

Autovalores do Laplaciano em Superfícies

Diego Sousa de Oliveira



Universidade Federal do ABC

Título: Autovalores do Laplaciano em Superfícies

Autor: Diego Sousa de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Coorientador: Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Welington Vieira Assunção
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Daniel Miranda Machado
Universidade Federal do ABC

Santo André, 17 de Agosto de 2017.

1	Introdução	7
2	Autoestrutura do triângulo equilátero	8
2.1	Autoestrutura do laplaciano no triângulo equilátero com condição de bordo de Dirichlet	8
2.2	Autoestrutura do laplaciano no triângulo equilátero com condição de bordo de Neumann	25
3	Autoestrutura dos Toros Planos	31
3.1	Espectro de uma Variedade Riemanniana	31
3.2	Espectro do Toro Plano	32
4	Relação entre os Espectros	43
4.1	Espectro do triângulo equilátero vs. espectro do toro plano	43
5	Considerações Finais	46
6	Apêndice	47
6.1	Variedades Riemannianas	47

Agradeço a todos os que me ajudaram na elaboração deste trabalho. Em especial, pelos auxílios, reuniões, sugestões e desenvolvimento do projeto, aos professores Sinuê Dayan Barbero Lodovic e Marcus Antônio Mendonça Marrocos. Agradeço também à equipe em geral da Universidade Federal do ABC, a qual possibilitou um curso de qualidade e bem estruturado, além de uma boa infra-estrutura e profissionais dispostos a atender os estudantes da melhor forma. Por fim, os familiares, amigos e colegas das mais diversas turmas, por incentivarem, compartilharem momentos, auxiliarem e estarem sempre presentes.

Este projeto aborda a autoestrutura do operador de Laplace no triângulo equilátero, sob as condições de fronteira de Dirichlet e de Neumann, e nos toros planos vistos como superfícies riemannianas. Além disso, analisa-se os espectros e propriedades destes dois objetos geométricos.

Palavras Chaves: laplaciano, triângulo equilátero, toro plano, superfície riemanniana

This project covers the eigenstructure of Laplace's operator in the equilateral triangle, under Neumann and Dirichlet boundary conditions, and in the flat torus seen as Riemannian Surface. Also it's analysed the spectra and properties of these geometric objects.

Keywords: Laplace's operator, equilateral triangle, flat torus, Riemannian Surface

Esta pesquisa pretende mostrar os métodos de resolução da equação diferencial parcial que associa os autovalores e autofunções do operador laplaciano em superfícies como o triângulo equilátero, que é um subespaço conhecido do espaço euclidiano bidimensional, e os toros planos que são superfícies não triviais obtidas por ações de grupos livres, descontínuas e isométricas, necessitando o uso de conceitos mais gerais presentes na geometria riemanniana. Tal estudo tem relevância em diversas aplicações como modelos físicos que consideram taxas de variação através de equações diferenciais, caso da equação do calor, por exemplo. Além disso, os métodos de resolução de equações parciais são amplos e complexos, daí qualquer técnica desenvolvida pode ser o ponto de partida para resolução de outros problemas e obtenção de outras aplicações.

A primeira parte do trabalho é dedicada à equação de autovalores do laplaciano ($\Delta u(x, y) = ku(x, y)$) sobre o triângulo equilátero a fim de obter um sistema-base de autofunções, ortogonal e completo, para dois problemas distintos, variando as restrições sobre a fronteira. O primeiro considera a condição de bordo de Dirichlet que basicamente impõe que a solução se anule sobre os lados do triângulo. O segundo impondo a condição de bordo de Neumann, ou seja, a derivada na direção normal em cada ponto do bordo deve se anular. Nesse sentido, a primeira parte do texto está subdividida em duas, uma para cada tipo de problema.

A segunda parte é com relação aos toros planos e estará relacionada ao apêndice, o qual tem a finalidade de introduzir conceitos e noções de estruturas diferenciáveis em variedades riemannianas e ações de grupos. A partir daí, serão determinados os autovalores e autofunções do operador laplaciano sobre os toros planos construídos. Haverá ainda uma aplicação mostrando como o conhecimento do espectro dos toros planos bidimensionais podem fornecer informações gerais sobre os mesmos.

Por fim, a terceira parte estabelece uma breve relação entre um toro plano bidimensional e o triângulo equilátero, associando os autovalores e os resultados obtidos nas partes anteriores. Esta última é uma contribuição nova, bem como o detalhamento de alguns resultados e demonstrações das partes anteriores do trabalho.

2 AUTOESTRUTURA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

2.1 Autoestrutura do laplaciano no triângulo equilátero com condição de bordo de Dirichlet

O estudo do operador laplaciano Δ tem diversas aplicações no mundo da física como por exemplo associá-lo à difusão do calor sobre determinadas superfícies. Além disso, ele permite identificar informações sobre determinados objetos, como propriedades de taxas variacionais ou mesmo determinar completamente uma superfície só conhecendo dados que o operador em si fornece. A seguir serão tratados conceitos a cerca do operador Δ sobre o triângulo equilátero.

Por *espectro do triângulo equilátero* entenderá-se a caracterização dos autovalores do operador laplaciano aplicado sobre o espaço de funções com imagem no corpo dos reais (eventualmente no corpo dos complexos) e o domínio sendo a região aberta delimitada pelos lados de tal triângulo equilátero considerado. Além disso, a estas funções pode-se exigir que elas estejam definidas no bordo do triângulo equilátero sob determinadas condições.

Quando exigir-se que as funções se anulem na fronteira, tal restrição será chamada de *condição de bordo de Dirichlet* e este será o caso considerado nesta primeira parte.

O caso posterior que será considerado é a restrição conhecida como *condição de bordo de Neumann* que consiste impor que a derivada na direção normal em cada ponto da fronteira se anule.

Seja D a região aberta de um triângulo equilátero contida no plano. Denote ainda por ∂D a fronteira de D e por \bar{D} seu fecho. Sinteticamente, o primeiro caso (autovalores do laplaciano com condição de bordo de Dirichlet) consiste no seguinte problema:

Problema 1: obter valores reais k^2 e funções $T : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$(a) \Delta T(x, y) + k^2 T(x, y) = 0, \forall (x, y) \in D, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (b) T|_{\partial D} = 0 \quad (2.1)$$

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Os números k^2 são justamente os valores que caracterizam o espectro de autovalores, enquanto que as funções T obtidas são denominadas de *autofunções*. O item (b) é justamente a condição de bordo de Dirichlet.

Note que o problema acima é, ao mesmo tempo, obter uma caracterização de autovalores e autovetores (os quais estão em um espaço de funções), quanto obter a solução de uma equação diferencial parcial de segunda ordem com condição inicial determinada.

Um processo comum de resolução de equação diferencial parcial é o método de separação de variáveis que consiste em supor que as soluções T são da forma separável $T(x, y) = f(x)g(y)$. Contudo, nem sempre essa suposição funcionará ou ainda pode ocorrer que ela funcione apenas sobre um outro sistema de coordenadas distinto do cartesiano usual. A estratégia de resolução será justamente essa. Construir-se um referencial dito como "*coordenadas triangulares*" para então aplicar a separação de variáveis. Além disso, as autofunções terão suas partes simétrica e antissimétrica, em relação a certo eixo de simetria, analisadas de forma desmembrada.

Também é desejado ao final do problema obter um sistema ortogonal e completo, ou seja, um conjunto de autofunções tal que qualquer solução arbitrária possa ser expressa como combinação linear destas, permitindo uma forma mais elaborada de caracterizar, identificar e analisar as autofunções dentro do espaço de soluções.

Coordenadas Triangulares

Considere D o triângulo equilátero de vértices $\left\{ (0, 0), (h, 0), \left(\frac{h}{2}, \frac{\sqrt{3}h}{2} \right) \right\}$ expressos em coordenadas cartesianas usuais e com $h > 0$ (triângulo equilátero de lado h e raio interno $r = \frac{h}{2\sqrt{3}}$, onde o raio interno é o raio da circunferência interna que tangencia os lados do triângulo nos pontos médios).

Defina por *alturas* os três segmentos do triângulo equilátero formados da seguinte forma: a cada lado escolhido, toma-se o ponto médio deste lado e conecta-o ao vértice oposto do triângulo equilátero. Por exemplo, uma dessas alturas obtidas é o segmento que conecta o ponto $\left(\frac{h}{2}, 0 \right)$ ao vértice $\left(\frac{h}{2}, \frac{\sqrt{3}h}{2} \right)$.

As "*coordenadas triangulares*" que serão introduzidas sobre a região fechada do triângulo equilátero \overline{D} basicamente consideram como origem o centro de D , sendo as coordenadas (u, v, w) de um ponto P as distâncias das projeções ortogonais de P sobre cada altura. O uso das aspas é porque não se trata de um sistema de coordenadas a rigor, mas apenas uma forma de identificação dos pontos, usada para construir uma mudança de variáveis posteriormente.

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Ou seja, a partir de cada altura, traça-se a reta ortogonal que passa por P e é medida a distância do ponto de intersecção até a origem (centro). Enxerga-se u, v e w como eixos, sendo que a coordenada associada terá valor positivo se estiver no segmento da altura correspondente, entre a origem e o ponto de intersecção com o lado em que esta altura se intersecta no ponto médio. O sentido oposto em relação à origem indica decréscimo ou aumento no sentido dos valores negativos.

