finalmente, $A$ é limitado, pois

$$|\langle A\psi, \varphi \rangle| = |\Omega(\psi, \varphi)| \leq K\|\psi\| . \|\varphi\| \, .$$

□

Seja $A$ um operador limitado em $\mathscr{H}$. Então $\Omega(\psi, \varphi) = \langle \psi, A\varphi \rangle$ define uma forma sesquilinear hermiteana em $\mathscr{H}$ de modo que, pelo teorema 2.13 existe um único operador linear limitado $B$ tal que

$$\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle B\psi, \varphi \rangle \,, \quad \forall \psi, \varphi \in \mathscr{H} \,. \tag{2.3}$$

O operador limitado $B$ é chamado **adjunto** do operador $A$ e denotado por $A^*$.

**Definição 2.14** *Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert.*

1. *Um operador linear $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é chamado uma **isometria** se $\langle T\psi, T\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle$ para todo $\psi \in \mathscr{H}$.*

2. *Um operador linear $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é chamado um operador **unitário** se é uma isometria sobrejetora.*

É imediato observar, pela definição acima, que se $U$ é um operador unitário, então $U$ é limitado, inversível e $U^{-1} = U^*$.

**Definição 2.15** *Um operador linear limitado $P$ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é uma **projeção ortogonal** se $P^2 = P$ e $P^* = P$.*

Pela definição, podemos observar que se $P$ é uma projeção ortogonal, então $\mathbb{1} - P$ também é, onde $\mathbb{1}$ denota o operador identidade em $\mathscr{H}$. Como o subespaço vetorial $\mathcal{S}$ dado pela imagem de $P$ é da forma

$$\mathcal{S} = \{\psi \in \mathscr{H} \mid P\psi = \psi\} \,,$$

segue que $\mathcal{S}$ coincide com o núcleo de $\mathbb{1} - P$. Em particular, $\mathcal{S}$ é um subespaço fechado de $\mathscr{H}$, e $P \equiv 0$ em $\mathcal{S}^\perp$. Temos ainda que se $\psi = \varphi + \omega$, com $\varphi \in \mathcal{S}$ em $\omega \in \mathcal{S}^\perp$ como na equação 2.1, então $P\psi = \varphi$.

Espaços de Banach

**Definição 2.16** *Um **espaço de Banach** é um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ completo, ou seja, um espaço em que toda sequência de Cauchy é convergente.*

De maneira análoga à definição dada para espaços de Hilbert na seção anterior, definimos um **operador linear limitado** entre espaços de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot$

$\|_Y)$ como um operador linear $T : X \to Y$ para o qual existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \,, \quad \forall x \in X \,.$$

Esta definição na verdade generaliza para espaços normados que não são necessariamente espaços com produto interno a definição dada para espaços de Hilbert apresentada na seção anterior. Em particular, podemos definir funcionais lineares limitados como operadores lineares limitados $l : X \to \mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é o corpo sobre o qual $X$ está definido, que nosso caso será sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Definição 2.17** *O **espaço dual** de um espaço de Banach $X$, denotado por $X^*$, é o conjunto de todos os funcionais lineares limitados $l : X \to \mathbb{F}$.*

Definimos a norma de um funcional $l \in X^*$ da mesma forma que na definição 2.8. Esta função define uma norma em $X^*$ e é possível mostrar que, se $X$ é um espaço completo, então $X^*$ é completo com relação à norma $l \mapsto \|l\|$.

**Definição 2.18** *Uma **seminorma** em um espaço vetorial $X$ (sobre um corpo $\mathbb{F}$) é uma função $p : X \to \mathbb{R}$ tal que:*

1. $p(x) \geq 0 \,, \quad \forall x \in X$;
2. $p(ax) = |a|p(x) \,, \quad \forall x \in X, a \in \mathbb{F}$;
3. $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \,, \quad \forall x, y \in X$.

**Definição 2.19** *Seja $\{p_i\}_{i \in I}$ uma família de seminormas em um espaço vetorial $X$, onde $I$ é um conjunto de índices não-vazio. A **topologia gerada pela família de seminormas** $\{p_i\}_{i \in I}$ é a topologia gerada pela* sub-base

$$\mathcal{F} = \{B_i(r; x) \mid i \in I \,, \, x \in X \,, \, r > 0\} \,,$$

*onde*

$$B_i(r; x) = \{y \in X \mid p_i(y - x) < r\}$$

*para cada $i \in I$ e $x \in X$, $r > 0$.*

**Definição 2.20** *Seja $X^*$ o espaço dual de um espaço de Banach $X$. A **topologia $*$-fraca** em $X^*$ é a topologia definida pela família de seminormas $p_x : X^* \to [0, \infty)$ definidas por*

$$p_x(l) = |l(x)|$$

*para cada* $x \in X$.

Pela definição 2.20, temos que uma sequência $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $X^*$ converge para $l \in X^*$ na topologia $*$-fraca se e somente se $l_n(x) \to l(x)$, para todo $x \in X$.

Denotamos por $\mathcal{B}(X,Y)$ o espaço de todos operadores lineares limitados $T : X \to Y$ entre espaços de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Tal conjunto é um espaço de Banach com relação à norma $T \mapsto \|T\|$ definida para todo $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ por 2.2.

De modo análogo à topologia $*$-fraca definida acima, podemos definir:

**Definição 2.21** *A **topologia forte** em $\mathcal{B}(X,Y)$ é a topologia induzida pela família de seminormas $p_x : \mathcal{B}(X,Y) \to [0,\infty)$ definidas por*

$$p_x(T) = \|Tx\|_Y\,, \quad \forall x \in X\,.$$

Assim, uma sequência de operadores lineares $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}(X,Y)$ converge para $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ na topologia forte se e somente se $T_n x \to Tx$ para todo $x \in X$ em relação à norma $\|\cdot\|_Y$.

Finalizamos esta seção com o chamado *Teorema BLT* (do inglês *bounded linear transformation*), que fornece uma extensão única de um operador linear limitado definido em um subespaço denso de um espaço normado completo para o espaço todo.

**Teorema 2.22 (Teorema BLT)** *Seja $T$ um operador linear limitado de um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$ num espaço de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Então $T$ pode ser unicamente estendido a um operador linear limitado $\tilde{T}$ definido no completamento de $X$.*

**Demonstração:** Seja $\tilde{X}$ o completamento de $X$, ou seja, $(\tilde{X}, \|\cdot\|_X)$ é um espaço normado completo e $X$ é um subespaço denso de $\tilde{X}$. Para cada $x \in \tilde{X}$ existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$. Como a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acima converge, então é uma sequência de Cauchy, de modo que, dado $\epsilon > 0$, existe um $N$ tal que

$$n, m \geq N \implies \|x_n - x_m\|_X \leq \frac{\epsilon}{\|T\|}\,.$$

Assim,

$$\|Tx_n - Tx_m\|_Y = \|T(x_n - x_m)\|_Y \leq \|T\|\,\|x_n - x_m\|_X \leq \epsilon\,,$$

o que mostra que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $Y$. Como $Y$ é completo, então existe $y \in Y$ tal que $Tx_n \to y$ quando $n \to \infty$. Seja $\tilde{T} : \tilde{X} \to Y$ definido por $\tilde{T}x = y$, onde $x$ e $y$ são obtidos da maneira acima. Então tal operador é bem-definido pois, se $x_n, x'_n \to x$ são duas sequências em $X$ convergindo para $x$, então a sequência $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots$ também converge para $x$, de modo que a sequência

$Tx_1, Tx'_1, Tx_2, Tx'_2, \ldots$ converge para algum $\hat{y} \in Y$ pelo mesmo argumento acima. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} Tx'_n = \hat{y} = \lim_{n\to\infty} Tx_n \ ,$$

o que mostra que $\tilde{T}$ não depende da sequência escolhida. Tal operador é linear, pois, tomando sequências convergentes $x_n \to x$ e $z_n \to z$ com $x, z \in \tilde{X}$, então

$$\tilde{T}(\alpha x + \beta z) = \lim_{n\to\infty} T(\alpha x_n + \beta z_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} Tx_n + \beta \lim_{n\to\infty} z_n \ ,$$

e tomando $y = \tilde{T}x$ e $w = \tilde{T}z$, então a equação acima dá que

$$\tilde{T}(\alpha x + \beta z) = \alpha y + \beta w = \alpha \tilde{T}x + \beta \tilde{T}z \ ,$$

o que mostra que $\tilde{T}$ é linear. O operador $\tilde{T}$ é limitado pois

$$\|\tilde{T}x\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_Y \leq \lim_{n\to\infty} \|T\| \, \|x_n\|_X = \|T\| \, \|x\|_X \ .$$

Finalmente, para mostrar unicidade, seja $T'$ uma outra extensão limitada de $T$ para $\tilde{X}$. Então

$$\tilde{T}x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T'x_n = T'(\lim_{n\to\infty} x_n) = T'x \ ,$$

e como $\tilde{T}$ e $T'$ são limitados, então $\tilde{T} = T'$. $\square$

# 3 O PROBLEMA DOS MOMENTOS TRIGONOMÉTRICOS

O primeiro passo na demonstração do teorema espectral para operadores auto-adjuntos será a obtenção do teorema espectral para operadores unitários. Para tal, iniciamos com a solução do chamado *problema dos momentos trigonométricos*.

Durante todo este trabalho, $C([a,b])$ denotará o espaço de Banach das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ em um intervalo $[a,b]$ munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\} \ . \tag{3.1}$$

**Definição 3.1** *Uma* ***medida de Radon*** *em $C([a,b])$ é um funcional linear $l : C([a,b]) \to \mathbb{C}$ positivo, ou seja, $l(f) \geq 0$ para toda $f \in C([a,b])$ tal que $f \geq 0$.*

**Lema 3.2** *Se $l : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ é uma medida de Radon, então $l$ é um funcional linear limitado.*

**Demonstração:** Seja $f \in C([a,b])$ uma função contínua e seja $l : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo. Aplicando $l$ às funções não-negativas $\|f\|_\infty + |f(x)|$ e $\|f\|_\infty - |f(x)|$, então obtemos, usando a linearidade de $l$, que

$$|l(f)| \leq \|f\|_\infty |l(1)| \ ,$$

e como $l(1) \geq 0$, então $l$ é limitado e, em particular, $\|l\| = l(1)$. □

O *problema dos momentos trigonométricos* consiste em, dados coeficientes complexos $c_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, obter uma medida de Radon $\mu$ em $C([0,2\pi])$ tal que

$$c_k = \mu(e^{ik(\cdot)}) \ , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ . \tag{3.2}$$

O seguinte teorema nos dá uma condição suficiente para a existência de tal medida:

**Teorema 3.3 (teorema de Fejér dual)** *Se para todo $x \in \mathbb{R}$ os coeficientes $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfazem*

$$\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{-ikx} c_k \geq 0 \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \tag{3.3}$$

*então existe uma única medida de Radon $\mu$ em $C([0,2\pi])$ satisfazendo à equação* (3.2).

A demonstração deste teorema será feita usando os resultados apresentados a seguir.

**Teorema 3.4 (princípio de seleção de Helly)** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções a valores reais definidas num conjunto enumerável $E$ para as quais existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq K\,, \quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.4}$$

*Então existe uma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente para uma função $f : E \to \mathbb{R}$. Ainda mais, $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in E$.*

**Observação 3.5** *Uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo a condição 3.4 é dita **uniformemente limitada**.*

**Demonstração:** Seja $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração de $E$. Como a sequência de números reais $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, esta sequência possui uma subsequência convergente $(f_n^1(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ . Como a subsequência $(f_n^1(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ obtida acima também é limitada, então pelo mesmo motivo, existe uma subsequência $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ desta sequência tal que $(f_n^2(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f_n^2(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ convergem. Aplicando este argumento indutivamente, obtemos subsequências

$$(f_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \dots , (f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}, \dots$$

de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que, para cada $j = 1, 2, \dots, k$, a sequência $(f_n^k(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Definindo $g_n = f_n^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é, por construção, uma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(g_n(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, para todo $x_k \in E$, ou seja, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *pontualmente* para a função $f : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_k) = \lim_{n\to\infty} g_n(x_k)$$

para cada $x_k \in E$. $\square$

Para o próximo resultado, relembramos que um espaço topológico é **sequencialmente compacto** se toda sequência limitada neste espaço possui uma subsequência convergente.

**Teorema 3.6 (teorema de Banach-Alaoglu sequencial)** *Se $X$ é um espaço de Banach* *separável, então a bola fechada de raio $M > 0$ em $X^*$,*

$$B_M = \{u \in X^* \mid \|u\| \leq M\} ,$$

*é sequencialmente compacta na topologia $*$-fraca.*

**Demonstração:** Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $B_M$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n(x)| \leq \|u\| \, \|x\| \leq M|x\|$$

para cada $x \in X$; ou seja, a sequência de números reais $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Seja $E = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável denso de $X$ (que existe, pois $X$ é separável). Então, por um argumento análogo ao usado no Princípio de Seleção de Helly, existe uma subsequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente para um funcional linear $v$ definido no subespaço (denso) gerado por $E$. Ainda, tal funcional $v$ é limitado em $E$, pois, dado $\epsilon > 0$, existe $N(x_k, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |v_n(x_k) - v(x_k)| < \epsilon ,$$

para cada $x_k \in E$, de modo que

$$|v(x_k)| \leq |v_n(x_k)| + |v_n(x_k) - v(x_k)| ,$$

daí, para $n \geq N$ temos que

$$|v(x_k)| \leq |v_n(x_k)| + \epsilon \leq \|u_n\| \, \|x_k\| + \epsilon \leq M\|x_k\| + \epsilon .$$

Como para todo $\epsilon > 0$ é possível encontrar $n$ tal que a desigualdade acima é satisfeita, então $|v(x_k)| \leq M\|x_k\|$ para todo $x_k \in E$, de modo que $v$ é limitado em $E$. Assim, pelo Teorema BLT (teorema 2.22), $v$ pode unicamente extendido para uma funcional linear (também denotado por $v$) definido em todo o espaço $X$ que possui a mesma norma (e, em particular, a mesma cota superior acima) que $v$ em $E$. Para mostrar que $v_n(x) \to v(x)$ para todo $x \in X$, notamos que, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $x_k \in E$,

$$n \geq N \implies |v_n(x_k) - v(x_k)| < \frac{\epsilon}{3} . \tag{3.5}$$

Ainda, como $E$ é denso, dados $\epsilon > 0$ como acima e $x \in X$, existem $\delta = \frac{\epsilon}{3M}$ e um

$x_k \in E$ tais que $\|x - x_k\| < \delta$. Daí,

$$|v(x) - v(x_k)| = |v(x - x_k)| \leq \|v\| \, \|x - x_k\| \leq M\delta < \frac{\epsilon}{3}\,, \tag{3.6}$$

e, similarmente,

$$|v_n(x) - v_n(x_k)| < \frac{\epsilon}{3}\,, \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.7}$$

Finalmente, tomando $x \in X$ e $\epsilon > 0$ como acima, temos para todo $n \geq N$ que

$$\begin{aligned} |v_n(x) - v(x)| &\leq |v_n(x) - v_n(x_k)| + |v_n(x_k) - v(x_k)| + |v(x) - v(x_k)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\,, \end{aligned}$$

ou seja, $v_n(x) \to v(x)$ para todo $x \in X$, o que mostra o resultado. □

De posse destes resultados, passamos agora para a demonstração do Teorema 3.3:
**Demonstração:** Sejam definidas as funções

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{-ikx}\,, \tag{3.8}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, por hipótese, $\Psi_n(x) \geq 0$ para todo $x$ e para todo $n$. Definindo a sequência de funcionais lineares $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$\mu_n(u) = \int_0^{2\pi} u(t)\Psi_n(t)dt\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,\, u \in C([0, 2\pi])\,,$$

então $\mu_n$ é um funcional linear positivo (usando a positivdade de $\Psi_n$) em $C([0, 2\pi])$ para cada $n$ e portanto limitado. Ainda mais, temos que

$$\begin{aligned} \|\mu_n(u)\| \leq \int_0^{2\pi} |u(t)|\Psi_n(t)dt &\leq \frac{\|u\|_\infty}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k \int_0^{2\pi} e^{-ikt}dt \\ &= \frac{\|u\|_\infty}{2\pi} \cdot 2\pi c_0 = c_0\|u\|_\infty\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\mu_n(u)\| \leq c_0\|u\|_\infty\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \forall u \in C([0, 2\pi])\,,$$

e $c_0 > 0$ usando a positividade de $\Psi_n$ no caso particular $k = 0$. Como $C([0, 2\pi])$ é um espaço de Banach separável temos, pelo teorema de Banach-Alaoglu sequencial que existe uma subsequência $(\mu_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia $*$-fraca para um funcional linear limitado $\mu$ em $C([0, 2\pi])$, que é claramente positivo.