A ilustração destas construções segue conforme Figura (2.1) a seguir.

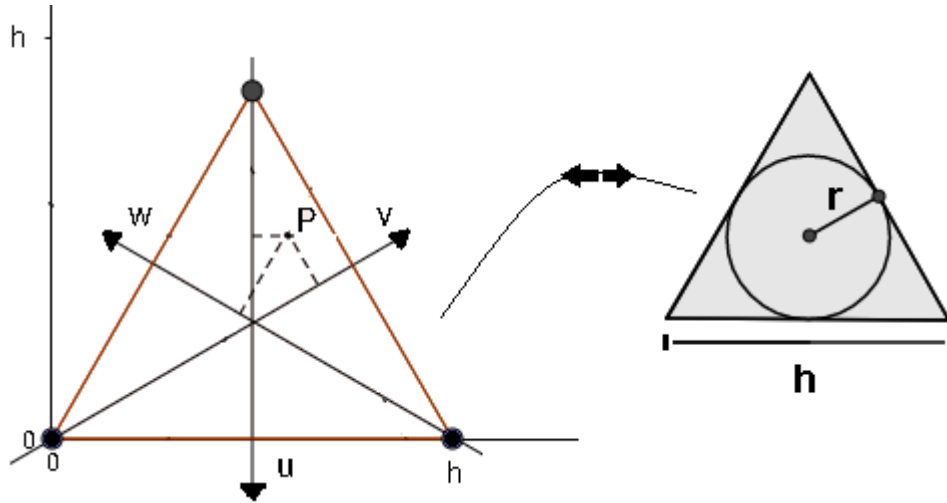


Figura 2.1: Representação de um ponto nos eixos referentes às coordenadas triangulares, bem como identificação do tamanho dos lados e do raio interno do triângulo equilátero

Note que, no exemplo da figura, o ponto P tem coordenadas positivas nos eixos v e w , enquanto que assume valor negativo no eixo u . Além disso, a altura associada ao eixo u é formada pelos pontos do triângulo onde $v = w$.

Tem-se então três coordenadas (u, v, w) identificadas para cada ponto do triângulo equilátero, ao invés da representação usual (x, y) em coordenadas cartesianas. As seguintes equações relacionam os dois sistemas de coordenadas:

$$u = r - y; \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{2} (y - r); \quad w = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{h}{2} - x \right) + \frac{1}{2} (y - r) \quad (2.2)$$

Verifica-se $u + v + w = 0$ e que os lados do triângulo são representados em $u = r, v = r$ e $w = r$. Além disso, pelas dimensões do triângulo, os valores de u, v e w variam no intervalo $[-2r, r]$, sendo que $u = -2r$ (ou seja, $v = w = r$), $v = -2r$ (ou seja, $u = w = r$) e $w = -2r$ (ou seja, $u = v = r$) determinam a posição dos três vértices.

Tais relações podem ser verificadas por propriedades geométricas simples do plano junto às relações obtidas em (2.2).

Decomposição Simétrica e Antissimétrica

Uma função $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é decomposta da seguinte forma:

$$f(u, v, w) = \frac{f(u, v, w) + f(u, w, v)}{2} + \frac{f(u, v, w) - f(u, w, v)}{2} \quad (2.3)$$

Cada parcela é definida por:

$$f_s(u, v, w) = \frac{f(u, v, w) + f(u, w, v)}{2}; \quad f_a(u, v, w) = \frac{f(u, v, w) - f(u, w, v)}{2}, \quad (2.4)$$

As funções f_s e f_a serão chamadas de partes simétrica e antissimétrica de f , respectivamente. Logo $f = f_s + f_a$. Pode-se enxergá-las como partes simétrica e antissimétrica em relação ao segmento $v = w$ (eixo u) do triângulo.

Propriedades imediatas: (i) $f_s(u, v, w) = f_s(u, w, v)$; (ii) $f_a(u, v, w) = -f_a(u, w, v)$.

Proposição 2.1 f é nula sobre o bordo do triângulo equilátero se, e somente se, f_s e f_a também são nulas sobre tal bordo.

Demonstração: A volta é imediata, daí basta mostrar a ida.

Em coordenadas triangulares (u, v, w) , o bordo formado pelos lados do triângulo equilátero é dado por $u = r$, $v = r$ e $w = r$ (cada um correspondendo a um lado). Logo, por hipótese, tem-se: (a) $f(r, v, w) = 0$, para v e w arbitrários; (b) $f(u, r, w) = 0$, para u e w arbitrários; e (c) $f(u, v, r) = 0$, para u e v arbitrários.

Caso (a):

Seja (r, v, w) um ponto arbitrário do lado $u = r$. Como $f = f_s + f_a$ e $f(r, v, w) = 0$, tem-se $f_s(r, v, w) = -f_a(r, v, w) = f_a(r, w, v)$. Por outro lado, (r, w, v) também é ponto do lado $u = r$, daí $f(r, w, v) = 0$. Logo $f_s(r, v, w) = f_s(r, w, v) = -f_a(r, w, v)$. Juntando as igualdades, conclui-se $f_s(r, v, w) = 0$ e, a partir deste, que $f_a(r, v, w) = 0$.

Caso (b):

Seja (u, r, w) um ponto arbitrário do lado $v = r$. Então $f(u, r, w) = 0$, daí $f_s(u, r, w) = -f_a(u, r, w) = f_a(u, w, r)$. Por outro lado $f(u, w, r) = 0$ e $-f_a(u, w, r) = f_s(u, w, r) = f_s(u, r, w)$. Juntando as igualdades, tem-se $f_s(u, r, w) = 0$ e daí $f_a(u, r, w) = 0$.

O caso (c) é análogo ao caso (b). □

Seja (ξ, η) o sistema de coordenadas dado por $\xi = u$ e $\eta = v - w$, onde (u, v, w) são

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

coordenadas triangulares. Nota-se que este referencial é ortogonal e define uma mudança de variável em \bar{D} .

Então, aplicando tal mudança de variáveis, a equação de autovalores do laplaciano no sistema cartesiano dada por $\Delta T(x, y) + k^2 T(x, y) = 0$ em D fica:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} T + 3 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} T + k^2 T = 0 \quad (2.5)$$

Para uma função T definida em \bar{D} , utilizará-se a notação $T(x, y)$ para indicar que T está expressa no sistema cartesiano, $T(u, v, w)$ para T expressa no sistema de coordenadas triangulares e, por fim, $T(\xi, \eta)$ para T expressa no sistema (ξ, η) acima.

Proposição 2.2 *No sistema (ξ, η) , T satisfaz a equação (2.5) se, e somente se, T_s e T_a também a satisfazem.*

Demonstração: Como $T = T_s + T_a$ e a equação acima é linear então a volta é imediata. Para a ida, note que se (u, v, w) é arbitrário em D e associado a (ξ, η) , então (u, w, v) pertence a D e está associado a $(\xi, -\eta)$, pois $\eta = v - w$, ou seja, $-\eta = w - v$ e $\xi = u$.

Defina em D a função \tilde{T} por $\tilde{T}(u, v, w) = T(u, w, v)$. Daí, em termos de ξ e η , a definição equivale a $\tilde{T}(\xi, \eta) = T(\xi, -\eta)$. Usando a regra da cadeia chega-se a:

$$(i) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{T}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} T(\xi, -\eta); \quad (ii) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tilde{T}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} T(\xi, -\eta) \quad (2.6)$$

Logo, pela hipótese tem-se (2.7) e pelas relações em (2.6) chega-se a (2.8), ambas a seguir:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} T(\xi, \eta) + 3 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} T(\xi, \eta) + k^2 T(\xi, \eta) = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{T}(\xi, \eta) + 3 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tilde{T}(\xi, \eta) + k^2 \tilde{T}(\xi, \eta) = 0 \quad (2.8)$$

Observe que, a partir de (2.6), a equação (2.8) é na verdade a equação (2.7) aplicada a $(\xi, -\eta)$ ao invés de (ξ, η) , sendo que (ξ, η) pertence a D se, e somente se, $(\xi, -\eta)$ pertence a D , devido a simetria do eixo u em coordenadas triangulares.

Além destas propriedades, tem-se em coordenadas triangulares:

$$\tilde{T}(u, v, w) = T(u, w, v) = T_s(u, w, v) + T_a(u, w, v) = T_s(u, v, w) - T_a(u, v, w). \quad (2.9)$$

Logo $\tilde{T} = T_s - T_a$. Substituindo então esta relação em (2.8), fazendo $T = T_s + T_a$ em

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

(2.7) e somando ambas equações, sobra apenas uma equação diferencial com termos de T_s . Daí conclui-se que T_s satisfaz (2.5). Para ver que T_a satisfaz (2.5) basta ver que $T_a = T - T_s$, aplicar em (2.7) e usar a linearidade e o que foi obtido há pouco, ou seja, que T_s satisfaz (2.5).

□

Note que as proposições (2.1) e (2.2) mostram que T é autofunção (solução) do Problema 1 (reescrito usando coordenadas triangulares) se, e somente se, T_s e T_a também forem autofunções (soluções). Isso permite analisar as aplicações da forma T_s e T_a , bem como os autovalores associados, separadamente.

Suponha então, inicialmente, que as soluções são separáveis, ou seja, da forma $T(\xi, \eta) = f(\xi)g(\eta)$ (em coordenadas triangulares $T(u, v, w) = f(u)g(v - w)$). Além disso, interessa-se achar soluções não identicamente nulas (pois a solução nula é trivial), daí supõe-se que T é não identicamente nula, logo f e g também não são identicamente nulas e existe pelo menos uma tripla $(u, v, w) \in D$ com $f(u) \neq 0 \neq g(v - w)$ (consequentemente pelo menos numa vizinhança T , f e g não se anulam, pois no mínimo as soluções tem que ter continuidade).

Aplicando $T(\xi, \eta) = f(\xi)g(\eta)$ à equação $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} T + 3 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} T + k^2 T = 0$, obtém-se sobre a região onde T não se anula:

$$-\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = \left(\frac{3g''(\eta) + k^2 g(\eta)}{g(\eta)} \right) = \alpha^2 \quad (2.10)$$

Onde α^2 é uma constante real, pois é uma igualdade em que um lado depende de ξ e outro de η .

A princípio $\pm \alpha$ pode ser complexo, uma vez que o sinal da constante não está determinado (se α^2 for negativa, por exemplo, então $\pm \alpha$ terá parte imaginária). Contudo não será necessário se preocupar com este fato, pois da equação anterior extraem-se duas equações diferenciais ordinárias, podendo obter suas soluções complexas e, a partir de algumas propriedades, concluirá-se que $\pm \alpha$ é de fato real. Daí, os elementos que num primeiro momento eram complexos, com possível parte imaginária não nula, são de fato reais.

As duas equações extraídas de (2.10) são, portanto:

$$(I) f'' + \alpha^2 f = 0; \quad (II) g'' + \beta^2 g = 0; \quad \beta^2 := \frac{k^2 - \alpha^2}{3} \quad (2.11)$$

A mesma observação anterior vale para a constante real β^2 definida acima. A princípio suas raízes da forma $\pm \beta$ poderiam ter parte imaginária, mas assim como

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

$\pm\alpha$, mais tarde será verificada que elas de fato não tem parte imaginária.

Antes de resolver (I), note que, a partir das relações de coordenadas triangulares e cartesianas em (2.2), existe uma relação biunívoca entre as variáveis $u = \xi$ e y , dada pela relação $y = y(\xi) = r - \xi$ ou $\xi = \xi(y) = r - y$.

Definindo $\tilde{f}(y) = f(\xi(y))$, pela regra da cadeia, tem-se:

$$\tilde{f}''(y) = \frac{d^2 \tilde{f}(y)}{dy^2} = \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} (-1)(-1) = f''(\xi) \quad (2.12)$$

Logo mudar a variável de $\xi = u$ para y em (I) leva à equação $\tilde{f}''(y) + \alpha^2 \tilde{f}(y) = 0$, cuja solução é da forma:

$$\tilde{f}(y) = A \cos(\alpha y) + B \sin(\alpha y) \quad (2.13)$$

Observe que a fim de \tilde{f} assumir valores reais, como ainda não é sabido se α tem parte imaginária, o *cos* e *sin* acima são as funções generalizadas em \mathbb{C} .

Defina:

$$(i) g_s(\eta) = \frac{g(\eta) + g(-\eta)}{2} \quad (ii) g_a(\eta) = \frac{g(\eta) - g(-\eta)}{2} \quad (2.14)$$

Com a definição acima, segue que $g = g_s + g_a$. Além disso, como $T = T_s + T_a$ obtém-se:

$$(a) T_s(\xi, \eta) = f(\xi)g_s(\eta); \quad (b) T_a(\xi, \eta) = f(\xi)g_a(\eta) \quad (2.15)$$

Conforme visto, T é solução do problema inicial se, e somente se, T_s e T_a também forem. Daí aplicando a separação de variáveis à T_s , a equação (I) em (2.11) se mantém bem como sua solução, enquanto que na equação (II) troca-se "g" por "g_s", usando (2.15)(a). Para T_a é análogo, a partir de (2.15)(b). Em síntese, também valem:

$$(II).(a) g_s'' + \beta^2 g_s = 0; \quad (II).(b) g_a'' + \beta^2 g_a = 0 \quad (2.16)$$

Daí serão obtidas as soluções do problema inicial sob a forma T_s e T_a separadamente, conforme desejado antes. Tais soluções serão ditas *autofunções simétricas* e *autofunções antissimétricas*, respectivamente.

O passo seguinte será lidar com as equações em (2.16), juntar com as informações anteriores e aplicar as condições de bordo do problema.

Construção das autofunções simétricas T_s

Tem-se até o momento $T_s(\xi, \eta) = f(\xi)g_s(\eta)$ e $f(u(y)) = \tilde{f}(y) = A\cos(\alpha y) + B\sin(\alpha y)$.

A solução da equação (II).(a) é:

$$g_s(\eta) = K_1\cos(\beta\eta) + K_2\sin(\beta\eta) \quad (2.17)$$

Pela equação (2.14)(i) tem-se $g_s(\eta) = g_s(-\eta)$. Com isto, levando então à igualdade $K_1\cos(\beta\eta) + K_2\sin(\beta\eta) = K_1\cos(\beta\eta) - K_2\sin(\beta\eta)$, visto que o cosseno é par e o seno é ímpar. Daí, $K_2\sin(\beta\eta) = 0$. Tem-se então:

$$g_s(\eta) = K_1\cos(\beta\eta) \quad (2.18)$$

Além disso, em coordenadas triangulares sobre o vértice $\xi = u = -2r$, tem-se $v = w = r$, o que implica $\eta = v - w = 0$. Assim, $g_s(0) = K_1$. Como o vértice pertence ao bordo, então $T_s(-2r, 0) = 0$, ou seja T_s se anula neste vértice, daí $f(-2r) = 0$ ou $g_s(0) = 0$. Como estão sendo buscadas autofunções não identicamente nulas, não pode ocorrer $g_s(0) = 0$, caso contrário, $K_1 = 0$ e daí g_s seria identicamente nula. Logo, $f(-2r) = 0$. Quando $u = -2r$, tem-se $y = r - u = 3r$ e $\tilde{f}(3r) = 0$. Daí segue a relação:

$$\tilde{f}(3r) = A\cos(3\alpha r) + B\sin(3\alpha r) = 0 \quad (2.19)$$

Também pela condição de bordo nulo, sabe-se que a autofunção simétrica T_s deve se anular no lado $u = r$, sendo que, em D , para $u = r$ há valores arbitrários de v e w , implicando que os valores de η variam continuamente, ou seja, sobre $\xi = u = r$ há pontos onde g_s não se anula, implicando que $f(r)$ deve se anular nestes pontos. Para $u = r$, tem-se $y = 0$ e daí $\tilde{f}(y) = \tilde{f}(0) = 0$ em tais pontos e isto leva a concluir que $A = 0$, a partir de (2.13). Daí, aplicando em (2.19), chega-se a:

$$B\sin(3\alpha r) = 0 \quad (2.20)$$

Como f não pode ser identicamente nula, então $B \neq 0$ e daí $3\alpha r = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Ou seja, $\alpha = \frac{\pi l}{3r}$, $l \in \mathbb{Z}$.

Juntando as informações, tem-se:

$$T_s(u, v, w) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} B_l \sin(\alpha(r - u)) \cos(\beta(v - w)); \quad \alpha = \frac{\pi l}{3r}; \quad \alpha^2 + 3\beta^2 = k^2 \quad (2.21)$$

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Como $B_l \text{sen}\left(\frac{\pi l}{3r}(u-r)\right) = C_l \text{sen}\left(\frac{\pi l}{3r}(u-r) + \pi l\right) = C_l \text{sen}\left(\frac{\pi l}{3r}(u+2r)\right)$, então (2.21) pode ser reescrito como:

$$T_s(u, v, w) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} C_l \text{sen}\left(\frac{\pi l}{3r}(u+2r)\right) \cos(\beta(v-w)); \quad \left(\frac{\pi l}{3r}\right)^2 + 3\beta^2 = k^2 \quad (2.22)$$

Basicamente, autofunções T_s variam com os coeficientes C_l os quais estão associados à forma da combinação linear.

Deseja-se obter um sistema-base ortogonal e completo de soluções. Daí, seria interessante perguntar-se se cada termo $T_{s,l,j}(u, v-w) := \text{sen}\left(\frac{\pi l}{3r}(u+2r)\right) \cos(\beta_j(v-w))$ poderia ser um elemento desse sistema ou, se não puder ser, pelo menos alguma combinação linear de elementos dessa forma. Até porque o subconjunto de inteiros M não é conhecido. Esse será justamente o próximo passo a ser analisado.