A medida de Radon $\mu$ obtida satisfaz

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{ikt} d\mu(t) = \lim_{j\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\mu_{n_j}(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{j\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \Psi_{n_j}(t) dt \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(1 - \frac{|k|}{n_j}\right) c_k = c_k\,,\end{aligned}$$

o que mostra a existência da medida desejada, ou seja, $\mu(e^{ik(\cdot)}) = c_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde $e^{ik(\cdot)}$ denota a função $t \mapsto e^{ikt}$ para $0 \le t \le 2\pi$.

Para mostrar a unicidade desta medida de Radon, usaremos que a convolução de uma função contínua com o *núcleo de Fejér*

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx}$$

é dada por

$$(u * F_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(y) F_n(x-y) dy\,. \tag{3.9}$$

conforme detalhado no apêndice A.

Assim, temos que

$$(u * F_n)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} u(y) e^{-iky} dy\,, \tag{3.10}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}\mu(u * F_n) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mu(e^{ik(\cdot)}) \int_{-\pi}^{\pi} u(y) e^{-iky} dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{-iky} dy \\ &= (\mu * \check{F}_n)(u)\,,\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $\check{F}_n(x) = F_n(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e usamos que $\mu(e^{ik(\cdot)}) = c_k$. Como pelo Teorema de Fejér (teorema A.5) $u * F_n$ converge uniformemente para $u$, concluímos que $\mu * \check{F}_n$ converge para $\mu$ na topologia $*$-fraca em $C([0, 2\pi])$. Por outro lado, se $\nu$ é outra medida de Radon tal que $\nu(e^{ik(\cdot)}) = c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então por um cálculo análogo ao realizado na equação (3.11), temos que $\psi * F_n = \Psi_n$ e, como toda subsequência de $(\nu * F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\nu$, temos que $\nu = \mu$, por unicidade do limite. Isso conclui a prova da unicidade da medida $\mu$. $\square$

# 4 Teorema de representação de Riesz

O objetivo desta seção é apresentar uma versão do teorema da representação de Riesz para funções contínuas num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. De maneira mais específica, mostraremos que o dual (topológico) do espaço de Banach $C([a, b])$ é (essencialmente) o espaço das funções de variação limitada $BV([a, b])$ com relação à norma da variação limitada $\| \cdot \|_{BV}$. Tal resultado será importante à frente para a obtenção das resoluções de unidade para um operador linear unitário. Para tal, serão apresentadas inicialmente algumas propriedades básicas das funções de variação limitada e da integral de Riemann-Stieltjes. Tal exposição é baseada em [2].

Funções de variação limitada

**Definição 4.1** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função e seja $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. A **variação de $f$ na partição** $\mathcal{P}$ é definida por*

$$V(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \,. \tag{4.1}$$

*A **variação total de $f$ em** $[a, b]$ é definida por*

$$V_a^b f = \sup_{\mathcal{P}} V(f, \mathcal{P}) \,. \tag{4.2}$$

*Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita uma **função de variação limitada** se $V_a^b f < \infty$. Denota-se por $BV([a, b])$ o conjunto das funções de variação limitada sobre $[a, b]$.*

**Lema 4.2** *Se $f \in BV([a, b])$, então $f$ é limitada e satisfaz*

$$\|f\|_\infty \leq |f(a)| + V_a^b f \,. \tag{4.3}$$

**Demonstração:** Sejam $a \leq x \leq b$ e a partição $\mathcal{P} = \{a, x, b\}$ de $[a, b]$. Então

$$|f(x) - f(a)| \leq V(f, \mathcal{P}) \leq V_a^b f \,,$$

de modo que
$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b f \ .$$
Como a desigualdade acima vale para todo $x \in [a,b]$, então pode-se concluir que $f$ é limitada e
$$\|f\|_\infty \leq |f(a)| + V_a^b f \ .$$

□

Listamos a seguir algumas propriedades imediatas das funções de variação limitada:

**Lema 4.3** *Sejam $f, g \in BV([a,b])$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $V_a^b f = 0$ *se e somente se $f$ é constante.*
2. $V_a^b(cf) = |c| V_a^b f$.
3. $V_a^b(f+g) \leq V_a^b f + V_a^b g$.
4. $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$ *para todo $a \leq c \leq b$.*

Decorre do lema 4.2 e dos items 2 e 3 do lema 4.3 que $BV([a,b])$ é um subespaço vetorial do espaço das funções limitadas em $[a,b]$, denotado por $B([a,b])$.

**Lema 4.4** *Definindo*
$$\|f\|_{BV} = |f(a)| + V_a^b f \ , \tag{4.4}$$
*para $f \in BV([a,b])$, então $\|\cdot\|_{BV}$ define uma norma no espaço $BV([a,b])$.*

**Demonstração:** Como pelo item 1 do lema 4.3 $V_a^b f = 0$ se e somente se $f$ é constante, então $\|f\|_{BV} = 0$ se e somente se $f$ é constante e $f(a) = 0$, ou seja, se e somente se $f \equiv 0$. Dadas $f, g \in BV([a,b])$ e usando o lema 4.3,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{BV} = |f(a)+g(a)| + V_a^b(f+g) &\leq |f(a)| + V_a^b f + |g(a)| + V_a^b g \\ &= \|f\|_{BV} + \|g\|_{BV} \ .\end{aligned}$$

Finalmente, dado $c \in \mathbb{R}$ e dada $f \in BV([a,b])$, tem-se

$$\|cf\|_{BV} = |c| \ \|f\|_{BV} \ ,$$

onde novamente usamos o lema 4.3. □

A norma $\|\cdot\|_{BV}$ definida pela equação (4.4) é chamada **norma de variação limitada**.

**Proposição 4.5** *O espaço $BV([a,b])$ é um espaço de Banach com relação à norma de variação limitada $\|\cdot\|_{BV}$.*

**Demonstração:** Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $BV([a,b])$ com relação à norma de variação limitada $\|\cdot\|_{BV}$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies \|f_n - f_m\|_{BV} = |f_n(a) - f_m(a)| + V_a^b(f_n - f_m) < \epsilon \, .$$

Em particular, pela desigualdade 4.3, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $B([a,b])$ com relação à norma $\|\cdot\|_\infty$, de modo que, pela completude de $B([a,b])$ com respeito a esta norma, existe $f \in B([a,b])$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $[a,b]$ e seja dado $\epsilon > 0$. Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_{BV} < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$, então, para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |f_n(a) - f(a)| + V(f_n - f, \mathcal{P}) &= \lim_{n\to\infty} [|f_n(a) - f(a)| + V(f_n - f, \mathcal{P})] \\ &\leq \sup_{m \geq N} \|f_n - f_m\|_{BV} \leq \epsilon \, . \end{aligned}$$

Como $\mathcal{P}$ é uma partição arbitrária de $[a,b]$, então $f_n - f \in BV([a,b])$ e, em particular, $f = f_n - (f_n - f) \in BV([a,b])$, pois é a diferença de funções de variação limitada e ainda

$$\|f_n - f\|_{BV} = |f_n(a) - f(a)| + V_a^b(f_n - f) \leq \epsilon \, , \quad \forall n \geq N \, .$$

Portanto $f_n \to f$ quando $n \to \infty$ com relação à norma $\|\cdot\|_{BV}$ em $BV([a,b])$. □

Para o resultado a seguir, lembramos que uma função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita **crescente** se $x < y$ implica $g(x) \leq g(y)$, para todo $x, y \in [a,b]$.

**Proposição 4.6** *Dada $f \in BV([a,b])$, existem funções crescentes $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $f = g - h$.*

**Demonstração:** Seja $g(x) = V_a^x f$ para todo $a < x \leq b$ e $g(a) = 0$. Então $g$ é crescente pois, se $x, y \in [a,b]$ são tais que $x < y$, então

$$g(y) - g(x) = V_a^y f - V_a^x f = V_x^y f \geq |f(y) - f(x)| \geq 0 \, .$$

Por outro lado,

$$g(x) - g(y) \geq f(y) - f(x) \, ,$$

de modo que $g - f$ também é crescente. Colocando $h = g - f$, então $f = g - h$ é a diferença de duas funções crescentes. □

Como consequência, temos

**Corolário 4.7 (Teorema de Jordan)** *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada se e somente se é a diferença de duas funções crescentes.*

Integral de Riemann-Stieltjes

Nesta seção definiremos a integral de Riemann-Stieltjes e estudaremos algumas das suas propriedades básicas. Tal exposição é de interesse pois mais a frente será mostrado que a relação dual entre $C([a,b])$ e $BV([a,b])$ é dada explicitamente pela integral de Riemann-Stieltjes em relação a uma função de variação limitada.

Seja $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a,b]$. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma **partição pontilhada** se tomarmos uma coleção de pontos fixados $T = \{\tau_i \mid \tau_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \ldots, n\}$ nesta partição. Denotamos uma partição pontilhada por um par $(\mathcal{P}, T)$, na notação acima.

**Definição 4.8** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Fixada uma função $\varphi \in BV[a,b]$, a **soma de Riemann-Stieltjes de $f$ com relação à partição pontilhada** $(\mathcal{P}, T)$ **e à função** $\varphi$ dada por*

$$S_\varphi(f, \mathcal{P}, T) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})] \,. \tag{4.5}$$

2. *A função $f$ é dita **Riemann-Stieltjes integrável com relação à função de variação limitada** $\varphi$, se existe $I \in \mathbb{R}$ tal que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para o qual*

$$\max_{1 \le i \le n} |t_i - t_{i-1}| < \delta \implies |S_\varphi(f, \mathcal{P}, \Delta) - I| < \epsilon \,,$$

*para toda partição pontilhada $(\mathcal{P}, T)$ de $[a,b]$. Denota-se neste caso*

$$I = \int_a^b f(x) d\varphi(x) \,,$$

*e denomina-se $I$ como a **integral de Riemann-Stieltjes de $f$ com relação à função de variação limitada** $\varphi$.*

É possível mostrar as seguintes propriedades (ver e.g. [2]):

**Proposição 4.9** *Se $f \in C([a,b])$, então $f$ é Riemann-Stieltjes integrável com relação a toda $\varphi \in BV([a,b])$.*

**Proposição 4.10** *Seja $\varphi \in BV([a,b])$ e seja $\psi$ definida por $\psi(x) = V_a^x \varphi$ para todo $x \in [a,b]$. Então toda $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Stieltjes integrável com relação a $\varphi$ também o é em relação a $\psi$, e*

$$\left| \int_a^b f(x) d\varphi(x) \right| \le \int_a^b |f(x)| d\psi(x) \le \|f\|_\infty V_a^b \varphi \, .$$

Podemos concluir daí que a integral de Riemann-Stieltjes com relação a uma função de variação limitada define um funcional linear contínuo no espaço das funções contínuas no intervalo $[a,b]$:

**Corolário 4.11** *Se $\varphi \in BV([a,b])$, então a aplicação $C([a,b]) \ni f \mapsto \int_a^b f(x) d\varphi(x)$ define um funcional linear contínuo em $C([a,b])$.*

Teoremas de Helly

O objetivo desta seção é demonstrar o Primeiro e o Segundo Teorema de Helly, que serão utilizados na nossa demonstração do Teorema da Representação de Riesz. Tais teoremas decorrem diretamente do Princípio de Seleção de Helly (teorema 3.4 da seção 3) que por comodidade será relembrado abaixo:

**Teorema 4.12 (princípio de seleção de Helly)** *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência uniformemente limitada de funções a valores reais definidas num conjunto enumerável $E$. Então existe uma subsequência de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge pontualmente para uma função $f : E \to \mathbb{R}$. Ainda mais, $|f(x)| \le K$ para todo $x \in E$.*

Como consequência deste teorema temos:

**Teorema 4.13 (primeiro teorema de Helly)** *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência uniformemente limitada de funções $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se $f_n$ é crescente para cada $n \in \mathbb{N}$, então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge pontualmente para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente e limitada.*

**Demonstração:** Seja $E = \mathbb{Q} \cap [a,b]$. Como $E$ é enumerável, então pelo Princípio de Seleção de Helly, a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge pontualmente para uma função $g$ em $E$. Tal função é crescente em $E$ e pode ser extendida para uma função crescente em $[a,b]$ se definirmos

$$g(x) = \sup\{g(q) \mid q \in E, q < x\} \, .$$

Seja $x \in [a,b]$ um ponto em que $g$ é contínua. Então, dado $\epsilon > 0$, existem $p, q \in E$ tais que $p < x < q$ e $|g(p) - g(q)| < \frac{\epsilon}{2}$. Para $j$ suficientemente grande obtemos que

$$f_{n_j}(x) \leq f_{n_j}(q) \leq g(q) + \frac{\epsilon}{2} \leq g(x) + \frac{\epsilon}{2},$$

usando que $f_{n_j}$ e $g$ são crescentes; por um argumento análogo, obtemos que $f_{n_j}(x) \geq g(x) - \frac{\epsilon}{2}$. Portanto concluímos disto que $g(x) = \lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x)$ para todo $x \in [a,b]$ em que $g$ é contínua. Como $g$ é crescente, então o conjunto $D(g)$ das suas descontinuidades é no máximo enumerável, e assim, aplicando novamente o Princípio de Seleção de Helly para a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neste conjunto, obtemos uma subsequência $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente para uma função limitada e crescente $h$ em $D(g)$, pois a subsequência tomada a partir do Princípio de Seleção de Helly neste caso é exatamente a mesma subsequência usada para definir $g$ no conjunto dos seus pontos de continuidade. Assim, definindo $f(x) = g(x)$ se $g$ é contínua em $x$ e $f(x) = h(x)$ caso contrário, obtemos que $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x)$ com $f$ crescente e limitada. □

**Teorema 4.14 (segundo teorema de Helly)** *Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de variação limitada em um intervalo $[a,b]$. Se $\varphi_n \to \varphi$ pontualmente em $[a,b]$, então $\varphi$ é uma função de variação limitada em $[a,b]$ e, para toda $f \in C[a,b]$,*

$$\int_a^b f(x)d\varphi_n(x) \to \int_a^b f(x)d\varphi(x).$$

**Demonstração:** Seja $K > 0$ tal que $V_a^b(\varphi_n) \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\varphi_n \to \varphi$ pontualmente, então $V(\varphi, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} V(\varphi_n, \mathcal{P})$ para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$. Assim, $\varphi$ é uma função de variação limitada em $[a,b]$ e $V_a^b(\varphi) \leq K$. Seja $f \in C[a,b]$. Então $f$ é, em particular, uniformemente contínua no compacto $[a,b]$, de modo que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [a,b],\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3K}. \tag{4.6}$$

**Afirmação 4.14.1** Para toda partição pontilhada $(\mathcal{P}, T)$ de $[a,b]$, onde $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ e $T = \{\tau_i \mid \tau_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \ldots, n\}$, com $\sup_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}| < \delta$, e para toda $f$ contínua em $[a,b]$ satisfazendo (4.6), tem-se

$$\left| \int_a^b f(x)d\varphi(x) - S_\varphi(f, \mathcal{P}, T) \right| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.7}$$

**Demonstração:** De fato,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)d\varphi(x) - S_\varphi(f,\mathcal{P},T) \right| &= \left| \int_a^b f(x)d\varphi(x) - \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)d\varphi(x) - \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\varphi(x) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(x) - f(\tau_i))d\varphi(x) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{3K} V_{t_{i-1}}^{t_i}(\varphi) \\
&= \frac{\epsilon}{3K} V_a^b(\varphi) < \frac{\epsilon}{3}\,,
\end{aligned}$$

onde, na última linha usamos (4.6) e que $\int_c^d g(x)d\varphi(x) \leq \|g\|_\infty V_c^d(\varphi)$, para toda $g$ contínua e para todo $[c,d] \subset [a,b]$. Isto conclui a demonstração da afirmação acima.
□

Seja então $(\mathcal{P},T)$ uma partição pontilhada como na afirmação anterior. Temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)d\varphi_n(x) - \int_a^b f(x)d\varphi(x) \right| &\leq \left| \int_a^b f(x)d\varphi_n(x) - S_{\varphi_n}(f,\mathcal{P},T) \right| \\
&+ \left| \int_a^b f(x)d\varphi(x) - S_\varphi(f,\mathcal{P},T) \right| + \left| S_{\varphi_n}(f,\mathcal{P},T) - S_\varphi(f,\mathcal{P},T) \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \left| S_{\varphi_n - \varphi}(f,\mathcal{P},T) \right| \\
&\leq \frac{2\epsilon}{3} + \|f\|_\infty V(\varphi_n - \varphi, \mathcal{P}) < \epsilon\,,
\end{aligned}$$

para $n$ suficientemente grande tal que $V(\varphi_n - \varphi, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{3\|f\|_\infty}$; mostrando assim o resultado desejado. □

Teorema de representação de Riesz

Pelo corolário 4.11 temos que, dada uma função de variação limitada $\varphi \in BV([a,b])$, a aplicação $f \mapsto \int_a^b f(x)d\varphi(x)$ define um funcional linear em $C([a,b])$. Desejamos nesta seção mostrar a recíproca: dado um funcional linear $l : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, mostraremos que existe uma função de variação limitada $\varphi$ em $[a,b]$ tal que $l(f) = \int_a^b f(x)d\varphi(x)$, que sob certas condições adicionais é única, ou seja, o espaço das funções de variação limitada $BV([a,b])$ é (essencialmente) o dual do espaço de Banach $C([a,b])$. Para isso, usaremos os Teoremas de Helly apresentados na seção anterior e os *polinômios de Bernstein*, introduzidos no apêndice

B.

**Teorema 4.15 (teorema de representação de Riesz)** *Se $l : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo em $C([a,b])$, então existe uma única $\varphi \in BV([a,b])$ tal que*

$$l(f) = \int_a^b f(x) d\varphi(x) , \quad \forall f \in C([a,b]) ,$$

*e $V_a^b \varphi = \|l\|$.*

**Demonstração:** Começamos por notar que basta mostrar o teorema para o intervalo $[0,1]$. De fato, se este caso for provado e definirmos $\gamma(t) = a + t(b-a)$ para $0 \leq t \leq 1$, então a aplicação $\tilde{l} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{l}(g) = l(g \circ \gamma)$, para toda $g \in C([0,1])$, define um funcional linear contínuo em $C([0,1])$, e portanto existe $\psi \in BV([0,1])$ tal que $\tilde{l}(g) = \int_0^1 g(y) d\psi(y)$, de modo que $\varphi = \psi \circ \gamma \in BV([a,b])$ e

$$l(g \circ \gamma) = \int_a^b (g \circ \gamma)(x) d(\psi \circ \gamma)(x) ,$$

para toda $g \in C([0,1])$.

Para mostrar o teorema no intervalo $[0,1]$, escrevemos

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} , \quad 0 \leq k \leq n ,$$

de modo que, para cada $f \in C([0,1])$, a sequência de polinômios de Bernstein de $f$ é dada por

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k} , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

e, pela proposição B.1, tal sequência converge uniformemente para $f$ quando $n \to \infty$. Dado um funcional linear contínuo $l : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, temos por linearidade que

$$l(B_n(f)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) l(P_{n,k}) , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

e por continuidade de $l$, a sequência $(l(B_n(f)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $l(f)$ quando $n \to \infty$.

Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de funções definidas por

$$\begin{aligned}
\varphi_n(0) &= 0\,, \\
\varphi_n(x) &= l(P_{n,1})\,, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\,, \\
\varphi_n(x) &= l(P_{n,k})\,, \quad \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,, \\
\varphi_n(1) &= l(P_{n,n})\,.
\end{aligned}$$

Então cada $\varphi_n$ é uma função escada com salto de tamanho $l(P_{n,k})$ em $\frac{k}{n}$ para $k = 0, 1, \ldots, n$, de modo que, para toda $f \in C([0,1])$,

$$\int_0^1 f(x)d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) l(P_{n,k})\,.$$

Ainda, cada $\varphi_n$ é contínua por baixo em $(0,1)$ e $\varphi_n(0) = 0$. Como

$$\sum_{k=0}^{n} P_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} |P_{n,k}| = 1\,,$$

então

$$\begin{aligned}
V_0^1\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} |l(P_{n,k})| = \left|\sum_{k=0}^{n} \pm l(P_{n,k})\right| &= \left| l\left(\sum_{k=0}^{n} \pm P_{n,k}\right)\right| \\
&\leq \|l\| \left\|\sum_{k=0}^{n} \pm P_{n,k}\right\|_\infty \\
&\leq \|l\| \left\|\sum_{k=0}^{n} |P_{n,k}|\right\|_\infty \\
&= \|l\|\,.
\end{aligned}$$

Como a sequência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de variação limitada em $[0,1]$ e uniformemente limitada, então pelo segundo teorema de Helly, teorema 4.14, temos que $\varphi_n$ converge pontualmente para uma função $\varphi$ contínua por baixo, satisfazendo $\varphi(0) = 0$ e tal que

$$\int_0^1 f(x)d\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)d\varphi_n(x) = l(f)\,,$$

para toda $f \in C([0,1])$, com $V_0^1\varphi \leq \|l\|$.

Para mostrar a unicidade de $\varphi$ usaremos as seguintes afirmações:

**Afirmação 4.15.1** Dada $\alpha \in BV([a,b])$, seja $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $\beta(a) = \alpha(a)$, $\beta(x) = \alpha(x^-)$ para todo $a < x < b$ e $\beta(b) = \alpha(b)$, onde $\alpha(x^-) = \lim_{t \nearrow x} \alpha(t)$. Então $\beta$ é contínua por baixo em $(a,b)$, $\beta \in BV([a,b])$ e $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\beta(x)$ para toda $f \in C([a,b])$.

**Demonstração:** (afirmação 4.15.1) Assumindo inicialmente que $\alpha$ é decrescente. Então $\beta$ é decrescente e

$$\beta(x) \geq \alpha(x)\,, \quad \forall a \leq x \leq b\,. \tag{4.8}$$

Dado $\epsilon > 0$ e dada $f \in C([a,b])$, tem-se (usando integração por partes) que

$$\left| \int_a^b f(x)d(\beta - \alpha)(x) \right| = \left| - \int_a^b (\beta - \alpha)(x)df(x) \right|\,,$$

de modo que a afirmação ficará provada se mostrarmos que

$$\left| \int_a^b (\beta - \alpha)(x)df(x) \right| < \epsilon |\alpha(b) - \alpha(a)|\,. \tag{4.9}$$

Por continuidade de $f$ no compacto $[a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ sempre que $|x - y| < \delta$. Fixando uma partição $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ com $x_i - x_{i-1} < \delta$ então, para toda escolha de pontos $T = \{t_i \mid x_{i-1} \leq t_i \leq x_i\,,\, i = 1, \cdots, n\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\left| S_f(\beta - \alpha, \mathcal{P}, T) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (\beta(t_i) - \alpha(t_i))\Delta f_i \right| \\
&\leq \epsilon \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_i^-)| \\
&\leq \epsilon \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \\
&= \epsilon |\alpha(b) - \alpha(a)|\,,
\end{aligned}$$

usando que 4.8 e o fato de que $\beta$ é monótona. Isso mostra 4.9 no caso em que $\alpha$ é decrescente. No caso geral em que $\alpha \in BV([a,b])$ tem-se $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ onde $\alpha_1$ e $\alpha_2$ são funcões decrescentes, e portanto $\beta = \beta_1 - \beta_2$ com $\beta_1$ e $\beta_2$ também decrescentes, onde cada $\beta_i$ é obtida a partir de $\alpha_i$ como no enunciado, $i = 1, 2$. Repetindo o mesmo argumento para o caso decrescente a cada uma das funções $\beta_i$ a afirmação fica mostrada. □

**Afirmação 4.15.2** Dada $\alpha \in BV([a,b])$, existe uma única $\beta \in BV([a,b])$ com $\beta(a) = 0$ que é contínua por baixo em $(a,b)$ e satisfaz $\int_a^b f(x)d\beta(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$ para toda $f \in C([a,b])$.

**Demonstração:** (afirmação 4.15.2) Supondo que existam duas funções de variação limitada e contínuas por baixo $\gamma_1$ e $\gamma_2$ tais que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = 0$ e

$$\int_a^b f(x)d\gamma_1(x) = \int_a^b f(x)d\gamma_2(x) \tag{4.10}$$

para toda $f \in C([a,b])$. Devemos mostrar que $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 \equiv 0$. Supondo, por contradição, que exista $c \in (a,b)$ tal que $\gamma(c) \neq 0$. Existem dois casos a considerar:

*Caso 1:* Não existe outro $d \in [a,b)$ tal que $\gamma(d) \neq 0$. Ou seja, $\gamma(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$ e $\gamma(b) = 0$. Então $\gamma$ é uma função escada com único salto em $b$ e assim, escolhendo $f \in C([a,b])$ tal que $f(b) \neq 0$, obtém-se uma contradição à igualdade 4.10.

*Caso 2:* Existe um $c \in (a,b)$ tal que $\gamma(c) \neq 0$. Neste caso, observamos que é possível mostrar que a função $v(x) = V_a^x\gamma$ é contínua por baixo em todo ponto em que $\gamma$ é contínua por baixo. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$v(c) - v(c-\epsilon) = V_{c-\epsilon}^c\gamma < \frac{|\gamma(c)|}{2} \, .$$

Seja $f$ uma função contínua definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } a \leq t \leq c-\epsilon\,, \\ 1 - \frac{c-t}{2}\,, & \text{se } c-\epsilon \leq t \leq c\,, \\ 1\,, & \text{se } c \leq t \leq b\,. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)d\gamma(x)\right| &= \left|\int_{c-\epsilon}^c d\gamma(x) + \int_c^b f(x)d\gamma(x)\right| \\
&= \left|\gamma(b) - \gamma(c) + \int_{c-\epsilon}^c f(x)d\gamma(x)\right| \\
&\geq |\gamma(c)| - V_{c-\epsilon}^c \gamma \\
&\geq \frac{|\gamma(c)|}{2} > 0\,,
\end{aligned}$$

o que novamente contradiz 4.10. □

A partir das afirmações 4.15.1 e 4.15.2 e do fato que a função de variação limitada $\varphi$ obtida é contínua por baixo e satisfaz $\alpha(0) = 0$, concluímos a unicidade desta função. □

# 5 Teorema espectral: operadores unitários

Representação integral de um operador unitário

Nesta seção aplicaremos o teorema de Féjer dual obtido anteriormente na solução do problema dos momentos trigonométricos para obter a representação integral de um operador unitário $U$ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ no seguinte sentido: desejamos um operador linear limitado $f(U)$, onde $f$ é uma função contínua no círculo unitário $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, tal que

$$\langle \psi, f(U)\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) d\sigma[\psi, \varphi](t) , \quad \forall \psi, \varphi \in \mathscr{H}$$

para uma função de variação limitada $\sigma[\psi, \varphi] \in BV([0, 2\pi])$. Tal função será obtida usando o teorema de representação de Riesz demonstrado na seção anterior.

Começamos por relembrar que, se $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é um operador unitário, então $U$ é inversível e $U^{-1} = U^*$, ou seja,

$$\langle \psi, U\varphi \rangle = \langle U^{-1}\psi, \varphi \rangle$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$.

Seja $\psi \in \mathscr{H}$ fixado. Denotando $U^k$ como a $k$-ésima potência de $U$, seja

$$c_k = \langle \psi, U^k\psi \rangle \quad , \forall k \in \mathbb{Z} . \tag{5.1}$$

Então

$$\overline{c_k} = \overline{\langle \psi, U^k\psi \rangle} = \langle U^k\psi, \psi \rangle = \langle \psi, U^{-k}\psi \rangle = c_{-k}$$

para todo $k$ inteiro.

**Teorema 5.1** *Seja $U$ um operador unitário em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então para cada $\psi \in \mathscr{H}$ existe uma única medida de Radon $\mu[\psi]$ em $C([0, 2\pi])$ tal que*

$$\mu[\psi](e^{ik(\cdot)}) = c_k , \quad \forall k \in \mathbb{Z} . \tag{5.2}$$

**Demonstração:** Sejam $c_k$ definidos por (5.1) para todo $k$ inteiro. Seja ainda

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{-ikt} \,, \tag{5.3}$$

definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $n$ inteiro. Definindo

$$T_n = \mathbb{1} + e^{-it}U + e^{-2it}U^2 + \cdots + e^{-(n-1)it}U^{n-1} = \sum_{r=0}^{n-1} e^{-irt}U^r \,,$$

então

$$\begin{aligned}\langle T_{n-1}\psi, T_{n-1}\psi\rangle = \sum_{r,s=0}^{n-1} e^{-i(s-r)t}\langle U^r\psi, U^s\psi\rangle &= \sum_{r,s=0}^{n-1} e^{-i(s-r)t}\langle \psi, U^{s-r}\psi\rangle \\ &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}(n-|k|)\langle \psi, U^k\psi\rangle \,,\end{aligned}$$

usando o fato que $U$ é unitário e fazendo a mudança de variável $k = r - s$ na soma dupla acima. Do cálculo acima concluímos que

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n}\langle T_{n-1}\psi, T_{n-1}\psi\rangle = \frac{1}{n}\|T_{n-1}\psi\|^2 \geq 0$$

para todo $n$ inteiro e para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que, pelo teorema de Féjer dual (teorema 3.3), existe uma única medida de Radon $\mu[\psi]$ em $C([0,2\pi])$ tal que

$$\mu[\psi](e^{ik(\cdot)}) = c_k \tag{5.4}$$

para todo $k$ inteiro. $\square$

Relembremos brevemente a **fórmula de polarização** que permite obter uma forma sesquilinear hermiteana $\Omega : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ a partir de uma forma quadrática hermiteana $q : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$. De maneira explícita,

$$\Omega(\psi,\varphi) = \frac{1}{2}\left[q(\psi+\varphi) - q(\psi-\varphi) + iq(\psi - i\varphi) - i(\psi + i\varphi)\right] \tag{5.5}$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$. Ainda mais, $\Omega$ é tal que $\Omega(\psi,\psi) = q(\psi)$ para todo $\psi \in \mathscr{H}$.