Para $v = r$, segue da relação $u + v + w = 0$ que $v - w = u + 2r$. Assim:

$$T_{s,l,j}(u, (u+2r)) = \text{sen}\left[\frac{\pi l}{3r}(u+2r)\right] \cos[\beta_j(u+2r)] \quad (2.23)$$

Defina:

$$t_{l,j}(u) := \text{sen}\left[\frac{\pi l}{3r}(u+2r)\right] \cos[\beta_j(u+2r)] \quad (2.24)$$

Suponha que uma autofunção A_s seja uma soma finita de termos da forma $T_{s,l,j}$ e, portanto, pela condição de bordo nulo para $v = r$ (e por simetria em relação ao eixo u , também para $w = r$) deve-se ter $\sum_j t_{l,j} \equiv 0$.

Será argumentado que não é suficiente que A_s seja expresso como uma ou duas parcelas destes termos a fim de atender às condições desejadas. Contudo com três parcelas já será possível. Ou seja, no final a menor autofunção, que poderá expressar outras soluções T_s (como em (2.21)), a partir de combinações lineares de termos da sua forma será:

$$A_s(u, v, w) = T_{s,l,1}(u, (v-w)) + T_{s,m,2}(u, (v-w)) + T_{s,n,3}(u, (v-w)) \quad (2.25)$$

Caso 1: $A_s(u, v, w) = C T_{s,l,1}(u, (v-w))$, $C \in \mathbb{R}^*$

Trivialmente verifica-se que tal função não é identicamente nula sobre $v = r$. Pois, sobre este lado, chega-se à relação $C t_{l,1}(u) = \text{sen}\left[\frac{\pi l}{3r}(u+2r)\right] \cos[\beta_1(u+2r)]$, a qual não é identicamente nula, variando o valor de u no intervalo $[-2r, r]$, a menos que $l = 0$ ou $\beta_1 = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, porém nesses casos A_s seria identicamente nula.

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Caso 2: $A_s(u, v, w) = C_1 T_{s,l,1}(u, (v-w)) + C_2 T_{s,m,2}(u, (v-w))$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^*$; $|l| \neq |m|$

Note que se $|l| = |m|$ então $|\beta_1| = |\beta_2|$, pois $\left(\frac{\pi l}{3r}\right)^2 + 3\beta_1^2 = \left(\frac{\pi m}{3r}\right)^2 + 3\beta_2^2 = k^2$. Isto permitiria juntar as duas parcelas numa só levando ao caso 1. Por isso faz-se a restrição $|l| \neq |m|$.

Sobre $v = r$, um dos lados do bordo, a autofunção deve se anular. Juntando com propriedades trigonométricas, tem-se:

$$\begin{aligned} C_1 t_{l,1}(u) + C_2 t_{m,2}(u) &= \frac{C_1}{2} \left(\text{sen} \left[\left(\frac{\pi l}{3r} + \beta_1 \right) (u + 2r) \right] + \text{sen} \left[\left(\frac{\pi l}{3r} - \beta_1 \right) (u + 2r) \right] \right) + \\ &+ \frac{C_2}{2} \left(\text{sen} \left[\left(\frac{\pi m}{3r} + \beta_2 \right) (u + 2r) \right] + \text{sen} \left[\left(\frac{\pi m}{3r} - \beta_2 \right) (u + 2r) \right] \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

A menos que $|l| = |m|$ (com isto $|\beta_1| = |\beta_2|$), a função que está sendo multiplicada por $\frac{C_1}{2}$ é linearmente independente em relação à função multiplicada por $\frac{C_2}{2}$ em (2.26). Como o caso considerado é $|l| \neq |m|$, então tal independência implica que, para satisfazer (2.26), é necessário $C_1 = C_2 = 0$, daí A_s seria identicamente nula, caso este descartado.

Caso 3: $A_s(u, v, w) = C_1 T_{s,l,1}(u, (v-w)) + C_2 T_{s,m,2}(u, (v-w)) + C_3 T_{s,n,3}(u, (v-w))$, com $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^*$, sendo que $|l| \neq |m| \neq |n| \neq |l|$

Pelo mesmo argumento realizado no início do caso 2, se ocorresse a igualdade entre dois ou mais valores, em módulo, dentre inteiros l , m e n , recairia no caso 1 ou 2. Daí a restrição $|l| \neq |m| \neq |n| \neq |l|$.

Primeiro suponha que $C_1 = C_2 = C_3$. Este caso envolve muitas contas e verificações, por isso, delimitará-se a uma explicação simplória, para focar apenas no processo envolvido.

Usando uma ideia similar ao caso 2 sobre $v = r$, tem-se ao todo oito possibilidades de fazer $t_{l,1} + t_{m,2} + t_{n,3} = 0$. Contudo, todas levarão essencialmente à mesma forma de solução, rearranjando os termos e posições. Portanto, argumentará-se apenas para uma delas, a qual leva às seguintes relações:

- (I) $\frac{\pi l}{3r} + \beta_1 = -\frac{\pi n}{3r} + \beta_3$
- (II) $\frac{\pi l}{3r} - \beta_1 = -\frac{\pi m}{3r} - \beta_2$
- (III) $\frac{\pi m}{3r} - \beta_2 = -\frac{\pi n}{3r} - \beta_3$
- (IV) $l + m + n = 0$ (assim l pode ser expresso em termos de m e n)

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

$$(V) \quad \beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi(l+m)}{3r}$$

$$(VI) \quad \beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{9r}(m-l)$$

As três primeiras relações estão associadas à escolha de uma das oito possibilidades mencionadas e (IV) é uma consequência facilmente verificada. A relação (V) é obtida somando (I) com (III) e usando $-n = l + m$ (equivalente a (IV)).

Além disso, das condições $\left[\frac{\pi l}{3r}\right]^2 + 3\beta_1^2 = \left[\frac{\pi m}{3r}\right]^2 + 3\beta_2^2 = k^2$, rearranja-se a primeira igualdade e tem-se: $\left[\frac{\pi}{3r}\right]^2 (m^2 - l^2) = 3(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 + \beta_2) = \frac{\pi(m+l)}{r}(\beta_1 + \beta_2)$. Daí, da relação $m^2 - l^2 = (m+l)(m-l)$, chega-se a (VI).

Por fim, (V) e (VI) fornece um sistema linear permitindo encontrar β_1 e β_2 . Daí, substituindo em (I) ou (III), acha-se β_3 . Com isso, é possível expressar k^2 . Em suma, tem-se:

$$\beta_1 = \frac{\pi(m-n)}{9r}; \quad \beta_2 = \frac{\pi(n-l)}{9r}; \quad \beta_3 = \frac{\pi(l-m)}{9r} \quad (2.27)$$

$$k^2 = \frac{2}{27} \left[\frac{\pi}{r}\right]^2 (l^2 + m^2 + n^2) = \frac{4}{27} \left[\frac{\pi}{r}\right]^2 (m^2 + mn + n^2) \quad (2.28)$$

A última igualdade está dizendo que, nessa forma e nessas condições, os autovalores dependem só de $n, m \in \mathbb{Z}$.

Notando agora que se pelo menos duas das constantes dentre C_1, C_2 e C_3 forem distintas pode-se escrever A_s como:

$$A_s(u, v, w) = C_1 (T_{s,l,1}(u, (v-w)) + T_{s,m,2}(u, (v-w)) + T_{s,n,3}(u, (v-w))) + P \quad (2.29)$$

Sendo que P é uma parcela no formato do caso 1 ou do caso 2. Assim, a primeira parcela com fator C_1 satisfaria a condição do bordo conforme visto acima, contudo P falharia.

Com isso, fazendo $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ as autofunções simétricas A_s que satisfazem o problema e que irão compor um sistema-base de soluções são da forma:

$$T_s^{m,n}(u, v, w) := T_{s,l,1}(u, (v-w)) + T_{s,m,2}(u, (v-w)) + T_{s,n,3}(u, (v-w)); \quad l = -m - n \quad (2.30)$$

E deve satisfazer a restrição $|l| \neq |m| \neq |n| \neq |l|$.

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Observação 2.3 Decorre da relação $l + m + n = 0$ que tal restrição é violada se, e somente se, ocorrer um dos casos a seguir: (i) $m = 0$ (equivalentemente $l = -n$), (ii) $n = 0$ (equivalentemente $l = -m$), (iii) $m = -2n$ (equivalentemente $l = n$), (iv) $n = -2m$ (equivalentemente $l = m$), (v) $m = -n$ (equivalentemente $l = 0$) ou (vi) $m = n$ (equivalentemente $l = -2n = -2m$).

Combinando as relações em (2.27) e (2.30), junto a propriedades trigonométricas pode-se expressar $T_s^{m,n}$ como:

$$\begin{aligned} T_s^{m,n}(u, v, w) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi l}{3r}(u + 2r)\right)\cos\left(\frac{\pi(m-n)}{9r}(v - w)\right) \\ &+ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{3r}(u + 2r)\right)\cos\left(\frac{\pi(n-l)}{9r}(v - w)\right) \\ &+ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{3r}(u + 2r)\right)\cos\left(\frac{\pi(l-m)}{9r}(v - w)\right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} T_s^{m,n} &= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(lu + mv + nw + 3lr)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(nu + mv + lw + 3nr)\right) \right. \\ &+ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(mu + nv + lw + 3mr)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(mu + lv + nw + 3mr)\right) \\ &\left. + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(nu + lv + mw + 3nr)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(lu + nv + mw + 3lr)\right)\right\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Construção das autofunções antissimétricas T_a

É um processo totalmente análogo ao anterior. Agora usa-se a equação (II).(b) em (2.16) para obter que $g_a(\eta) = C \sin(\beta\eta)$.