Seja $\mu[\psi]$ a medida de Radon obtida no teorema anterior. Como $c_k = \langle \psi, U^k\psi\rangle$ para todo $k$ inteiro e $U$ é um operador unitário, então $\mu[\psi]$ define uma forma quadrática hermiteana em $\mathscr{H}$, de modo que pela fórmula de polarização (5.5), podemos obter uma forma sesquilinear hermiteana limitada (pois $U$ é unitário) $\mu[\psi,\varphi]$ em $\mathscr{H}$. Por construção, $\mu[\psi, \varphi]$ é uma medida de Radon em $C([0, 2\pi])$ e $\mu[\psi, \psi] = \mu[\psi]$. Como consequência disso e do teorema 2.13 temos:

**Corolário 5.2** *Seja $U$ um operador unitário em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então para cada $f \in C(\mathbb{S}^1)$, existe um único operador linear limitado, denotado por $f(U)$, tal que*

$$\mu[\psi, \varphi](f) = \langle \psi, f(U)\varphi \rangle \ , \quad \forall \psi, \varphi \in \mathscr{H} \ . \tag{5.6}$$

Observamos que se $f \in C(\mathbb{S}^1)$, então $t \mapsto f(e^{it})$ é uma função contínua em $[0, 2\pi]$ com $f(0) = f(2\pi)$. Uma segunda consequência do teorema 5.1 é:

**Corolário 5.3** *Seja $U$ um operador unitário em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então para cada $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$ e para cada $f \in C(\mathbb{S}^1)$ existe uma única função de variação limitada $\sigma[\psi, \varphi] \in BV([0, 2\pi])$ contínua por baixo tal que*

$$\langle \psi, f(U)\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) d\sigma[\psi, \varphi](t) \ . \tag{5.7}$$

**Demonstração:** Dados $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$ e dada $f \in C(\mathbb{S}^1)$, o corolário anterior mostra que existe um único operador linear limitado $f(U)$ tal que

$$\mu[\psi, \varphi](f) = \langle \psi, f(U)\varphi \rangle \ ,$$

onde $\mu[\psi, \varphi]$ é uma medida de Radon em $C([0, 2\pi])$. Logo, o teorema de representação de Riesz, teorema 4.15, garante que existe uma única função de variação limitada contínua por baixo, denotada por $\sigma[\psi, \varphi]$, tal que

$$\mu[\psi, \varphi](f) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) d\sigma[\psi, \varphi](t) \ ,$$

como desejado. $\square$

Em particular, podemos concluir que para cada $\psi \in \mathscr{H}$ existe uma função de variação limitada $\sigma[\psi] = \sigma[\psi, \psi]$ – na notação do teorema anterior – tal que

$$\langle \psi, U^k \psi \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma[\psi](t) \ , \tag{5.8}$$

para todo $k$ inteiro.

Resoluções de unidade

**Definição 5.4** *Uma **resolução de unidade** em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é uma família de projeções ortogonais $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ tal que:*

1. $E_tE_s = E_sE_t = E_t, \quad \forall t \leq s.$
2. *Se* $s \nearrow t$, *então* $E_s\psi \to E_t\psi$ *para todo* $\psi \in \mathscr{H}$.
3. *Se* $t \to \infty$, *então* $E_t\psi \to \psi$ *para todo* $\psi \in \mathscr{H}$.
4. *Se* $t \to -\infty$, *então* $E_t\psi \to 0$ *para todo* $\psi \in \mathscr{H}$.

Seja $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ uma resolução de unidade. A condição 2 nos dá que a aplicação $t \mapsto E_t$ é fortemente contínua por baixo e as condições 3 e 4 garantem que $\lim_{t\to\infty} E_t = \mathbb{1}$ e $\lim_{t\to-\infty} E_t = 0$ no sentido da convergência forte de operadores lineares em $\mathscr{H}$. Denotamos

$$\begin{aligned}
E((a,b]) &= E_b - E_a\ ,\\
E([a,b)) &= E_{b^+} - E_a\ ,\\
E((a,b)) &= E_{b^+} - E_{a^+}\ ,\\
E([a,b]) &= E_b - E_{a^+}\ ,\\
E(\{a\}) &= E_a - E_{a^+}\ ,
\end{aligned}$$

com a convenção $E(+\infty) = \mathbb{1}$ e $E(-\infty) = 0$, $E_{a^+} = \lim_{t\searrow a} E_t$ e $E_{a^-} = \lim_{t\nearrow a} E_t$. Observamos que o limite operatorial $E_{a^+}$ sempre existe mas não necessariamente é igual a $E_a$.

Desejamos mostrar nesta seção, que é possível construir uma resolução de unidade em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ a partir de um operador unitário $U$ em $\mathscr{H}$. No Teorema 5.3 da seção anterior, obtivemos uma única função de variação limitada $\sigma[\psi,\varphi]$ definida em $[0,2\pi]$ tal que, para cada $f \in C(\mathbb{S}^1)$,

$$\langle\psi, f(U)\varphi\rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})d\sigma[\psi,\varphi](t)\ .$$

Em particular,

$$\langle\psi, U^k\varphi\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt}d\sigma[\psi,\varphi](t)\ , \tag{5.9}$$

para cada $k$ inteiro. Tal função possui a seguinte propriedade:

**Proposição 5.5** *Seja $\sigma[\psi,\varphi]$ a função de variação limitada em $[0,2\pi]$ como no teorema 5.3. Então, para cada $t\in[0,2\pi]$, a função $\sigma[\psi,\varphi](t)$ define uma forma sesquilinear hermiteana em $\mathscr{H}$.*

**Demonstração:** Como

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}d\sigma[\psi,\varphi_1+\varphi_2](t) = \langle\psi,U^k(\varphi_1+\varphi_2)\rangle = \langle\psi,U^k\psi_1\rangle + \langle\psi,U^k\psi_2\rangle$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{ikt}d\sigma[\psi,\varphi_1](t) + \int_0^{2\pi} e^{ikt}d\sigma[\psi,\varphi_2](t)\ ,$$

então, por unicidade da função $\sigma[\psi,\varphi]$ na representação (5.7), temos que

$$\sigma[\psi,\varphi_1+\varphi_2](t) = \sigma[\psi,\varphi_1](t) + \sigma[\psi,\varphi_2](t) \tag{5.10}$$

para todo $t\in[0,2\pi]$. Ainda, para qualquer escalar $a\in\mathbb{C}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}d\sigma[\psi,a\varphi](t) = \langle\psi,U^k(a\varphi)\rangle = a\langle\psi,U^k\varphi\rangle = a\int_0^{2\pi} e^{ikt}d\sigma[\psi,\varphi](t)\ ,$$

de modo que, novamente por unicidade da função $\sigma[\psi,\varphi]$, temos que

$$\sigma[\psi,a\varphi](t) = a\sigma[\psi,\varphi](t) \tag{5.11}$$

para todo $t\in[0,2\pi]$ e para todo $a\in\mathbb{C}$. Finalmente, como

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}d\sigma[\psi,\varphi](t) = \langle\psi,U^k\varphi\rangle = \overline{\langle\varphi,U^{-k}\psi\rangle} = \int_0^{2\pi} e^{ikt}d\overline{\sigma[\varphi,\psi](t)}\ , \tag{5.12}$$

então

$$\overline{\sigma[\varphi,\psi](t)} = \sigma[\psi,\varphi](t) \tag{5.13}$$

para todo $t\in[0,2\pi]$. Assim, $\sigma[\psi,\varphi](t)$ é uma forma sesquilinear em $\mathscr{H}$, para cada $t$.

Para mostrar que esta forma sesquilinear é limitada, notamos que, como $\sigma[\psi,\varphi]$ é uma função crescente (pois é uma função de variação limitada) e $\sigma[\psi,\varphi](0)=0$, então para todo $0\le t\le 2\pi$,

$$0\le\sigma[\psi,\psi](t)\le\sigma[\psi,\psi](2\pi) = \int_0^{2\pi} d\sigma[\psi,\psi](t) = \langle\psi,U^0\psi\rangle = \|\psi\|^2\ .$$

Daí, decorre que $\sigma[\psi,\varphi]$ é limitada pela seguinte observação:

**Afirmação 5.5.1** Se $\Omega : (\psi, \varphi) \mapsto \omega(\psi, \varphi)$ é uma forma sesquilinear em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ tal que existe uma constante $C > 0$ para a qual

$$|\Omega(\psi, \psi)| \leq C\|\psi\|^2 \tag{5.14}$$

para todo $\psi \in \mathscr{H}$, então $\omega$ é limitada.

**Demonstração:** (afirmação) Como

$$\Omega(\psi, \xi) + \Omega(\xi, \psi) = \frac{1}{2}[\Omega(\psi + \xi, \psi + \xi) - \Omega(\psi - \xi, \psi - \xi)]$$

então

$$|\Omega(\psi, \xi) + \Omega(\psi, \xi)| \leq \frac{1}{2}C(\|\psi + \xi\|^2 + \|\psi - \xi\|^2) = C(\|\psi\|^2 + \|\xi\|^2) .$$

Daí, tomando $\psi$ tal que $\|\psi\| \leq 1$ e $\xi = a\varphi$, onde $a \in \mathbb{C}$ e $|a| = 1$, $\|\varphi\| \leq 1$, então

$$|\Omega(\psi, a\varphi) + \Omega(a\varphi, \psi)| = |a\Omega(\psi, \varphi) + \overline{a}\Omega(\varphi, \psi)| \leq 2C ,$$

e se $\Omega(\psi, \varphi) \neq 0$, escrevendo

$$\Omega(\psi, \varphi) = |\Omega(\psi, \varphi)|e^{i\alpha} , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e

$$\Omega(\varphi, \psi) = |\Omega(\psi, \varphi)|e^{i\beta} , \quad \beta \in \mathbb{R} ,$$

então

$$|\Omega(\psi, \varphi)|\,|ae^{i\alpha} + \overline{a}e^{i\beta}| \leq 2C .$$

Tomando $a = e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$, então

$$ae^{i\alpha} + \overline{a}e^{i\beta} = 2e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} ,$$

de onde

$$|\Omega(\psi, \varphi)| \leq C ,$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$ tais que $\|\psi\|, \|\varphi\| \leq 1$, e portanto $\Omega$ é limitada. □

Pela afirmação anterior aplicada à forma sesquilinear $\sigma[\psi, \varphi](t)$, concluímos a prova. □

Como $\sigma[\psi, \varphi](t)$ é uma forma sesquilinear hermiteana para cada $t$, obtemos então, pelo teorema 2.13, um único operador linear limitado $E_t$ em $\mathscr{H}$ tal que

$$\sigma[\psi,\varphi](t) = \langle \psi, E_t\varphi \rangle \ , \tag{5.15}$$

para cada $t \in [0, 2\pi]$.

Com isso, podemos mostrar:

**Teorema 5.6** *Se $U$ é um operador linear unitário em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, então a família de operadores lineares $(E_t)_{t\in[0,2\pi]}$ definida em (5.15) é uma resolução de unidade em $\mathscr{H}$ tal que*

$$\langle \psi, U^k\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\langle \psi, E_t\varphi \rangle \tag{5.16}$$

*para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$ e para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 5.3,

$$\langle \psi, U^k\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma[\psi,\varphi](t)$$

para cada $k$ inteiro. Colocando $\psi = U^{-r}\xi$, então

$$\langle U^{-r}\xi, U^k\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma[U^{-r}\xi,\varphi](t) \ ,$$

o que implica

$$\langle \xi, U^{k+r}\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma[\xi, U^r\varphi](t) \ , \tag{5.17}$$

usando o fato que $\sigma[\psi,\varphi](t)$ é uma forma sesquilinear hermiteana para cada $t$.

Por outro lado,

$$\sigma[U^{-r}\xi,\varphi](t) = \langle U^{-r}\xi, E_t\varphi \rangle = \langle \xi, U^r E_t\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} e^{iks} d\sigma[\xi, E_t\varphi](s) \ , \tag{5.18}$$

e então

$$\sigma[\xi, E_t\varphi](s) = \langle \xi, E_s E_t\varphi \rangle \tag{5.19}$$

para todos $t, s \in [0, 2\pi]$ com $s \leq t$. Mais ainda,

$$\langle \xi, U^{k+r}\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(k+r)t} d\sigma[\xi,\varphi](t) \ , \tag{5.20}$$

de modo que, usando a unicidade da função $\sigma[\xi,\varphi]$, concluímos das equações (5.17), (5.19) e (5.20) que

$$\langle \xi, E_t \varphi \rangle = \langle \xi, E_s E_t \varphi \rangle$$

para todos $t, s \in [0, 2\pi]$ tais que $t \leq s$. Em particular,

$$E_t^2 = E_t \ ,$$

de modo que $(E_t)_t$ é uma família de projeções ortogonais satisfazendo à propriedade 1 de uma resolução de unidade.

A partir de (5.15) notamos de maneira imediata que $E_0 = 0$ e $E_{2\pi} = \mathbb{1}$ e, como a função de variação limitada $\sigma[\psi, \varphi]$ é contínua por baixo – pelo corolário 5.3 – então, para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$

$$\lim_{s \nearrow t} \langle \psi, E_s \varphi \rangle = \langle \psi, E_t \varphi \rangle \ ,$$

de modo que

$$\lim_{s \nearrow t} E_s = E_t$$

no sentido da convergência forte de operadores em $\mathscr{H}$, o que conclui a demonstração de que a família $(E_t)_{t \in [0,2\pi]}$ definida em 5.15 é uma resolução de unidade. □

A representação espectral de um operador unitário

Nesta seção desejamos definir a integral de Riemann-Stieltjes com relação a uma resolução de unidade $(E_t)_{t \in \mathbb{R}}$ como um operador linear $\int_a^b f(t) dE_t$ para todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e para toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Este resultado permitirá obter a chamada **resolução espectral** de um operador unitário.

Iniciamos por mostrar algumas propriedades elementares de uma resolução de unidade:

**Proposição 5.7** *Seja $(E_t)_{t \in \mathbb{R}}$ uma resolução de unidade em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$.*

1. *Se $t \leq s$, então $E_s - E_t$ é uma projeção ortogonal.*

2. *Se $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, então*

$$(E_{t_2} - E_{t_1})(E_{t_4} - E_{t_3}) = (E_{t_4} - E_{t_3})(E_{t_2} - E_{t_1}) = 0 \ .$$

3. *Se $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, então*

$$\langle \psi, (E_{t_3} - E_{t_1})\psi \rangle = \|(E_{t_3} - E_{t_1})\psi\|^2 = \|(E_{t_3} - E_{t_2})\psi\|^2 + \|(E_{t_2} - E_{t_1})\psi\|^2 \ .$$

4. *Para cada $\psi \in \mathscr{H}$, a função $t \mapsto \langle \psi, E_t \psi \rangle$ é crescente e limitada por $\|\psi\|^2$.*

5. *Para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$, a função $\sigma[\varphi, \psi] : t \mapsto \langle \varphi, E_t \psi \rangle$ é contínua por baixo e de variação limitada em cada intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com $V_a^b(\sigma[\varphi, \psi] \restriction_{[a,b]}) \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|$.*

**Demonstração:**
1: Dadas duas projeções ortogonais $P$ e $Q$, tem-se que $P - Q$ é uma projeção ortogonal se e somente se $PQ = QP = Q$. Logo, a propriedade desejada decorre da propriedade 1 para resoluções de unidade.
2: Decorre imediamente de aplicar sucessivamente 1.
3: Como $E_{t_3} - E_{t_1}$ é uma projeção ortogonal por 1, então

$$\begin{aligned}
\|(E_{t_3} - E_{t_2})\psi\|^2 = \langle \psi, (E_{t_3} - E_{t_1})\psi \rangle &= \langle \psi, (E_{t_3} - E_{t_2})\psi \rangle + \langle \psi, (E_{t_2} - E_{t_1})\psi \rangle \\
&= \|(E_{t_3} - E_{t_1})\psi\|^2 + \|(E_{t_2} - E_{t_1})\psi\|^2 \, .
\end{aligned}$$

4: Se $t \leq s$, então

$$\|E_t \psi\|^2 = \langle \psi, E_t \psi \rangle \leq \langle \psi, E_s \psi \rangle = \|E_s \psi\|^2 \, , \quad \forall \in \mathscr{H} \, ,$$

pois $E_t$ e $E_s$ são projeções ortogonais e $E_t E_s = E_t$. Ainda mais,

$$\|E_t \psi\|^2 \leq \|E_t\|^2 \|\psi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \, , \quad \forall \psi \in \mathscr{H} \, .$$

5: Sejam fixados $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$ e seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Então para cada partição $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ de $[a, b]$ tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |\sigma[\varphi, \psi](t_j) - \sigma[\varphi, \psi](t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{n} |\langle \varphi, (E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\psi \rangle| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |\langle (E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\varphi, (E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\psi \rangle| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \|(E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\varphi\| \, \|(E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\psi\| \\
&\leq \left( \sum_{j=1}^{n} \|(E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\varphi\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^{n} \|(E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\psi\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|(E_b - E_a)\varphi\| \, \|(E_b - E_a)\psi\| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \, ,
\end{aligned}$$

usando 3 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. $\square$

**Definição 5.8** *Uma **função escada** é uma função $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ para a qual existem $a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$ e constantes $c_j$, $j = 1, \cdots, n$ tais que $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_j$, onde $\chi_j = \chi_{[t_{j-1},t_j)}$ para todo $j = 1, \cdots, n-1$, $\chi_n = \chi_{[t_{n-1},t_n]}$ e $\chi_A$ denota a função característica num conjunto $A$.*

Denotamos por $T([a,b])$ o conjunto de todas as funções escada em $[a,b]$. Tal conjunto é um subespaço de $B([a,b])$, o espaço de Banach das funções limitadas em $[a,b]$, com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

O fecho de $T([a,b])$ em $B([a,b])$ em relação a esta norma é denotado por $I([a,b])$ e é possível mostrar que (ver e.g. o Teorema 12.3, pp. 191-192 de 2 para uma prova)

**Proposição 5.9** *O fecho de $T([a,b])$ em $B([a,b])$ é o subespaço das funções $f \in B([a,b])$ tais que $f(x^+)$ existe para todo $a \leq x < b$ e $f(x^-)$ existe para todo $a < x \leq b$. Em particular, $C([a,b]) \subset I([a,b])$.*

Se $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_j$ é uma função escada em um intervalo $[a,b]$ e $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ é uma resolução de unidade em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, definimos

$$\int_a^b f(t) dE_t = \sum_{j=1}^{n} c_j (E_{t_j} - E_{t_{j-1}}) \,. \tag{5.21}$$

Usando a propriedade 1 de resoluções de unidade é imediato mostrar que tal definição não depende da representação escolhida para a função $f$, de modo que fica bem definido um funcional linear $f \mapsto \int_a^b f(t) dE_t$ de $T([a,b])$ em $\mathbb{C}$ que é limitado, pois para todo $\psi \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b f(t) dE_t \psi \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j (E_{t_j} - E_{t_{j-1}}) \psi \right\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{n} |c_j| \|(E_{t_j} - E_{t_{j-1}}) \psi\|^2 \\
&\leq \|f\|_\infty \|(E_{t_j} - E_{t_{j-1}}) \psi\|^2 \\
&\leq \|f\|_\infty \|\psi\|^2 \,.
\end{aligned}$$

Assim, pelo teorema BLT 2.22, tal funcional possui uma única extensão contínua para o fecho $I([a,b])$ de $T([a,b])$, denotada por

$$\int_a^b f(t) dE_t \,, \quad \forall f \in I([a,b]) \,. \tag{5.22}$$

Em particular, tal operador linear limitado em $\mathscr{H}$ é definido para toda função contínua $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

**Observação 5.10** *A construção acima permite obter uma construção alternativa da integral de Riemann-Stieltjes em relação a uma função de variação limitada $\alpha \in BV([a,b])$: se $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_j$ é uma função escada na notação acima, então podemos definir*

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j [\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] \ ,$$

*onde $a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$. Daí, por um argumento análogo ao dado para resoluções de unidade, o funcional linear limitado acima pode ser unicamente estendido para o fecho de $T([a,b])$ que contém $C([a,b])$, permitindo assim definir alternativamente a integral de Riemann-Stieltjes já apresentada na seção anterior.*

Do fato que podemos definir o operador 5.22 como o limite forte de 5.21 aproximando $f$ por funções escada, decorrem as seguintes propriedades:

**Proposição 5.11** *Seja $(E_t)_t$ uma resolução de unidade em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então para toda $f, g \in I([a,b])$, tem-se:*

1. $\langle \psi, \left( \int_a^b f(t) dE_t \right) \varphi \rangle = \int_a^b f(t) d\langle \psi, E_t \varphi \rangle \ , \quad \forall \psi, \varphi \in \mathscr{H}$ .
2. $E_s \int_a^b f(t) dE_t = \int_a^s f(t) dE_t \ , \quad \forall a \leq s \leq b$ .
3. $\left( \int_a^b f(t) dE_t \right) \left( \int_a^b g(t) dE_t \right) = \int_a^b f(t) g(t) dE_t$ .
4. $\left( \int_a^b f(t) dE_t \right)^* = \int_a^b \overline{f(t)} dE_t$ .
5. $\left\| \int_a^b f(t) dE_t \psi \right\|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 d\langle \psi, E_t \psi \rangle$ .

**Demonstração:**
1: Como, fixado $\psi \in \mathscr{H}$, $l(\varphi) = \langle \psi, A\varphi \rangle$ é um funcional linear contínuo em $\mathscr{H}$, então basta mostrar o caso em que $f$ é uma função escada e notar que $\int_a^b f(t) dE_t$ é o limite forte de 5.21 na aproximação por essas funções. Mas se $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_j$ é uma

função escada, então

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi, \left( \int_a^b f(t) dE_t \right) \varphi \right\rangle &= \left\langle \psi, \sum_{j=1}^n c_j (E_{t_j} - E_{t_{j-1}}) \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^n c_j (\langle \psi, E_{t_j} \varphi \rangle - \langle \psi, E_{t_{j-1}} \varphi \rangle) \\
&= \sum_{j=1}^n c_j (\sigma[\psi, \varphi](t_{j-1}) - \sigma[\psi, \varphi](t_{j-1})) \\
&= \int_a^b f(t) d\sigma[\psi, \varphi](t) \\
&= \int_a^b f(t) d\langle \psi, E_t \varphi \rangle \, .
\end{aligned}$$

2: Pela continuidade por cima de uma resolução de unidade, novamente basta mostrar o caso em que $f$ é uma função escada $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_j$. Neste caso, para cada $\psi \in \mathscr{H}$,

$$\begin{aligned}
E_s \int_a^b f(t) dE_t \psi &= E_s \left( \sum_{j=1}^n c_j (E_{t_j} - E_{t_{j-1}}) \psi \right) \\
&= \sum_{j=1}^s c_j (E_{t_j} - E_{t_{j-1}}) \psi \\
&= \int_a^s f(t) dE_t \psi \, ,
\end{aligned}$$

pois $E_s E_{t_j} = E_s$ para todo $s \leq t_j$.

3: Imediato para funções escada.

4: Como a aplicação $A \mapsto A^*$ é contínua (na topologia fraca) (ver Teorema VI.3 de 4), então basta novamente mostrar o caso em que $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_j$ é uma função escada e tomar o limite nas seminormas

$$\|T\|_{\psi,\varphi} = \langle \psi, A\varphi \rangle \, ,$$

para todo $A$ em $\mathscr{H}$ limitado. Para uma função escada $f$ tem-se então que

$$\begin{aligned}\left\langle \psi, \left(\int_a^b f(t) dE_t \varphi\right)\right\rangle &= \sum_{j=1}^{n} c_j \langle \psi, (E_{t_j} - E_{t_{j-1}} \varphi)\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \langle (E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\psi, \varphi\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{c_j} (E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\psi, \varphi\rangle \\ &= \left\langle \left(\int_a^b \overline{f(t)} dE_t\right) \psi, \varphi \right\rangle ,\end{aligned}$$

o que mostra este caso, pela unicidade do adjunto de um operador limitado.

5: Combinando 1, 3 e 4, temos

$$\begin{aligned}\left\| \int_a^b f(t) dE_t \psi \right\|^2 &= \left\langle \psi, \left(\int_a^b f(t) dE_t\right)^* \left(\int_a^b f(t) dE_t\right) \psi \right\rangle \\ &= \left\langle \psi, \int_a^b |f(t)|^2 dE_t \psi \right\rangle \\ &= \int_a^b |f(t)|^2 d\langle \psi, E_t \psi\rangle \ .\end{aligned}$$

□

Usando os resultados desta seção, obtemos então a seguinte versão do teorema 5.6:

**Teorema 5.12 (teorema espectral para operadores unitários)** *Seja $U$ um operador unitário em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então existe uma única resolução de unidade $(E_t)_{t\in[0,2\pi]}$ tal que, para toda $f \in C(\mathbb{S}^1)$*

$$f(U)\psi = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dE_t \psi \ , \quad \forall \psi \in \mathscr{H} \ , \tag{5.23}$$

*e em particular*

$$U\psi = \int_0^{2\pi} e^{it} dE_t \psi \ , \quad \forall \psi \in \mathscr{H} \ . \tag{5.24}$$

**Demonstração:** O teorema 5.6 nos garante a existência de uma única resolução de unidade $(E_t)_{t\in[0,2\pi]}$ para um operador unitário $U$ tal que, para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$ e para toda $f \in C(\mathbb{S}^1)$

$$\langle \psi, f(U)\varphi\rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) d\langle \psi, E_t \varphi\rangle \ ,$$

de modo que o operador $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) dE_t$ coincide, por construção, com $f(U)$ e satisfaz a representação 5.23. $\square$

# 6 Operadores auto-adjuntos

Até o momento tratamos apenas de operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert. Nesta seção, estenderemos a definição de adjunto de um operador linear limitado para um operador ilimitado e analisaremos algumas propriedades do seu espectro. O passo seguinte é aplicar o teorema espectral para operadores unitários obtido na seção anterior para provar o teorema espectral para operadores linear auto-adjuntos, que é o objetivo central deste trabalho.

Domínio e gráfico

Conforme veremos ao longo desta seção, operadores lineares em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ não necessariamente limitados podem não ser definidos em todo $\mathscr{H}$, de modo que é necessário explicitar um **domínio** para tal operador, que é definido como um subespaço linear de $\mathscr{H}$.

**Definição 6.1** *Um operador linear $T$ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é **densamente definido** se o seu domínio é um subespaço linear denso de $\mathscr{H}$.*

**Definição 6.2** *Seja $T : \mathcal{D}(T) \to \mathscr{H}$ um operador linear densamente definido em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. O **gráfico** de $T$ é o subespaço*

$$\Gamma(T) = \{(\psi, T\psi) \mid \psi \in \mathcal{D}(T)\} \subset \mathscr{H} \times \mathscr{H} \,. \tag{6.1}$$

Na definição acima, $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ é identificado com o espaço de Hilbert $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ com produto interno

$$\langle(\psi_1, \varphi_1), (\psi_2, \varphi_2)\rangle = \langle\psi_1, \psi_2\rangle_{\mathscr{H}} + \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\mathscr{H}} \,.$$

Os teoremas abaixo (apresentados sem demonstração) serão usados ao longo das próximas seções. Mais detalhes podem ser encontrados nas referências [4] e [5].

**Teorema 6.3 (Teorema do Gráfico Fechado)** *Seja $T$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(T)$ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então $T$ é limitado se e somente se $\Gamma(T)$ é fechado e*

$\mathcal{D}(T) = \mathscr{H}$.

Como consequência, temos:

**Teorema 6.4 (Hellinger-Toeplitz)** *Seja $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador linear em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Se*

$$\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle$$

*para todo $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$, então $A$ é limitado.*

Este teorema deixa claro a necessidade de se considerar domínios específicos para operadores não-limitados: se um operador não-limitado é auto-adjunto (num sentido a ser definido de maneira explícita mais a frente), então não é possível definir este operador em todo o espaço $\mathscr{H}$.

**Proposição 6.5** *Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert. Um subconjunto $G \subset \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ é o gráfico de um operador linear se e somente se é um subespaço linear de $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ e se $(0, \psi) \in G$ implica $\psi = 0$.*

**Demonstração:** Se $G$ é o gráfico de um operador linear, então as propriedades enunciadas são imediatas. Reciprocamente, se $G$ é um subespaço de $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ e se $(0, \psi) \in G$ implica $\psi = 0$, seja então

$$\mathcal{D}(T) = \{\psi \in \mathscr{H} \mid \exists \varphi \in \mathscr{H} : (\psi, \varphi) \in G\} .$$

Por hipótese, tal $\varphi$ é único e $\mathcal{D}(T)$ é um subespaço de $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Definindo $T\psi = \varphi$ para todo $\psi \in \mathcal{D}(T)$, então $T$ é linear e por construção, possui domínio $\mathcal{D}(T)$. Ainda mais, $G = \Gamma(T)$. □

**Definição 6.6** *Seja $T : \mathcal{D}(T) \to \mathscr{H}$ um operador linear em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Um operador linear $S : \mathcal{D}(S) \to \mathscr{H}$ é chamado uma **extensão de** $T$ se $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$, o que é denotado por $T \subset S$.*

Equivalentemente, $S$ é uma extensão de $T$ se

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S) \text{ , e } T\varphi = S\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(T) .$$

**Definição 6.7** *Um operador linear $T : \mathcal{D}(T) \to \mathscr{H}$ é dito **fechado** se $\Gamma(T)$ é um subespaço fechado de $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Um operador linear $T$ é dito **fechável** se existe uma extensão fechada $S$ de $T$.*

Se $S_1$ e $S_2$ são extensões fechadas de $T$, então o operador $S$ definido em $\mathcal{D}(S_1) \cap \mathcal{D}(S_2)$ é uma extensão fechada de $T$. Ordenando parcialmente a coleção de todas as extensões de $T$ pela relação de ordem

$$S \prec S' \iff S \subset S' ,$$

então as extensões fechadas de $T$ possuem um elemento mínimo $\overline{T}$ que é a menor extensão fechada de $T$ no sentido de que, dada uma extensão fechada $S$ de $T$, então $T \subset \overline{T} \subset S$. O operador linear $\overline{T}$ é chamado **fecho** do operador $T$.

**Proposição 6.8** *Se $T$ é um operador linear fechável, então $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.*

**Demonstração:** Dada uma extensão fechada $S$ de $T$, tem-se $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$. Como $\overline{\Gamma(T)}$ é um subespaço de $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ e $(0, \psi) \in \overline{\Gamma(T)}$ implica $\psi = 0$, então pela proposição 6.5, $\overline{\Gamma(T)}$ é o gráfico de um operador linear $R$. Mas, por definição, $R$ é uma extensão fechada de $T$ tal que $R \subset S$, para toda extensão fechada $S$ de $T$, de modo que $R = \overline{T}$. □

Adjunto

Seja $T$ um operador linear densamente definido com domínio $\mathcal{D}(T)$ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Definimos $\mathcal{D}(T^*)$ como o conjunto dos $\varphi \in \mathscr{H}$ tais que o funcional linear

$$\begin{aligned} l &: \mathcal{D}(T) \to \mathbb{C} , \\ l &: \psi \mapsto \langle \varphi, T\psi \rangle \end{aligned}$$

é limitado. Como $\mathcal{D}(T)$ é um subespaço linear denso de $\mathscr{H}$, então pelo Teorema 2.22, pode-se estender tal funcional linear para um funcional linear limitado em $\mathscr{H}$. Daí, pelo lema de representação de Riesz, teorema 2.9, decorre que existe um único operador linear com domínio $\mathcal{D}(T^*)$, denotado por $T^*$, tal que

$$l(\psi) = \langle T^* \varphi, \psi \rangle ,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(T^*)$. Com isso mostramos:

**Proposição 6.9** *Se $T$ é um operador linear densamente definido com domínio $\mathcal{D}(T)$, então* *existe um único operador linear $T^*$ com domínio $\mathcal{D}(T^*)$ e tal que*

$$\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T^*\varphi, \psi \rangle \, , \tag{6.2}$$

*para todo $\psi \in \mathcal{D}(T)$ e para todo $\varphi \in \mathcal{D}(T^*)$.*

O operador linear $T^*$ dado pela equação (6.2) é denominado **adjunto** do operador linear $T$.

**Lema 6.10** *Seja $T$ um operador linear densamente definido com domínio $\mathcal{D}(T)$ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então* $\ker T^* = (\operatorname{Ran} T)^{\perp}$.