Daí supõe-se que as autofunções T_a se comportarão como T_s e verifica-se que satisfaz as condições do problema tratado.

Assim, defina:

$$T_{a,l,j}(u, v - w) := \operatorname{sen}\left[\frac{\pi l}{3r}(u + 2r)\right]\operatorname{sen}[\beta_j(v - w)] \quad (2.33)$$

Com $l \in \mathbb{Z}$ e β_j sujeitas à condição $\left[\frac{\pi l}{3r}\right]^2 + 3\beta_j^2 = k^2$. Daí, com as mesmas expressões para β_j e k^2 em (2.27) e (2.28), juntamente a $l + m + n = 0$, chega-se, de maneira análoga, às autofunções antissimétricas que irão compor o sistema-base:

$$T_a^{m,n}(u, v, w) := T_{a,l,1}(u, v - w) + T_{a,m,2}(u, v - w) + T_{a,n,3}(u, v - w) \quad (2.34)$$

De fato, as funções envolvidas são trigonométricas e se comportam como as que foram consideradas nas autofunções simétricas, anteriormente. Assim, conclui-se que a combinação linear satisfará o problema somente a partir de três parcelas no formato de $T_a^{m,n}$ ou um múltiplo não nulo de $T_a^{m,n}$, visto que deseja-se apenas

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

autofunções não identicamente nulas.

Por fim, também deve-se impor a condição $|l| \neq |m| \neq |n| \neq |l|$, visto que quando ela é violada, volta-se ao caso de duas parcelas ou uma parcela, os quais foram descartados. Assim, como $l + m + n = 0$ ainda é satisfeita, permanece válida também a observação 2.3.

Logo, uma solução da forma antissimétrica T_a é, em geral, uma combinação linear dos termos de (2.34).

Combinando (2.27) com (2.34), junto a propriedades trigonométricas pode-se expressar $T_a^{m,n}$ como:

$$\begin{aligned} T_a^{m,n}(u, v, w) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi l}{3r}(u + 2r)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(m-n)}{9r}(v - w)\right) \\ &+ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{3r}(u + 2r)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(n-l)}{9r}(v - w)\right) \\ &+ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{3r}(u + 2r)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(l-m)}{9r}(v - w)\right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} T_a^{m,n} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(lu + mv + nw + 3lr)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(nu + mv + lw + 3nr)\right) \right. \\ &+ \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(mu + nv + lw + 3mr)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(mu + lv + nw + 3mr)\right) \\ &\left. + \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(nu + lv + mw + 3nr)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(lu + nv + mw + 3lr)\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Identificação do sistema-base de soluções

Algumas observações são imediatas. Por exemplo, a partir de $l + m + n = 0$ e da equação (2.32) tira-se que $T_s^{m,n} \equiv T_s^{n,m}$. De (2.36), tem-se $T_a^{m,n} \equiv -T_a^{n,m}$. Logo, sobre quaisquer permutações cíclicas de (l, m, n) as autofunções $T_s^{m,n}$ se equivalem, assim como as autofunções $T_a^{m,n}$ (a menos de um sinal). Daí, também observa-se que $T_s^{m,n}$, $T_s^{-n,m+n}$, $T_s^{-m-n,m}$, $T_s^{-m,m+n}$, $T_s^{-m-n,n}$ e $T_s^{-n,-m}$ são autofunções equivalentes a menos do sinal. O mesmo ocorre com $T_a^{m,n}$, $T_a^{-n,m+n}$, $T_a^{-m-n,m}$, $T_a^{-m,m+n}$, $T_a^{-m-n,n}$ e $T_a^{-n,-m}$.

Como a combinação linear das autofunções também é autofunção, então o sinal é irrelevante. Com estas observações pode-se considerar apenas as autofunções simétricas $T_s^{m,n}$ e antissimétricas $T_a^{m,n}$, que irão compor o sistema-base de soluções, com (m, n) satisfazendo $n > m > 0$, uma vez que os pares de inteiros (m', n') descartados correspondem a autofunções que seriam linearmente dependentes em relação as que sobram ou então (m', n') é um descarte já realizado na observação 2.3, a qual foi visto posteriormente que valia tanto para as autofunções simétricas quanto as antissimétricas.

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Após todas as considerações, sobra o seguinte sistema de autofunções:

$$\mathcal{B} = \{T_s^{m,n}; n > m > 0\} \cup \{T_a^{m,n}; n > m > 0\} \quad (2.37)$$

Sendo que, para cada autofunção associada ao par de inteiros (m, n) , tem-se o autovalor k^2 expresso por:

$$k_{m,n}^2 = \frac{4}{27} \left[\frac{\pi}{r} \right]^2 (m^2 + mn + n^2) \quad (2.38)$$

Argumentará-se que \mathcal{B} determina um sistema-base, ortogonal e completo, de soluções do problema inicial.

Ortogonalidade

Defina o seguinte produto interno real: $\langle f, g \rangle := \int_D fg dA$. Ou seja, ao tomar $f, g \in \mathcal{B}$, o que está sendo feito essencialmente é a integração da função fg em toda a extensão do triângulo equilátero.

Fazendo $f \neq g$, com $f, g \in \mathcal{B}$, pode-se escrever o produto fg com base nas equações (2.32) e (2.36) e efetuar a integração sobre D sem nenhum grande empecilho (é apenas uma verificação extensa visto que o formato das autofunções são longos, assim como o cálculo das integrais), verificando-se que $\langle f, g \rangle = 0$. Logo o sistema é ortogonal. A ortonormalidade pode ser obtida normalizando a norma induzida por este produto interno.

O teorema a seguir servirá para construir retângulos formados por triângulos equiláteros refletidos a partir de D e para analisar a completude \mathcal{B} .

Teorema Fundamental de Lamé

Teorema 2.4 (Teorema Fundamental de Lamé) *Suponha que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ possa ser representada por soma de funções trigonométricas, no seguinte formato:*

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^N (A_i \text{sen}(\lambda_i x + \mu_i y + \alpha_i) + B_i \text{cos}(\lambda_i x + \mu_i y + \beta_i)); \quad \lambda_i^2 + \mu_i^2 = k^2, \forall i$$

Então:

- (i) $T(x, y)$ é antissimétrica sobre qualquer reta que se anula.
- (ii) $T(x, y)$ é simétrica sobre qualquer reta na qual sua derivada normal $\frac{\partial T}{\partial v}$ se anula.

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Demonstração: Começando pelo item (i):

Seja L uma reta tal que $T \upharpoonright_L \equiv 0$. Construa um novo sistema de coordenadas ortogonal (x', y') onde o eixo de y' está na direção de L . Para tal, basta efetuar uma translação até algum ponto de L e uma rotação da forma $\frac{\pi}{2} - \theta$, algum $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Assim, neste novo sistema, tem-se $L = \{(0, y') \mid y' \in \mathbb{R}\}$. Rearranja-se então a expressão $T(x, y)$ para este novo sistema, da seguinte forma:

$$T(x', y') = \sum_{i=1}^N v_i(y') \operatorname{sen}(\lambda'_i x') + \sum_{i=1}^N w_i(y') \operatorname{cos}(\lambda'_i x')$$

Sendo, $\lambda'_i = \lambda_i \operatorname{sen}(\theta) - \mu_i \operatorname{cos}(\theta)$; $\mu'_i = \lambda_i \operatorname{sen}(\theta) + \mu_i \operatorname{cos}(\theta)$; $v_i(y') = C_i \operatorname{cos}(\mu'_i y' + \phi_i)$; e $w_i(y') = C_i \operatorname{sen}(\mu'_i y' + \phi_i)$.

C_i e ϕ_i são, respectivamente, amplitudes e ângulos de fase apropriados. Decorre imediatamente que $(\lambda'_i)^2 + (\mu'_i)^2 = k^2$.

Aplicando a hipótese $T \upharpoonright_L \equiv 0$, tem-se $T(0, y') = 0, \forall y' \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\sum_{i=1}^N w_i(y') = 0, \forall y' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N C_i \operatorname{sen}(\mu'_i y' + \phi_i) = 0, \forall y' \in \mathbb{R}$$

Pode-se juntar as parcelas dos senos tais que os μ_i possuem mesmo valor absoluto e reescrever a propriedade acima como:

$$\sum_{j=1}^M K_j \operatorname{sen}(\mu'_j y' + \phi_{i_j}) = 0, \forall y' \in \mathbb{R}$$

Satisfazendo $|\mu_{i_j}| \neq |\mu_{i_k}|$ sempre que $k \neq j$. Daí, a soma acima engloba apenas senos linearmente independentes, implicando $K_1 = \dots = K_M = 0$. Além disso, para os valores de i tais que μ_i tem um mesmo valor absoluto $|\mu_{i_j}|$, para certo j , os λ_i associados também têm um mesmo valor absoluto $|\lambda_{i_j}|$, visto que $(\lambda'_i)^2 + (\mu'_i)^2 = k^2$. Logo para tais valores de i , as funções $\operatorname{cos}(\lambda'_i x')$ são na verdade a mesma, já que o cosseno é par. Portanto:

$$\sum_{i=1}^N w_i(y') \operatorname{cos}(\lambda'_i x') = \sum_{j=1}^M K_j \operatorname{sen}(\mu'_j y' + \phi_{i_j}) \operatorname{cos}(\lambda'_i x') = 0$$

Sobra então $T(x', y') = \sum_i v_i(y') \operatorname{sen}(\lambda'_i x')$, a qual é antissimétrica sobre cada ponto $(0, y') \in L$, devido à imparidade do seno, ou seja, $T(x', y') = -T(-x', y')$

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Item (ii):

O argumento é totalmente análogo, se for tomada L como sendo uma reta onde a derivada normal se anula em cada ponto. Na expressão de T como duas somatórias no novo sistema, ao invés de a segunda se anular como no primeiro caso, conclui-se que a primeira delas é que se anula. Isso porque quando a expressão é derivada, a somatória com os termos $\cos(\lambda'_i x')$ passa a aparecer na primeira posição.

Conclui-se então que $T(x', y') = \sum_i w_i(y') \cos(\lambda'_i x')$. A simetria em relação a reta L (onde a derivada normal se anula) segue do fato que o cosseno é uma função par, logo $T(x', y') = T(-x', y')$.

□

O resultado acima na verdade é mais geral, expressando T como série de funções trigonométricas ao invés de uma somatória finita. Porém deseja-se aplicá-lo às autofunções $T_s^{m,n}$ e $T_a^{m,n}$, daí a somatória finita já é suficiente.

Corolário 2.5 *Dada uma função T como no teorema anterior, definida num domínio delimitado por uma região de um polígono P e que se anula sobre seu bordo (resp. $\frac{\partial T}{\partial \nu}$, derivada na direção normal em relação ao bordo, se anula), então T (resp. $\frac{\partial T}{\partial \nu}$) também se anula sobre o bordo de qualquer polígono congruente a P , obtido por reflexão de um dos seus lados.*

Em particular, o corolário diz que é possível estender o domínio \bar{D} das autofunções do problema através de reflexões sobre os lados do triângulo equilátero, obtendo assim novos triângulos equiláteros com condição de bordo nulo.

Antecipando o problema que será estudado na sequência do texto, a condição de bordo de Neumann sobre os lados do triângulo equilátero será justamente uma restrição em que a derivada na direção normal de uma autofunção deva se anular. Assim esta mesma ideia de reflexões também permanecerá válida, o que facilitará correlacionar estas ideias do problema atual para o posterior.

Completude

O argumento para se verificar a completude do sistema \mathcal{B} em (2.37), ou seja, qualquer solução pode ser expressa como combinação linear das autofunções deste sistema, basicamente está contido na construção das duas figuras a seguir.

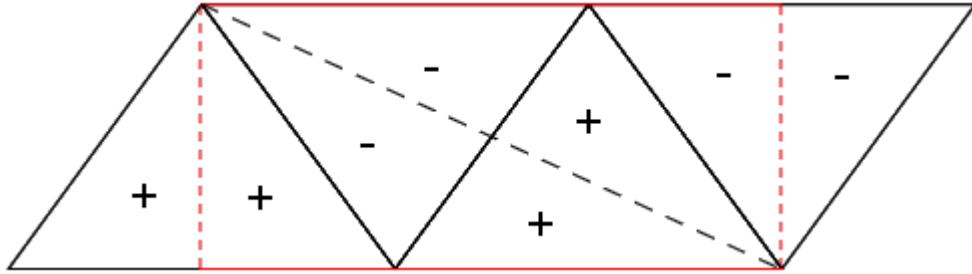


Figura 2.2: construção de um retângulo a partir de reflexões no triângulo equilátero e suas mudanças de sinal causadas nas autofunções $T_s^{m,n}$

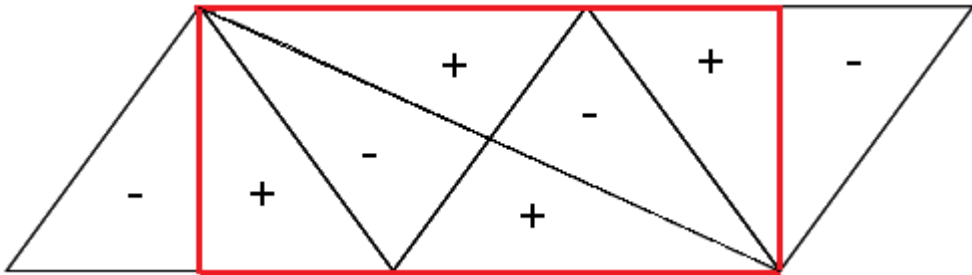


Figura 2.3: retângulo construído a partir de reflexões no triângulo equilátero e suas mudanças de sinal causadas nas autofunções $T_a^{m,n}$

A Figura 2.2 mostra como se comporta a mudança de sinal de uma autofunção simétrica do sistema em relação aos eixos de simetria dados sobre a altura $v = w$ de cada triângulo equilátero e em relação às reflexões sobre os lados, conforme consequência do corolário anterior, pela condição de bordo nulo. A Figura 2.3 é o análogo para autofunções antissimétricas do sistema.

Logo o retângulo formado, delimitado pelos lados em vermelho, tem condições de bordo nulo para as autofunções anti-simétricas. Já para as autofunções simétricas, ele tem condição de bordo nulo exceto nos lados de linha tracejada, os quais valem a condição de Neumann, onde a derivada na direção do normal se anula (ao derivar uma autofunção simétrica no eixo de simetria, ela passa a se comportar como uma autofunção antissimétrica neste eixo, de modo análogo à demonstração do teorema fundamental de Lamé).

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Sabe-se ainda do problema no retângulo que é possível determinar um sistema completo, em qualquer destes casos de condição de bordo, conforme a referência [12].

Daí, nota-se que as autofunções construídas no problema do triângulo equilátero são exatamente restrições de autofunções do problema no retângulo, mediante as propriedades de simetria nas linhas internas e nos lados gerados pelos triângulos equiláteros sobre a região retangular.

O processo para construir autofunções do problema do retângulo que levem em conta as condições nos bordos e nas linhas internas formadas nas figuras recairia nas mesmas construções das autofunções para o triângulo equilátero.

Em suma, se houvesse alguma autofunção simétrica ou antissimétrica no sistema \mathcal{B} que não tivesse sido considerada, então ela seria uma restrição de uma autofunção no retângulo (o qual sabe-se determinar a completude) e que satisfaria as restrições sobre o bordo e sobre as linhas internas, levando assim que tal autofunção seria gerada pelo mesmo processo do triângulo equilátero e, portanto, teria que ser uma combinação linear de elementos em \mathcal{B} , o que termina a argumentação.

2.2 Autoestrutura do laplaciano no triângulo equilátero com condição de bordo de Neumann

O problema de Neumann que será tratado sobre o triângulo equilátero basicamente envolve a mesma equação diferencial parcial, porém agora exige-se que uma autofunção sobre o bordo tenha sua derivada normal nula, ao invés da função em si se anular como no problema anterior. O método de solução será bastante análogo.

Em suma considera-se o seguinte problema:

Problema 2: obter valores reais k^2 e funções $T : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$(a) \Delta T(x, y) + k^2 T(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in D; \quad (b) \frac{\partial T}{\partial \nu}(p) = 0, \quad \forall p \in \partial D \quad (2.39)$$

O item (b) é justamente chamado de condição de bordo de Neumann. Ele também possui um resultado análogo para a proposição (2.1), ou seja, uma autofunção T satisfaz a condição de bordo de Neumann se, e somente se, T_s e T_a a satisfazem. A demonstração é similar, considerando as derivadas normais ao invés das funções originais, e as propriedades simétricas e antissimétricas de T_s e T_a respectivamente. Daí, juntando à proposição (2.2), novamente será possível estudar as partes T_s e T_a como autofunções isoladamente.

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Da mesma forma que no primeiro problema, será usado o método da separação de variáveis, ou seja, supor que uma solução T satisfaz, para determinadas funções f e g , a relação $T(u, v, w) = T(\xi, \eta) = f(\xi)g(\eta)$. Assim, como a equação diferencial é a mesma do problema anterior, permanecem válidas as relações e equações obtidas de (2.10) a (2.16).

Construção das Autofunções Simétricas T_s

A equação obtida em (2.17) também vale, visto que não depende da condição do bordo do problema. Juntando então com (2.13), segue as seguintes informações:

$$(a) T_s(\xi, \eta) = f(\xi)g_s(\eta); (b) \tilde{f}(y) = A\cos(\alpha y) + B\sin(\alpha y); (c) g_s(\eta) = K_1\cos(\beta\eta) \quad (2.40)$$

A fim de lidar com as equações (b) e (c) em (2.40), será considerado o sistema (y, η) lembrando que $\xi(y) = r - y$ ou, se preferir, $y(\xi) = r - \xi$. Daí, como consequência, segue que $T_s(y, \eta) = \tilde{f}(y)g_s(\eta)$ é a expressão de T_s no sistema (y, η) .