**Demonstração:** Temos $\varphi \in (\operatorname{Ran} T)^{\perp}$ se e somente se

$$\langle \varphi, T\psi \rangle = 0 \, , \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T) \, ,$$

ou seja, se e somente se $\varphi \in \mathcal{D}(T^*)$ e $T^*\varphi = 0$, e portanto, se e somente se $\varphi \in \ker T^*$. □

Se $\mathcal{D}(T^*)$ é denso, então de maneira idêntica ao que foi feito acima, podemos obter o adjunto $T^{**}$ do operador adjunto $T^*$ de $T$. Nesta notação temos:

**Proposição 6.11** *Se $\mathcal{D}(T^*)$ é denso, então $T \subset T^{**}$.*

**Demonstração:** De fato, Sejam $\psi \in \mathcal{D}(T)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(T^*)$. Então

$$\langle \psi, T^*\varphi \rangle = \langle T\psi, \varphi \rangle$$

é uma aplicação contínua em $\varphi$, de modo que $\psi \in \mathcal{D}(T^{**})$, por definição deste domínio, e $T^{**}\psi = T\psi$. □

**Proposição 6.12** *Seja $T$ um operador linear densamente definido com domínio $\mathcal{D}(T)$ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então:*

1. *$T^*$ é fechado.*

2. *$T$ é fechável se e somente se $\mathcal{D}(T^*)$ é denso e $\overline{T} = T^{**}$.*

**Demonstração:** Seja $U : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ definido por

$$U(\varphi, \psi) = (-\psi, \varphi) \, .$$

Então $U$ é unitário pois $U^*(\psi,\varphi) = (\varphi,-\psi)$, de modo que $U^* = U^{-1}$. Como consequência, para todo subespaço $\mathcal{E}$ de $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ tem-se

$$U(\mathcal{E}^\perp) = U(\mathcal{E})^\perp$$

e

$$U^{-1}(\mathcal{E}^\perp) = (U^{-1}(\mathcal{E}))^\perp .$$

Daí, temos que $(\varphi,\psi) \in U(\Gamma(T))^\perp$ se e somente se

$$\langle(\varphi,\psi),(-T\xi,\xi)\rangle = 0$$

para todo $\xi \in \mathcal{D}(T)$, ou seja,

$$\langle\psi,\xi\rangle = \langle\varphi,T\xi\rangle$$

para todo $\xi \in \Gamma(T^*)$. Isso mostra que $\Gamma(T^*) = U(\Gamma(T))^\perp$. Em particular, $\Gamma(T^*)$ é fechado e portanto $T^*$ é fechado, o que mostra 1.

Para mostrar 2, notamos que se $\mathcal{D}(T^*)$ é denso, então $T^{**}$ é bem-definido e fechado por 1. Ainda, $T^{**}$ é uma extensão fechada de $T$ pela proposição 6.11, de modo que $T$ é fechável. Reciprocamente, se $\mathcal{D}(T^*)$ não é denso, então existe $\varphi \neq 0$ tal que $\varphi \in (\mathcal{D}(T^*))^\perp$. Isso implica então que $(\varphi,0) \in \Gamma(T^*)^\perp$, e portanto $(\varphi,0) = U^{-1}(-\varphi,0) \in U^{-1}(\Gamma(T^*)^\perp) = U^{-1}(\Gamma(T^*))^\perp$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Gamma(T^*))^\perp &= U^{-1}(U(\Gamma(T))^\perp)^\perp \\ &= U^{-1}(U(\Gamma(T)^{\perp\perp})) \\ &= \Gamma(T)^{\perp\perp} \\ &= \overline{\Gamma(T)} . \end{aligned}$$

Como $\overline{\Gamma(T)}$ contém $(0,\varphi)$ para algum $\varphi \neq 0$, então não é gráfico de um operador linear, de modo que $T$ não é fechável. □

**Definição 6.13** *Um operador linear $T$ com domínio denso $\mathcal{D}(T)$ é dito **simétrico** se*

$$\langle T\psi,\varphi\rangle = \langle\psi,T\varphi\rangle \tag{6.3}$$

*para todo $\psi,\varphi \in \mathcal{D}(T)$.*

Observamos que a condição (6.3) é equivalente à condição $T \subset T^*$. Pela proposição

6.12, $T^*$ é uma extensão fechada de $T$ e por consequência,

$$\overline{T} = T^{**} \subset T^* .$$

Por outro lado, pela proposição 6.11, temos que

$$T \subset T^{**} .$$

Dizemos então que um operador $T$ é:

1. **Simétrico** se $T \subset T^{**} \subset T^*$;

2. **Simétrico fechado** se $T = T^{**} \subset T^*$;

3. **Essencialmente auto-adjunto** se $T \subset T^{**} = T^*$;

4. **Auto-adjunto** se $T = T^{**} = T^*$.

Em particular, se $T$ é um operador linear simétrico *limitado* definido em todo o espaço $\mathscr{H}$, então $T$ é auto-adjunto pois o único caso possível é o caso 4 acima.

Concluímos esta seção com o critério básico de auto-adjunção:

**Teorema 6.14 (critério básico de auto-adjunção)** *Seja $T$ um operador linear simétrico com domínio $\mathcal{D}(T)$ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$T$ é auto-adjunto.*

2. *$T$ é fechado e* $\ker(T^* \pm i\mathbb{1}) = \{0\}$.

3. $\mathrm{Ran}(T \pm i\mathbb{1}) = \mathscr{H}$.

**Demonstração:** $1 \implies 2$: Se $T$ é auto-adjunto, então é fechado. Ainda mais, se $(T^* + i\mathbb{1})\varphi = 0$, então $T^*\varphi = -i\varphi$ e $\langle T\varphi, \varphi\rangle = i\langle \varphi, \varphi\rangle$ por um lado e, por outro, $\langle \varphi, T\varphi\rangle = -i\langle \varphi, \varphi\rangle$, de modo que $\varphi = 0$. Um argumento similar mostra que $\ker(T^* - i\mathbb{1}) = \{0\}$.

$2 \implies 3$: Como $\mathrm{Ran}(T \pm i\mathbb{1})^\perp = \ker(T^* \pm i\mathbb{1}) = \{0\}$, então $\mathrm{Ran}(T \pm i\mathbb{1})$ é denso. Basta agora mostrar que os subespaços $\mathrm{Ran}(T + i\mathbb{1})$ e $\mathrm{Ran}(T - i\mathbb{1})$ são fechados. Para tal, seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}(T)$ tal que $((T + i\mathbb{1})\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\psi \in \mathscr{H}$. Como $T$ é simétrico, então

$$\|(T + i\mathbb{1})\varphi_n\|^2 = \|T\varphi_n\|^2 + \|\varphi_n\|^2,$$

e portanto $\varphi_n$ converge para $\varphi$ e $T\varphi_n$ também converge, pois as sequências são de Cauchy. Como $T$ é fechado, então $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ e $T\varphi = \lim_{n\to\infty} T\varphi_n$. Assim, $((T + i\mathbb{1})\varphi_n)_n$ converge para $\psi = (T + i\mathbb{1})\varphi$, de modo que $\psi \in \mathrm{Ran}(T + i\mathbb{1})$. O mesmo argumento mostra o caso $(T - i\mathbb{1})$.

3 $\implies$ 1: Supondo $T$ simétrico com $\mathrm{Ran}(T \pm i\mathbb{1}) = \mathscr{H}$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(T^*)$, então existe $\xi \in \mathcal{D}(T)$ tal que $(T^* - i\mathbb{1})\varphi = (T - i\mathbb{1})\xi$. Em particular, $(T^* - i\mathbb{1})(\xi - \varphi) = 0$, pois $T$ e $T^*$ coincidem em $\mathcal{D}(T)$, de onde vem que $\xi - \varphi \in \ker(T^* - i\mathbb{1}) = \mathrm{Ran}(T + i\mathbb{1})^\perp = \{0\}$, pelo lema 6.10 e usando que $\mathrm{Ran}(T \pm i\mathbb{1}) = \mathscr{H}$, por hipótese. Assim, $\xi = \varphi$, de onde decorre que $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ e portanto $T$ é auto-adjunto. □

Espectro

**Definição 6.15** *Seja $T$ um operador linear fechado com domínio $\mathcal{D}(T)$ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$.*

- *O **conjunto resolvente** de $T$ é definido como*

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid z\mathbb{1} - T \text{ é uma bijeção com inversa limitada}\} . \tag{6.4}$$

- *O **operador resolvente** de $T$ é o operador $R_z(T) = (z\mathbb{1} - T)^{-1}$ para $z \in \rho(T)$.*

- *O **espectro** de $T$ é o conjunto*

$$\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \rho(T)\} . \tag{6.5}$$

- *Um $\psi \neq 0$ em $\mathcal{D}(T)$ é dito **autovetor** de $T$ se existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $T\psi = z\psi$, que é chamado **autovalor** correspondente ao autovetor $\psi$. O conjunto dos autovalores de $T$ é chamado **espectro pontual** de $T$, denotado por $\sigma_p(T)$. Se $z$ não é autovalor de $T$ e $\mathrm{Ran}(z\mathbb{1} - T)$ não é densa, então $z$ é dito pertencer ao **espectro residual** de $T$, conjunto denotado por $\sigma_{res}(T)$.*

Observamos que se $\psi$ é autovetor de $T$ com autovalor $z$, então $z\mathbb{1} - T$ não é injetor, de modo que $z \in \sigma(T)$. Ainda, se $T$ não é fechado, então $z\mathbb{1} - T$ não é fechado e $(z\mathbb{1} - T)^{-1}$ também não pode ser fechado, de modo que neste caso $\rho(T) = \varnothing$.

**Proposição 6.16** *Seja $T$ um operador linear fechado com domínio $\mathcal{D}(T)$. Então*

$$\sigma(T^*) = \{\overline{z} \mid z \in \sigma(T)\} ,$$

*e*

$$\rho(T^*) = \{\overline{z} \mid z \in \rho(T)\} .$$

*Em particular, o espectro de um operador auto-adjunto é real.*

**Demonstração:** Seja

$$\overline{\rho(T)} = \{\overline{z} \mid z \in \rho(T)\} .$$

Se mostrarmos que $\rho(T) \subset \overline{\rho(T)}$, então a proposição fica mostrada, pois como $T$ é fechado, então

$$\rho(T^*) \subset \overline{\rho(T^{**})} = \overline{\rho(T)} ,$$

o que implica

$$\overline{\rho(T^*)} \subset \rho(T) .$$

Seja então $z \in \rho(T)$. Como $z\mathbb{1} - T$ é injetor e $\overline{z}\mathbb{1} - T^*$ é injetor, então $(\overline{z}\mathbb{1} - T^*) = R_z(T)^*$ é limitado, o que mostra que $\overline{z} \in \rho(T^*)$. □

Transformada de Cayley

Nesta seção, definiremos a transformada de Cayley e estudaremos algumas das suas propriedades. A motivação para as definições a seguir decorrem do fato de que a aplicação

$$t \mapsto \frac{t-i}{t+i}$$

estabelece uma bijeção entre a reta real e o círculo unitário com o ponto 1 removido. O objetivo da Transformada de Cayley é então obter uma relação análoga entre operadores simétricos e isometrias com interesse particular no caso de operadores auto-adjuntos e unitários. Com isso, teremos todas as ferramentas necessárias para a demonstração do teorema espectral para operadores auto-adjuntos. Durante toda esta seção, $\mathscr{H}$ denotará um espaço de Hilbert complexo.

**Proposição 6.17** *Seja $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador linear simétrico. Então:*

1. $\|(S + i\mathbb{1})\psi\|^2 = \|\psi\|^2 + \|S\psi\|^2 , \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(S).$
2. *$S$ é fechado se e somente se* $\mathrm{Ran}(S + i\mathbb{1})$ *é fechado.*
3. *$S + i\mathbb{1}$ é injetor.*

**Demonstração:** O item 1 decorre de

$$\begin{aligned}\|S\psi + i\psi\|^2 = \langle S\psi + i\psi, S\psi + i\psi\rangle &= \langle S\psi, S\psi\rangle + i\langle S\psi, \psi\rangle - i\langle \psi, S\psi\rangle + \langle \psi, \psi\rangle \\ &= \|S\psi\|^2 + \|\psi\|^2\end{aligned}$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(S)$, pois $S$ é simétrico. Assim, concluímos que a aplicação $(\psi, S\psi) \mapsto (S + i\mathbb{1})\psi$ é uma isometria injetora de $\Gamma(S)$ em $\mathrm{Ran}(S + i\mathbb{1})$ e portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado, decorre que $S$ é fechado se e somente se $\mathrm{Ran}(S + i\mathbb{1})$ é fechado, mostrando 2. Ainda, 3 decorre diretamente de 1. □

É imediato notar que a proposição 6.17 vale de maneira análoga para $S - i\mathbb{1}$.

**Definição 6.18** *Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert e seja $A$ um operador linear simétrico densamente definido com domínio $\mathcal{D}(A) \subset \mathscr{H}$. A **transformada de Cayley** de $A$ é o operador $U_A : \mathrm{Ran}(A + i\mathbb{1}) \to \mathscr{H}$ definido por*

$$U_A = (A - i\mathbb{1})(A + i\mathbb{1})^{-1} . \tag{6.6}$$

Pela proposição 6.17, $A + i\mathbb{1}$ é inversível com inversa limitada em $\mathrm{Ran}(A + i\mathbb{1})$ e

$$\mathrm{Ran}((A + i\mathbb{1})^{-1}) = \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A - i\mathbb{1}) ,$$

de modo que $U_A$ é um operador linear bem-definido.

**Proposição 6.19** *Seja $U_A$ a transformada de Cayley de um operador simétrico $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$. Então:*

1. *$U_A$ é uma isometria e $\mathcal{D}(U_A) = \mathrm{Ran}(A - i\mathbb{1})$. Ainda, se $A$ é fechado, então $U_A$ é fechado.*

2. *$\mathrm{Ran}(\mathbb{1} - U_A) = \mathcal{D}(A)$, logo é densa em $\mathscr{H}$, $1 \notin \sigma_p(U_A)$ (ou seja, 1 não é autovalor de $U_A$) e a aplicação*
$$(\mathbb{1} - U_A)^{-1} : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(U_A)$$
*existe e é sobrejetora.*

3. *A aplicação $A \mapsto U_A$ é inversível e*
$$A = i(\mathbb{1} + U)(\mathbb{1} - U)^{-1} \tag{6.7}$$
*em $\mathcal{D}(A)$.*

**Demonstração:**
1: Como $(A+i\mathbb{1})^{-1}(\mathrm{Ran}(A+i\mathbb{1})) = \mathcal{D}(A)$, então $\mathrm{Ran}(U_A) = \mathrm{Ran}(A-i\mathbb{1})$. Para mostrar que $U_A$ é uma isometria, notamos que

$$\|(A-i\mathbb{1})\psi\|^2 = \|(A+i\mathbb{1})\psi\|^2\ , \quad \forall\psi\in\mathcal{D}(A)\ ,$$

pois $A$ é simétrico, de modo que

$$\|U_A\psi\|^2 = \|(A-i\mathbb{1})(A+i\mathbb{1})^{-1}\psi\|^2 = \|(A+i\mathbb{1})(A+i\mathbb{1})^{-1}\psi\|^2 = \|\psi\|^2\ ,$$

para todo $\psi\in\mathcal{D}(U_A)$, o que mostra que $U_A$ é uma isometria. Ainda, se $A$ é fechado, então $\mathrm{Ran}(A-i\mathbb{1})$ é fechada e, como $U_A$ é uma isometria limitada, então pelo teorema do gráfico fechado, $U_A$ é fechado.
2: Seja $\psi\in\mathcal{D}(A)$ tal que $U_A\psi=\psi$. Então

$$(A-i\mathbb{1})(A+i\mathbb{1})^{-1}\psi = (A+i\mathbb{1})(A-i\mathbb{1})^{-1}\psi\ ,$$

de onde vem que

$$2i(A+i\mathbb{1})^{-1}\psi = 0\ ,$$

e como $A+i\mathbb{1}$ é inversível em $\mathcal{D}(A)$, então $\psi=0$, de onde concluímos que $1\notin\sigma_p(U_A)$ e portanto $(\mathbb{1}-U_A)^{-1}$ é bem-definido. Seja $\psi\in\mathrm{Ran}(A+i\mathbb{1})=\mathcal{D}(A)$. Então

$$(\mathbb{1}-U_A)\psi = [(A+i\mathbb{1})-(A-i\mathbb{1})](A+i\mathbb{1})^{-1}\psi = 2i(A+i\mathbb{1})^{-1}\psi\ ,$$

e assim, $\psi\in\mathcal{D}(A)$. Por outro lado, se $\varphi\in\mathcal{D}(A)$, então $\psi=\frac{1}{2i}(A+i\mathbb{1})\varphi\in\mathrm{Ran}(A+i\mathbb{1})$ e

$$\varphi = 2i(A+i\mathbb{1})^{-1}\psi = ((A+i\mathbb{1})-(A-i\mathbb{1}))(A+i\mathbb{1})^{-1}\psi = (\mathbb{1}-U_A)\psi\ ,$$

de onde vem que $\varphi\in\mathrm{Ran}(\mathbb{1}-U_A)$. Daí, como $\mathrm{Ran}(\mathbb{1}-U_A)=\mathcal{D}(A)$ e $U_A$ é injetor, então $\mathrm{Ran}((\mathbb{1}-U_A)^{-1})=\mathcal{D}(U_A)$.