Como o eixo u coincide com o eixo onde $v = w$, então sobre o lado inferior do triângulo D (lado sobre o eixo y) tem-se que $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ é um vetor do eixo u , o qual é ortogonal em relação a tal lado. Este vetor corresponde a $\nu = (\nu_y, \nu_\eta) = (r - u, v - w) = (r, 0)$ no sistema (y, η) . Além disso, o ponto $p = (\xi, \eta) = (r, 0)$ é o ponto de intersecção do eixo $v = w$ (eixo u) com o lado considerado e corresponde ao ponto $(y_0, \eta_0) = (r - r, 0) = (0, 0)$ no sistema (y, η) . Assim, pela condição de bordo de Neumann, obtém-se:

$$\frac{\partial T_s}{\partial \nu}(0, 0) = \left(r \frac{\partial T_s}{\partial y} + 0 \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right)(0, 0) = 0 \quad (2.41)$$

Com isso:

$$\tilde{f}'(0)g_s(0) = \alpha B = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } B = 0 \quad (2.42)$$

Caso 1: $\alpha \neq 0$, ou seja, $B = 0$

Primeiro obtém-se $\tilde{f}(y) = A\cos(\alpha y)$ e, a fim de T_s não ser identicamente nula, deve valer $A \neq 0$.

Agora será usada a condição do bordo sobre o vértice $u = -2r$, que está tanto sobre o lado $w = r$ quanto o lado $v = r$. Considere-no sobre o lado $w = r$, daí é necessário encontrar um vetor ν' na direção ortogonal em relação a este lado. Tal vetor deve

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

estar, portanto, sobre o eixo $u = v$ (eixo w). Fazendo $u = v = r$ e usando $u + v + w = 0$, chega-se que $(r, r, -2r)$ corresponde a um desses vetores desejados e equivale a $(r, 3r)$ em coordenadas (y, η) . Sendo $v' = (r, 3r)$ e notando que o vértice $u = -2r$ equivale ao ponto $(3r, 0)$, então:

$$\frac{\partial T_s}{\partial v'}(3r, 0) = \left(r \frac{\partial T_s}{\partial y} + 3r \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right)(3r, 0) = 0 \quad (2.43)$$

Ou seja:

$$r \tilde{f}'(3r)g_s(0) + 3r \tilde{f}(3r)g_s'(0) = -\alpha A \operatorname{sen}(\alpha 3r) = 0 \quad (2.44)$$

Como $-\alpha A \neq 0$, conclui-se $\alpha 3r = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\alpha = \frac{\pi l}{3r}$, $l \in \mathbb{Z}$.

Juntando as informações tem-se como solução:

$$T_s(u, v, w) = \sum_{l \in M \subset \mathbb{Z}} A_l \cos(\alpha(r - u)) \cos(\beta(v - w)); \quad \alpha = \frac{\pi l}{3r}; \quad \alpha^2 + 3\beta^2 = k^2 \quad (2.45)$$

$M \subset \mathbb{Z}$ indica apenas que a solução é uma combinação linear.

Como $A_l \cos\left(\frac{\pi l}{3r}(u - r)\right) = C_l \cos\left(\frac{\pi l}{3r}(u - r) + \pi l\right) = C_l \cos\left(\frac{\pi l}{3r}(u + 2r)\right)$, então (2.45) pode ser reescrito como:

$$T_s(u, v, w) = \sum_{l \in M \subset \mathbb{Z}} C_l \cos\left(\frac{\pi l}{3r}(u + 2r)\right) \cos(\beta(v - w)); \quad \left(\frac{\pi l}{3r}\right)^2 + 3\beta^2 = k^2 \quad (2.46)$$

Caso 2: $\alpha = 0$

Obtém-se então $\tilde{f}(y) = A \neq 0$, cuja solução é da forma $T_s(u, v, w) = C \cos(\beta(v - w))$. Note que para $\alpha = 0$, T_s coincide com o formato em (2.46), fazendo $M = \{0\}$ e $C_0 = C$. Com isso, pode-se considerar que todas as soluções já estão consideradas em (2.46) tomando um subconjunto de inteiros M e constantes C_l adequadas.

Observação 2.6 *Note que no caso em que $\alpha = \beta = 0$, tem-se $k^2 = 0$ associado a autofunção simétrica $T_s(u, v, w) = C$, não nula para $C \neq 0$ e claramente satisfazendo as condições de bordo. Ou seja, as aplicações constantes serão soluções e daí pode-se acrescentar como autofunção do sistema de soluções o elemento $(T_s)_0(u, v, w) = 1$, fato este que não ocorria no problema 1.*

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

De modo similar ao problema anterior, deseja-se encontrar autofunções elementares da forma T_s que componham o sistema-base de soluções. Ou seja, obter quais as autofunções simétricas com a menor quantidade de parcelas que sejam linearmente independentes e tais que as demais soluções sejam combinações lineares delas ou, se preferir, combinações de parcelas no seguinte formato:

$$T_{s,l,j}(u, (v-w)) := \cos\left(\frac{\pi l}{3r}(u+2r)\right) \cos(\beta_j(v-w)), \quad \left(\frac{\pi l}{3r}\right)^2 + 3\beta_j^2 = k^2, \quad l \in \mathbb{Z}, \beta_i \in \mathbb{R} \quad (2.47)$$

Estas aplicações são funções trigonométricas que se comportam de modo muito similar às funções consideradas no problema 1, da mesma forma que as derivadas na direção normal em cada ponto do bordo. Daí, segue de modo totalmente análogo que a combinação de uma e duas parcelas não é suficiente, sendo necessárias três parcelas multiplicadas pela mesma constante. Daí, como no problema anterior, conclui-se que as autofunções simétricas que irão compor o sistema-base de soluções são da forma:

$$T_s^{m,n}(u, v, w) = T_{s,l,1}(u, (v-w)) + T_{s,m,2}(u, (v-w)) + T_{s,n,3}(u, (v-w)) \quad (2.48)$$

Adicionadas às propriedades:

$$(a) \ l + m + n = 0; \quad (b) \ \beta_1 = \frac{\pi(m-n)}{9r}; \quad (c) \ \beta_2 = \frac{\pi(n-l)}{9r}; \quad \beta_3 = \frac{\pi(l-m)}{9r} \quad (2.49)$$

Sendo que cada $T_s^{m,n}$ está associada a um autovalor k^2 na forma:

$$k_{m,n}^2 = \frac{4}{27} \left[\frac{\pi}{r} \right]^2 (m^2 + mn + n^2) \quad (2.50)$$

Conforme a observação 2.6., para o autovalor $k_{0,0}^2 = 0$, convencionará-se $T_s^{0,0} = 1$, como representante das autofunções constantes.

Além disso, excluindo a solução para $m = n = 0$, que foi obtida como um caso à parte, as soluções restantes ficam então sujeitas as mesmas restrições de pares (m, n) presentes na observação 2.3.

2 Autoestrutura do triângulo equilátero

Logo, ao juntar as propriedades, as autofunções simétricas $T_s^{m,n}$ com $(m, n) \neq (0, 0)$ satisfazendo as devidas restrições são da forma abaixo:

$$\begin{aligned} T_s^{m,n}(u, v, w) &= \cos\left(\frac{\pi l}{3r}(u + 2r)\right)\cos\left(\frac{\pi(m-n)}{9r}(v - w)\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi m}{3r}(u + 2r)\right)\cos\left(\frac{\pi(n-l)}{9r}(v - w)\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi n}{3r}(u + 2r)\right)\cos\left(\frac{\pi(l-m)}{9r}(v - w)\right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Usando propriedades trigonométricas obtém-se uma forma alternativa:

$$\begin{aligned} T_s^{m,n} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(lu + mv + nw + 3lr)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(nu + mv + lw + 3nr)\right) \right. \\ &+ \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(mu + nv + lw + 3mr)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(mu + lv + nw + 3mr)\right) \\ &+ \left. \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(nu + lv + mw + 3nr)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9r}(lu + nv + mw + 3lr)\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Construção das Autofunções Antissimétricas T_a

De forma análoga a todos os procedimentos realizados até o momento, valerão as identidades em (2.49) e (2.50) (bem como restrições aos pares (m, n) na observação 2.3) associadas às seguintes soluções que irão compor o sistema-base:

$$\begin{aligned} T_a^{m,n}(u, v, w) &= \cos\left(\frac{\pi l}{3r}(u + 2r)\right)\sin\left(\frac{\pi(m-n)}{9r}(v - w)\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi m}{3r}(u + 2r)\right)\sin\left(\frac{\pi(n-l)}{9r}(v - w)\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi n}{3r}(u + 2r)\right)\sin\left(\frac{\pi(l-m)}{9r}(v - w)\right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} T_a^{m,n} &= \frac{1}{2} \left\{ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(lu + mv + nw + 3lr)\right) - \text{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(nu + mv + lw + 3nr)\right) \right. \\ &+ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(mu + nv + lw + 3mr)\right) - \text{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(mu + lv + nw + 3mr)\right) \\ &+ \left. \text{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(nu + lv + mw + 3nr)\right) - \text{sen}\left(\frac{2\pi}{9r}(lu + nv + mw + 3lr)\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Identificação do sistema-base de soluções

Considerando as restrições aos pares de inteiros (m, n) e descartando autofunções linearmente dependentes como foi feito no primeiro problema, sobra o seguinte sistema de soluções:

$$\mathcal{B} = \{T_s^{m,n}; n > m \geq 0\} \cup \{T_a^{m,n}; n > m \geq 0\} \cup \{T_s^{0,0}\} \quad (2.55)$$

Ortogonalidade e Completude de \mathcal{B}

A ortogonalidade (e por normalização, ortonormalidade) é verificada exatamente a partir do mesmo produto interno definido no problema 1.