3: Finalmente, para $\psi \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}((\mathbb{1} - U_A)^{-1})$,

$$
\begin{aligned}
i(\mathbb{1} + U_A)(\mathbb{1} - U_A)^{-1}\psi &= i(\mathbb{1} + U_A) \cdot \frac{1}{2i}(A + i\mathbb{1}\psi \\
&= \frac{1}{2}[\mathbb{1} + (A - i\mathbb{1})(A + i\mathbb{1})^{-1}](A + i\mathbb{1})\psi \\
&= \frac{1}{2}(A + i\mathbb{1} - A + i\mathbb{1})\psi \\
&= A\psi \, .
\end{aligned}
$$

□

**Teorema 6.20** *Seja $U$ uma isometria fechada tal que* $\mathrm{Ran}(\mathbb{1} - U)$ *é densa em $\mathscr{H}$. Então existe um único operador linear simétrico e fechado $A$ com $\mathcal{D}(A) = \mathrm{Ran}(\mathbb{1} - U)$ tal que $U$ é a transformada de Cayley de $A$.*

**Demonstração:** Para mostrar a existência, seja $\psi \in \mathcal{D}(U)$ tal que $U\psi = \psi$. Então para todo $\varphi \in \mathscr{H}$,

$$
\langle \psi, (\mathbb{1} - U)\psi \rangle = \langle (\mathbb{1} - U)\psi, \psi \rangle = 0 \, ,
$$

e como por hipótese, $\overline{\mathrm{Ran}(\mathbb{1} - U)} = \mathscr{H}$, decorre que $\psi = 0$ e portanto $1 \notin \sigma_p(U)$. Assim, podemos definir

$$
A : \mathrm{Ran}(\mathbb{1} - U) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}
$$

por

$$
A\psi = i(\mathbb{1} + U)(\mathbb{1} - U)^{-1}\psi \, , \quad \forall \psi \in \mathrm{Ran}(\mathbb{1} - U) \, .
$$

Daí, $\mathrm{Ran}(A) = \mathrm{Ran}(\mathbb{1} + U)$ e, por definição, $A$ é densamente definido. Dados $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(A)$, existem $\xi, \eta \in \mathcal{D}(U)$ com $\psi = (\mathbb{1} - U)\xi$ e $\varphi = (\mathbb{1} - U)\eta$, de onde vem

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle \varphi, i(\mathbb{1} + U)(\mathbb{1} - U)^{-1}\psi \rangle &= i\langle (\mathbb{1} - U)\eta, (\mathbb{1} + U)\xi \rangle \\
&= i(\langle \eta, U\xi \rangle - \langle U\eta, \xi \rangle) \, ,
\end{aligned}
$$

e por outro lado,

$$
\langle A\varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, A\varphi \rangle} = \overline{i(\langle \xi, U\eta \rangle - \langle U\xi, \eta \rangle)} = \langle \varphi, A\psi \rangle \, ,
$$

o que mostra que $A$ é simétrico.

Para mostrar que $A$ é fechado, seja $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}(A)$ com $\psi_n \to \psi$

e $A\psi_n \to \varphi$ quando $n \to \infty$. Se $\xi_n = (\mathbb{1} - U)^{-1}\psi_n$, então

$$\psi_n = (\mathbb{1} - U)\xi_n \ ,$$

e

$$-iA\psi_n = (\mathbb{1} + U)\xi_n \ ,$$

o que implica que

$$\xi_n = \frac{1}{2}(\psi_n - iA_n\psi_n)$$

que converge para $\frac{1}{2}(\psi - i\varphi)$ quando $n \to \infty$ e

$$U\xi_n = \frac{1}{2}(-\psi_n - iA_n\psi_n)$$

que converge para $\frac{1}{2}(-\psi - i\varphi)$ quando $n \to \infty$. Como $U$ é fechado, então $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n \in \mathcal{D}(U)$, $U\xi = \frac{1}{2}(-\psi - i\varphi)$ e, novamente pelo fato de que $U$ é fechado, $\psi = (\mathbb{1} - U)\xi \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} A\psi_n = \lim_{n\to\infty} i(\mathbb{1} + U)\xi_n = i(\mathbb{1} + U)\xi = i(\mathbb{1} + U)(\mathbb{1} - U)^{-1}\psi = A\psi \ ,$$

e portanto $A$ é fechado.

Para mostrar que $U_A$ é a transformada de Cayley de $A$, sejam $\psi \in \mathcal{D}(A)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ tais que $\psi = (\mathbb{1} - U)\varphi$. Então $A\psi = i(\mathbb{1} + U)\varphi$ e, por outro lado, se $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, então $A((\mathbb{1} - U)\varphi) = i(\mathbb{1} + U)\varphi$ e portanto,

$$(A + i\mathbb{1})\psi = 2i\varphi$$

e

$$(A - i\mathbb{1})\psi = 2iU\psi \ .$$

Assim, $\mathcal{D}(U) = \mathrm{Ran}(A + i\mathbb{1})$, $\mathrm{Ran}(U) = \mathrm{Ran}(A - i\mathbb{1})$ e $U = (A - i\mathbb{1})(A + i\mathbb{1})^{-1}$.

Finalmente, a unicidade é clara: se $B$ é simétrico e possui transformada de Cayley $U$, então

$$B = i(\mathbb{1} + U)(\mathbb{1} - U)^{-1} = A \ .$$

$\square$

**Corolário 6.21** *Seja $A$ um operador simétrico e fechado com transformada de Cayley $U$. Então $A$ é auto-adjunto se e somente se $U$ é unitário.*

**Demonstração:** Pelo critério básico de auto-adjunção, teorema 6.14, $A$ é auto-adjunto se e somente se $\mathrm{Ran}(A \pm i\mathbb{1}) = \mathscr{H}$, o que ocorre se e somente se $U$ é uma isometria e $\mathcal{D}(U) = \mathrm{Ran}(U) = \mathscr{H}$, pelo teorema 6.20, o que por sua vez ocorre se e somente se $U$ é unitário. □

A resolução espectral de um operador auto-adjunto

Nesta seção, desejamos generalizar os resultados apresentados na seção 5.3 e analisar em que condições é possível definir um operador linear como a integral de Riemann-Stieltjes $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dE_t$ em relação a uma resolução de unidade $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ para uma função contínua $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Por último, mostraremos como é possível construir um operador auto-adjunto, não necessariamente limitado, a partir de uma resolução de unidade.

**Teorema 6.22** *Seja $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ uma resolução de unidade em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Seja ainda $\psi \in \mathscr{H}$ fixado. Então, dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O operador linear $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dE_t$ definido como $\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t)dE_t$ na topologia forte existe.*

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 d\langle\psi, E_t\psi\rangle < \infty$.

3. *A aplicação $l_\psi : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$l_\psi(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} d\langle\psi, E_t\varphi\rangle \,, \quad \forall\varphi \in \mathscr{H} \tag{6.8}$$

*define um funcional linear limitado em $\mathscr{H}$.*

**Demonstração:**
$1 \implies 3$: Seja $\varphi \in \mathscr{H}$. Então para todo $-\infty < a < b < \infty$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_a^b \overline{f(t)} d\langle\psi, E_t\varphi\rangle &= \left\langle \psi, \int_a^b \overline{f(t)} dE_t\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \int_a^b f(t)dE_t\psi, \varphi \right\rangle ,\end{aligned}$$

de onde vem que

$$\begin{aligned} l_\psi(\varphi) &= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b \overline{f(t)} d\langle\psi, E_t\varphi\rangle \\ &= \left\langle \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t) dE_t\psi, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dE_t\psi, \varphi \right\rangle , \end{aligned}$$

que é um funcional linear limitado em $\mathscr{H}$ limitado por $\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dE_t\psi \right\|^2$.
3 $\implies$ 2: Dados $u, v \in \mathbb{R}$ tais que $u < v$, seja

$$\varphi_{u,v} = \int_u^v f(t) dE_t\psi , \quad \psi \in \mathscr{H} .$$

Então

$$\|\varphi_{u,v}\|^2 = \int_u^v |f(t)|^2 d\langle\psi, E_t\psi\rangle ,$$

e

$$|l_\psi(\varphi_{u,v})| \leq \|l_\psi\| \, \|\varphi_{u,v}\| .$$

Assim,

$$\begin{aligned} l_\psi(\varphi_{u,v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} d\langle\psi, E_t\varphi_{u,v}\rangle &= \int_u^v \overline{f(t)} d\langle\psi, E_t\varphi_{u,v}\rangle \\ &= \left\langle \psi, \int_u^v \overline{f(t)} dE_t\varphi_{u,v} \right\rangle \\ &= \left\langle \int_u^v f(t) dE_t\psi, \varphi_{u,v} \right\rangle \\ &= \langle\varphi_{u,v}, \varphi_{u,v}\rangle \\ &= \|\varphi_{u,v}\|^2 , \end{aligned}$$

e portanto, para todo $u < v$,

$$\int_u^v |f(t)|^2 d\langle\psi, E_t\psi\rangle = \|\varphi_{u,v}\|^2 \leq \|l_\psi\|^2 ,$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 d\langle\psi, E_t\psi\rangle < \infty .$$

$2 \implies 3$: Para $-\infty < u' < u < v < v' < +\infty$ tem-se

$$\begin{aligned}\left\| \int_{u'}^{v'} f(t) dE_t \psi - \int_u^v f(t) dE_t \psi \right\|^2 &= \left\| \int_{u'}^{u} f(t) dE_t \psi + \int_v^{v'} f(t) dE_t \psi \right\|^2 \\ &= \left\| \int_{u'}^{u} f(t) dE_t \psi \right\|^2 + \left\| \int_v^{v'} f(t) dE_t \psi \right\|^2 \\ &= \int_{u'}^{u} |f(t)|^2 d\langle \psi, E_t \psi \rangle + \int_v^{v'} |f(t)|^2 d\langle \psi, E_t \psi \rangle ,\end{aligned}$$

que tende a 0 quando $u, v' \to \infty$ e $u', v \to -\infty$, de modo que o limite em 1 existe. □

**Teorema 6.23** *Seja $(E_t)_{t \in \mathbb{R}}$ uma resolução de unidade em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então, dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o operador linear definido por*

$$A\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dE_t \psi \tag{6.9}$$

*com domínio*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \psi \in \mathscr{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 d\langle \psi, E_t \psi \rangle < \infty \right\} \tag{6.10}$$

*é um operador auto-adjunto.*

**Demonstração:** Inicialmente notamos que para todo $\varphi \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$, o subconjunto

$$\mathcal{S} = \{ E((a,b])\varphi \mid -\infty < a < b < \infty, a, b \in \mathbb{R} \}$$

é denso em $\mathscr{H}$ pois $\psi = \lim_{n \to \infty} E((-n,n])\psi$, para todo $\psi \in \mathscr{H}$. Ainda, $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(A)$, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 d\langle \varphi, E_t E((a,b])\varphi \rangle = \int_a^b |f(t)|^2 d\langle \varphi, E_t \varphi \rangle ,$$

de modo que $E((a,b])\varphi \in \mathcal{D}(A)$, e portanto $A$ definido por 6.9 é densamente definido.

Sejam $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(A)$. Então como $f$ é uma função a valores reais,

$$\langle \psi, A\varphi \rangle = \left\langle \psi, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dE_t \varphi \right\rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dE_t \psi, \varphi \right\rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle ,$$

e portanto $A$ é simétrico. Logo, para mostrar que $A$ é auto-adjunto, basta mostrar que $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$. Para tal, seja $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$. Então existe $\varphi^* \in \mathscr{H}$ tal que

$\varphi^* = A^*\varphi$ e, para todo $\xi \in \mathscr{H}$,

$$\langle E((a,b])\varphi^*, \xi\rangle = \langle \varphi^*, E((a,b])\xi\rangle = \langle A^*\varphi, E((a,b])\xi\rangle = \langle \varphi, AE((a,b])\xi\rangle \, .$$

Como $E((a,b])\xi \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\langle \varphi, AE((a,b])\xi\rangle = \int_a^b f(t) d\langle \varphi, E_t\xi\rangle \, ,$$

de modo que a aplicação $\xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)d\langle\varphi, E_t\xi\rangle$ definida por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)d\langle\varphi, E_t\xi\rangle = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \langle E((a,b])\varphi^*, \xi\rangle$$

é um funcional linear limitado, e portanto, pelo teorema 6.22,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 d\langle\varphi, E_t\varphi\rangle < \infty \, ,$$

ou seja, $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, o que mostra que $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$, de onde decorre que $A$ é auto-adjunto, pois é simétrico. □

No caso particular em que $f(t) = t$, temos que

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t \tag{6.11}$$

é um operador auto-adjunto com domínio

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \psi \in \mathscr{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 d\langle\psi, E_t\psi\rangle < \infty \right\} \, .$$

A representação (6.11) é denominada **representação espectral** (ou **resolução espectral**) do operador $A$.

A situação descrita é, na verdade, a situação mais geral possível. Este é o conteúdo da seguinte versão do teorema espectral para operadores auto-adjuntos ilimitados, que pode finalmente ser enunciado:

**Teorema 6.24 (teorema espectral para operadores auto-adjuntos)** *Seja $A$ um operador auto-adjunto fechado densamente definido em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então existe uma resolução de unidade $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ tal que o domínio de $A$ é*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \psi \in \mathscr{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 d\langle\psi, E_t\psi\rangle < \infty \right\} \tag{6.12}$$

*e $A$ possui representação espectral*

$$A\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_t \psi \tag{6.13}$$

*para todo $\psi \in \mathscr{H}$.*

**Demonstração:** Como $A$ é auto-adjunto, então sua transformada de Cayley $U$ é um operador unitário com $\mathcal{D}(U) = \text{Ran}(A + i\mathbb{1}) = \mathscr{H}$ e $A = i(\mathbb{1} + U)(\mathbb{1} - U)^{-1}$. Assim, se $\varphi \in \mathcal{D}(A) = \text{Ran}(\mathbb{1} - U)$, então existe um $\psi \in \mathscr{H}$ tal que

$$\varphi = \frac{1}{2i}(\mathbb{1} - U)\psi \,,$$

Assim,

$$A\varphi = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + U)\psi$$

e

$$\|A\varphi\|^2 = \langle A\varphi, A\varphi\rangle = \langle \frac{1}{2}(\mathbb{1} + U)\psi, \frac{1}{2}(\mathbb{1} + U)\psi\rangle = \left\langle \psi, \frac{1}{4}(\mathbb{1} + U^{-1})(\mathbb{1} + U)\psi \right\rangle$$
$$= \left\langle \psi, \frac{1}{4}(2\mathbb{1} + U + U^{-1})\psi \right\rangle .$$

Por outro lado, pelo teorema espectral para operadores unitários, teorema 5.12, existe uma resolução de unidade $(F_s)_{s\in[0,2\pi]}$ tal que, para toda $f \in C([0, 2\pi])$,

$$f(U)\psi = \int_0^{2\pi} f(e^{is}) dF_s \psi \,, \quad \forall \psi \in \mathscr{H} \,, \tag{6.14}$$

de modo que

$$\|A\varphi\|^2 = \left\langle \psi, \frac{1}{4}(2\mathbb{1} + U + U^{-1})\psi \right\rangle = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (2 + e^{is} + e^{-is}) d\langle \psi, F_s\psi\rangle$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{s}{2}\right) d\langle \psi, F_s\psi\rangle \,. \tag{6.15}$$

Da mesma forma, usando o fato que $\mathbb{1} - U$ e $F_s$ comutam e que $F_s F_{s'} = F_{\min\{s,s'\}}$, temos que

$$\begin{aligned}\langle\varphi, F_s\varphi\rangle = \left\langle\frac{1}{2i}(\mathbb{1}-U)\psi, \frac{1}{2i}F_s(\mathbb{1}-U)\psi\right\rangle &= \frac{1}{4}\left\langle\psi, (\mathbb{1}-U^{-1})(\mathbb{1}-U)F_s\psi\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\left\langle\psi, (2\mathbb{1}-U-U^{-1})F_s\psi\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(2-e^{iu}-e^{-iu})d\langle\psi, F_u\psi\rangle \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{s}(2-e^{iu}-e^{-iu})d\langle\psi, F_u\psi\rangle \\ &= \int_0^s \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) d\langle\psi, F_u\psi\rangle\ . \qquad (6.16)\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\|A\varphi\|^2 = \int_0^{2\pi}\cos^2\left(\frac{s}{2}\right) d\langle\psi, F_s\psi\rangle = \int_0^{2\pi}\cot^2\left(\frac{s}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s}{2}\right) d\langle\psi, F_s\psi\rangle\ . \qquad (6.17)$$

De maneira similar, temos

$$\langle\xi, A\psi\rangle = -\int_0^{2\pi}\cot\left(\frac{s}{2}\right) d\langle\xi, F_s\psi\rangle \qquad (6.18)$$

para todo $\xi \in \mathscr{H}$ pois, notando que $\mathcal{D}(A) = \mathrm{Ran}(\mathbb{1}-U)$ é denso, por hipótese, então basta mostrar esta igualdade para este caso, que é mostrado de maneira análoga ao que foi mostrado acima na equação (6.17).

Tomando

$$t = -\cot\left(\frac{s}{2}\right)\ , \quad 0 \leq s \leq 2\pi\ ,$$

e $E_t = F_s$, então $-\infty < t < \infty$ e $E_t$ é uma resolução de unidade tal que, se $\psi \in \mathcal{D}(A)$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 d\langle\psi, E_t\psi\rangle < \infty \qquad (6.19)$$

e por (6.18),

$$A\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t\psi\ . \qquad (6.20)$$

Para concluir a demonstração, devemos mostrar que se $\varphi \in \mathscr{H}$ satisfaz à desigualdade (6.19), então $\varphi \in \mathcal{D}(A)$. Para tal, notamos que como $\mathcal{D}(U) = \mathrm{Ran}(A + i\mathbb{1})$, então existe $\psi \in \mathscr{H}$ tal que

$$\begin{aligned}\psi = (A + i\mathbb{1})\varphi &= -\int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{s}{2}\right) dF_s\varphi + \int_0^{2\pi} dF_s\varphi \\ &= -\int_0^{2\pi} e^{-i\frac{s}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} dF_s\varphi \,.\end{aligned} \tag{6.21}$$

Assim, para todo $\xi \in \mathscr{H}$,

$$\langle \xi, \psi \rangle = -\int_0^{2\pi} e^{-i\frac{s}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} d\langle \xi, F_s\varphi \rangle \,,$$

e portanto, tomando

$$\xi = -\frac{1}{2i}(\mathbb{1} - U^{-1})\eta \,,$$

temos

$$\begin{aligned}\left\langle \eta, \frac{1}{2i}(\mathbb{1} - U)\psi \right\rangle = \langle \xi, \psi \rangle &= -\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} e^{-i\frac{s}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} d\langle (\mathbb{1} - U^{-1})\eta, F_s\varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} e^{-i\frac{s}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} (1 - e^{is}) d\langle \eta, F_s\varphi \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} d\langle \eta, F_s\varphi \rangle \\ &= \langle \eta, \varphi \rangle \,.\end{aligned}$$

Como $\eta \in \mathscr{H}$ é arbitrário, então $\varphi = \frac{1}{2i}(\mathbb{1} - U)\psi$, ou seja, $\varphi \in \text{Ran}(\mathbb{I} - U) = \mathcal{D}(A)$, o que conclui a demonstração de que $\mathcal{D}(A)$ é dado por 6.12. $\square$

É possível mostrar que a representação espectral 6.13 é única no sentido de que a resolução de unidade $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ fica unicamente definida a partir de $(F_s)_{s\in[0,2\pi]}$ pela escolha $t = -\cot\left(\frac{s}{2}\right)$. Tal unicidade permite estender o teorema anterior e construir operadores $f(A)$ para funções contínuas $f \in C(\mathbb{R})$. Este resultado por sua vez é usado para mostrar diversas aplicações do teorema espectral, como por exemplo o teorema de Stone. Para mais detalhes nestes resultados ver [4] e [7].

# A Teorema de Féjer

Neste apêndice apresentaremos a demonstração do teorema de Fejér que será usado para a prova da unicidade da solução do problema dos momentos trigonométricos. Nossa abordagem, baseada em [3], fará uso das chamadas *sequências delta*, cujas propriedades básicas são apresentadas abaixo.

**Definição A.1** *Uma sequência de funções $\delta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas por partes é chamada uma **sequência delta** se satisfaz:*

1. $\delta_n(x) \geq 0 \, , \forall x \in \mathbb{R} \, , \forall n \in \mathbb{N}$ ;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)dx = 1 \, , \forall n \in \mathbb{N}$ ;
3. *Dados $\epsilon > 0$ e $\eta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \implies \int_{|x| \geq \eta} \delta_n(x)dx < \epsilon \, .$$

**Teorema A.2** *Seja $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência delta e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua por partes e limitada. Definindo*

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x-s) f(s) ds \, , \, x \in \mathbb{R} \, ,$$

*então, se $\delta_n$ é par para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se:*

1. $$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2} \, , \, \forall x \in \mathbb{R} \, ;$$
2. *$f_n \to f$ uniformemente em todo intervalo fechado $I$ que não contém pontos de descontinuidade de $f$.*

É importante notar que, pelo Teorema anterior, se $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência delta de funções pares e se $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada, então

$$\psi(0) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(s)\psi(s)ds \, .$$

O **núcleo de Dirichlet** é definido como

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \, . \tag{A.1}$$

Algumas propriedades importantes do núcleo de Dirichlet são listadas na proposição a seguir:

**Proposição A.3**

1. *A função $D_n(x)$ é contínua, par e periódica, com período $2\pi$;*
2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$
3. $D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$.

O núcleo de Dirichlet é usado para obter a $n$-ésima soma parcial da série de Fourier de uma função de período $2\pi$. De fato, a convolução de $D_n$ com tal $f$ é definida por

$$(D_n * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x-y)dy = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} \, , \tag{A.2}$$

onde

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

é o $k$-ésimo coeficiente de Fourier de $f$.

Definimos então o **núcleo de Fejér** como

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} D_k(x) \, . \tag{A.3}$$

É imediato verificar que o núcleo de Fejér pode ser escrito como

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx} \, , \tag{A.4}$$

que é a forma desejada para a solução do problema do momento trigonométrico. Ainda mais temos o seguinte

**Lema A.4** *As funções $F_n$ definidas em (A.3) são contínuas, pares e periódicas com período $2\pi$. Além disso,*

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 , \tag{A.5}$$

*para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Seja $s_n(x) = (D_n * f)(x)$ a $n$-ésima soma parcial da série de Fourier de uma função $f$ com período $2\pi$. Definindo

$$c_n(x) = \frac{1}{n}(s_1(x) + \cdots + s_n(x)) ,$$

então, usando (A.2) e (A.4), obtemos

$$c_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-y)f(y)dy = (F_n * f)(x) . \tag{A.6}$$

**Teorema A.5 (teorema de Fejér)** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes e periódica com período $2\pi$, então a sequência de funções $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por (A.6) converge uniformemente para $f$ em todo intervalo fechado $I$ que não contém pontos de descontinuidade de $f$.*

**Demonstração:** Se

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} F_n(x) , & \text{se} \quad -\pi \leq x \leq \pi , \\ 0 , & \text{se} \quad |x| > \pi , \end{cases} \tag{A.7}$$

então

$$c_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(y)f(y-x)dy .$$

Vamos mostrar que $(\Phi)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz às propriedades (1), (2) e (3) de uma sequência delta e aplicar o teorema A.2 a esta sequência. A propriedade (1) é imediata pela definição de $\Phi_n(x)$. Para mostrar (2), notamos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)dx \\ \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x)dx = 1 \end{aligned} \tag{A.8}$$

para todo $n$, usando as propriedades do núcleo de Dirichlet. Ainda, dados $\epsilon > 0$ e

$\delta > 0$, temos, por paridade do núcleo de Fejér, que

$$\int_{|x|>\delta} \Phi_n(x)dx = 2\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx \leq \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)} \cdot (\pi - \delta)\,,$$

onde usamos que

$$\left[\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2 \leq \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2}$$

para todo $\delta \leq x \leq \pi$. Assim,

$$\int_{|x|>\delta} \Phi_n(x)dx \leq \frac{\pi - \delta}{n\pi\left(\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2}\,,$$

e portanto $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz à condição (3) de uma sequência delta, de modo que o resultado decorre aplicando o teorema A.2. $\square$

# B Polinômios de Bernstein

Neste apêndice apresentaremos a sequência de *polinômios de Bernstein* que são utilizados no trabalho para a demonstração do teorema de representação de Riesz. Ilustramos ainda uma aplicação imediata destes polinômios na demonstração do Teorema de Weierstrass clássico que é usado no trabalho para mostrar a separabilidade do espaço $C([a,b])$ das funções contínuas em um intervalo.

Dada $f \in C([0,1])$, define-se a sequência de **polinômios de Bernstein** $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ de $f$ por

$$(B_n(f))(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,.$$

É imediato notar que $B_n(f)(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual que $n$ para cada $x \in [0,1]$, $(B_n(f))(0) = 0$ e $(B_n(f))(1) = 1$, para toda $f \in C([0,1])$.

**Teorema B.1** *Para cada $f \in C([0,1])$ a sequência $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f$ quando $n \to \infty$.*

Por conveniência, denotamos $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x^2$. A demonstração do teorema acima é então baseada no seguinte lema técnico:

**Lema B.2**

1. *$B_n(f_0) = f_0$ e $B_n(f_1) = f_1$.*
2. *$B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1$ e, em particular, $\|B_n(f_2) - f_2\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$.*
3. *$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n}$.*
4. *Dados $\delta > 0$ e $0 \leq x \leq 1$, seja $F$ o conjunto dos $k$ em $\{0,1,\ldots,n\}$ para os quais $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$. Então*

$$\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}\,.$$

**Demonstração:** Pela fórmula binomial, temos

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1\,,$$

de onde decorre que $B_n(f_0) = f_0$. Para $k \geq 1$, temos

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1},$$

de modo que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x,\end{aligned}$$

o que mostra que $B_n(f_1) = f_1$.

Para mostrar o item 2, notamos que

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} = \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x,$$

o que mostra o item 2, pois $\|B_n(f_2) - f_2\|_\infty = \frac{1}{n}\|f_1 - f_2\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$.

Para mostrar o item 3 aplicamos os itens 1 e 2 para obter

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{1}{n} x(1-x) \\ &\leq \frac{1}{4n},\end{aligned}$$

pois $0 \leq x \leq 1$.

Finalmente, para mostrar o item 4, tomando $0 \leq x \leq 1$ e $\delta > 0$ tal que $1 \leq \frac{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}{\delta^2}$

para $k \in F$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &\le \frac{1}{\delta^2}\sum_{k\in F}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\le \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x^k)\\ &\le \frac{1}{4n\delta^2},\end{aligned}$$

pelo item 3. □

**Demonstração:** (teorema B.1) Sejam dados $f \in C([0,1])$ e $\epsilon > 0$. Como $f$ é uniformemente contínua no compacto $[0,1]$, então existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $|x-y| < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\right| &\le \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|\\ &\le \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\end{aligned}$$

para $0 \le x \le 1$.

Fixado $n$, seja $F$ o conjunto dos $k$ em $\{0,1,\ldots,n\}$ para os quais, dado $0 \le x \le 1$, tem-se $\left|\frac{k}{n}-x\right| \ge \delta$. Então $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}$ para $k \notin F$ e $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le 2\|f\|_\infty$ para $k \in F$. Desta forma,

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(f)(x)| &\le \frac{\epsilon}{2}\sum_{k\notin F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + 2\|f\|_\infty\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &< \frac{\epsilon}{2} + 2\|f\|_\infty\cdot\frac{1}{4n\delta^2},\end{aligned}$$

para $n > \frac{\|f\|_\infty}{\epsilon\delta^2}$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ como acima, podemos tomar $\mathbb{N} \ni N \ge \frac{\|f\|_\infty}{\epsilon\delta^2}$ de modo que $\|B_n(f)-f\|_\infty < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \ge N$, o que mostra o resultado desejado. □

Como consequência imediata deste teorema, temos:

**Teorema B.3 (teorema de Weierstrass)** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe uma sequência de funções polinomiais $P_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f-P_n\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)| \to 0$$

*quando $n \to \infty$.*

**Observação:** Durante toda esta seção nos referimos a uma *função polinomial* em $[a, b]$ como uma função $P : [a, b] \to \mathbb{R}$ da forma

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$, onde os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais.

**Demonstração:** Pelo teorema B.1, se $f \in C([0, 1])$, então a sequência $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ dos polinômios de Bernstein converge uniformemente para $f$.

Para concluir a demonstração, observamos que a aplicação $\tau : C([a, b]) \to C([0, 1])$ definida por $\tau(x) = \frac{(x-a)}{(b-a)}$, para todo $a \leq x \leq b$, é uma isometria linear de $C([a, b])$ em $C([0, 1]$ que preserva polinômios pois, se $P(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ é uma função polinomial em $t \in [a, b]$, então $P(\tau(x)) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left[\frac{(x-a)}{(b-a)}\right]^j$ é uma função polinomial em $x \in [0, 1]$, de modo que tal aproximação se estende naturalmente para o caso geral $C([a, b])$. □

**Corolário B.4** *O espaço de Banach $C([a, b])$ é separável.*

**Demonstração:** Seja $\mathcal{P}[a, b]$ o conjunto das funções polinomiais (com coeficientes reais) em $[a, b]$. O teorema de Weierstrass mostrou que tal conjunto é denso em $[a, b]$, pois, dados $f \in C([a, b])$ e $\epsilon > 0$, é possível obter uma função $P \in \mathcal{P}$ tal que $\|f - P\|_\infty < \epsilon$. Seja agora $\mathcal{P}_\mathbb{Q}[a, b]$ o conjunto das funções polinomiais em $[a, b]$ com coeficientes *racionais*. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mathbb{Q}[a, b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup 0} \{ P_n \in \mathcal{P} \mid\ & P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \ , \\ & x \in [a, b] \ , \ a_n \neq 0 \ , \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} \} \ . \end{aligned} \tag{B.1}$$

Tal conjunto é enumerável pois é a união enumerável de conjuntos enumeráveis e denso em $C([a, b])$. □

Podemos encarar esta como uma demonstração probabilística do teorema de Weierstrass, no seguinte sentido: se considerarmos um experimento aleatório com probabilidade de sucesso $x$ e probabilidade de fracasso $1 - x$ para $x \in [0, 1]$, então a probabilidade de se obter exatamente $k$ sucessos após $n$ repetições é dada por $\binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$, e se $f \in C([0, 1])$ denota o lucro obtido a cada sucesso, então o valor esperado de ganho é $B_n(f)(x)$. Para $n$ suficientemente grande, o teorema B.1 nos garante que o valor esperado de ganho é aproximadamente $f$. Tal demonstração do teorema de Weierstrass clássico foi apresentada inicialmente por S. Bernstein (para mais detalhes históricos e demonstrações alternativas deste teorema, ver [2]).

# Referências Bibliográficas

[1] AKHIEZER, N. I., GLAZMAN, I. M., *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Dover Publications Inc., 1961-1963.

[2] CAROTHERS, N. L., *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000.

[3] FIGUEIREDO, D. G., *Análise De Fourier e Equações Diferenciais Parciais* , IMPA, 4º edição, 2003.

[4] REED, M., SIMON, B., *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I - Functional Analysis*, Academic Press - Elsevier, 1970.

[5] RUDIN, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 2º edição, 1991.

[6] RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[7] YOSIDA, K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 6º edição, 1980.

# Índice Remissivo