Para a completude, basta notar que as reflexões devido ao Teorema Fundamental de Lamé continuam valendo, porém agora sobre o caso em que a derivada normal se anule sobre o bordo.

Com isto em mente, o argumento é o mesmo do problema anterior a partir dos retângulos delimitados pelos segmentos em vermelho obtidos por reflexões, conforme figuras a seguir. As linhas tracejadas são as que as autofunções mencionadas tem a derivada normal nula e, nas linhas contínuas, a autofunção se anula.

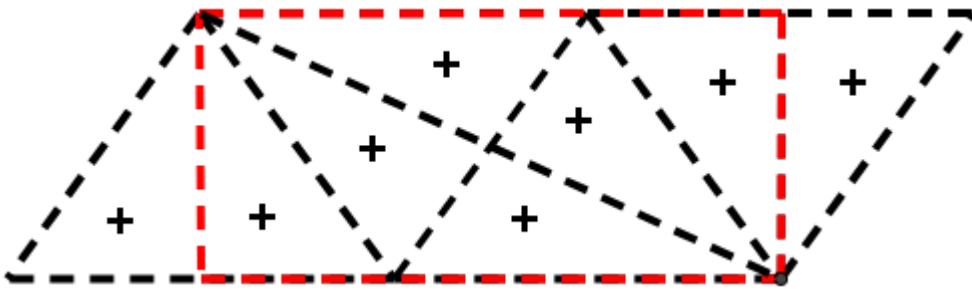


Figura 2.4: construção de um retângulo a partir de reflexões no triângulo equilátero e suas mudanças de sinal causadas nas autofunções $T_s^{m,n}$

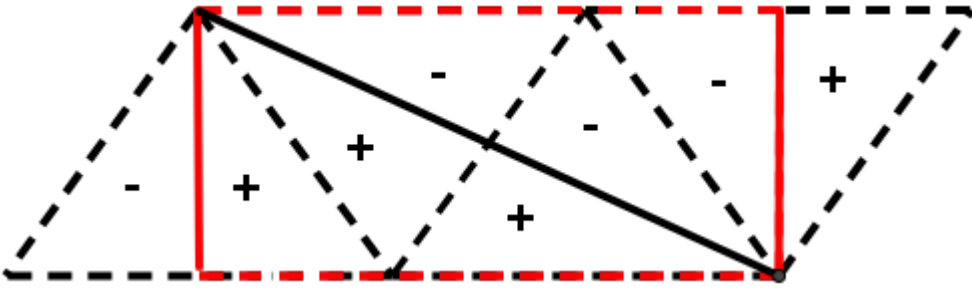


Figura 2.5: retângulo construído a partir de reflexões no triângulo equilátero e suas mudanças de sinal causadas nas autofunções $T_a^{m,n}$

3.1 Espectro de uma Variedade Riemanniana

Deseja-se estudar o laplaciano nos toros planos. Nesta parte, os conceitos presentes no apêndice são primordiais para compreensão. A abordagem a seguir provém de variedades riemannianas em geral e se particulariza para os toros planos.

Definição 3.1 (espectro e autoespaço de uma variedade riemanniana) *Seja \mathbb{K} um corpo (reais ou complexos). O conjunto $\text{Spec}_{\mathbb{K}}(M, g) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists f : M \rightarrow \mathbb{K}, \Delta f = \lambda f\}$ é dito espectro da variedade (M, g) . Pode-se escrever simplesmente $\text{Spec}(M, g)$ quando não houver ambiguidades no contexto utilizado. Para cada $\lambda \in \text{Spec}(M, g)$, o conjunto $E_{\lambda} := \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \mid \Delta f = \lambda f\}$ é dito autoespaço do autovalor λ .*

Será utilizado $\text{Spec}(M, g)$ para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e se $\Delta f = \lambda f$, diz-se que f é autofunção.

Teorema 3.2 *Seja M uma variedade riemanniana com métrica g e suponha que para cada $i \in \mathbb{N}$ existam subespaços vetoriais V_i de $C(M)$ tais que:*

(i) $\forall i \in \mathbb{N}, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$, tal que $\forall f \in V_i, \Delta f = \lambda_i f$.

(ii) $S := \sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$ é densa em $C(M)$ na topologia de $L^2(M)$ (L^2 integráveis em M).

Então $\text{Spec}(M, g) = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ e os V_i são os auto-espaços correspondentes aos λ_i .

Demonstração: Pode-se supor sem perda de generalidade que $V_i \neq \{0\}, \forall i \in \mathbb{N}$. Suponha que exista algum $\lambda \in \text{Spec}(M, g)$ distinto de todos os λ_i . Logo o auto-espaço E_{λ} é ortogonal aos subespaços V_i e isso contradiz a densidade de S . Com isto, tem-se $\text{Spec}(M, g) = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Pelo item (i) da hipótese é imediato que cada V_i está contido em E_{λ_i} . Suponha que haja $f \in E_{\lambda_i}/V_i$. Daí f é ortogonal a V_i . Por outro lado, f também é ortogonal a V_j para $j \neq i$, pois $V_j \subset E_{\lambda_j}$. Em suma, f é não nula e ortogonal a todos os V_j . Pelo mesmo argumento usado antes, isso contradiz a densidade de S . Portanto $V_i = E_{\lambda_i}$ \square

Observação 3.3 *Os números λ aqui fazem o papel dos valores $-k^2$ relacionados aos autovalores nos problemas do triângulo equilátero visto anteriormente. Além disso, como uma*

variedade riemanniana é identificada com sistemas de coordenadas (parametrizações), a definição do operador laplaciano Δ não é um conceito imediato, existem noções mais avançadas para defini-lo e generalizá-lo. Contudo no caso dos toros planos, objeto de estudo deste trabalho, o operador laplaciano se comporta praticamente idêntico ao usual, em \mathbb{R}^n , conforme será visto. Daí não será necessário entrar em detalhes mais avançados.

3.2 Espectro do Toro Plano

Será visto como construir um toro plano em dimensão n , o qual tem a propriedade de ser difeomorfo ao toro $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, uma variedade riemanniana obtida como variedade produto das circunferências unitárias S^1 com métrica natural induzida em \mathbb{R}^2 (denotará-se a métrica produto em T^n , assim obtida, por g_T). Além disto, cada toro plano será localmente isométrico ao \mathbb{R}^n (como o laplaciano é um operador diferencial, ele é também um conceito local e o fato de um toro plano ser localmente isométrico ao \mathbb{R}^n vai de encontro à observação 3.3).

Tal construção tem como objetivo central determinar o conhecimento do espectro dos toros planos e, posteriormente, verificar que em dimensão $n = 2$ o conhecimento do espectro determina um único toro plano.

Definição 3.4 (Reticulados em \mathbb{R}^n) *Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base qualquer de \mathbb{R}^n e considere o conjunto $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_n$, ou seja, Γ é formado por elementos da forma $m_1e_1 + \dots + m_ne_n$ com $m_i \in \mathbb{Z}$. Então Γ é dito um reticulado do \mathbb{R}^n .*

Uma consequência imediata desta definição é que Γ é um subgrupo do grupo aditivo $(\mathbb{R}^n, +)$, sendo possível definir uma ação descontínua sobre \mathbb{R}^n da seguinte forma: para cada $g \in \Gamma$ e cada $v \in \mathbb{R}^n$ define-se $g * v := v + g$ (denota-se $g * v$ simplesmente por gv).

Verifica-se nos passos adiante que $*$ é uma ação propriamente descontínua, livre e isométrica sobre \mathbb{R}^n .

(i) $*$ é uma ação.

A ação para cada elemento do grupo fixado é um translação e, portanto, um difeomorfismo. Além disso, como o vetor nulo é o elemento neutro do grupo, então a ação pelo neutro é a aplicação identidade. Por fim, dados $g, h \in \Gamma$ e $v \in \mathbb{R}^n$, tem-se $g * (h * v) = g * (v + h) = v + h + g = v + (g + h) = (g + h) * v$.

(ii) $*$ é propriamente descontínua.

Seja $0 \neq g \in \Gamma$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Tome $U = B_\delta(v)$ (bola aberta de raio δ centrada em v) com $\delta = 1/2$. Então $g(U) \cap U = \emptyset$, pois $g(U) = B_\delta(v + g)$ e a distância entre v e $v + g$ é no mínimo 1 já que g é translação inteira não nula.

(iii) $*$ age livremente.

Pois para $0 \neq g \in \Gamma$ e $v \in \mathbb{R}^n$ segue que $g * v = v + g \neq v$.

(iv) $*$ age isometricamente.

Pois a ação de cada elemento é uma translação, que obviamente define uma isometria.

Logo $(\mathbb{R}^n/\Gamma, g_\Gamma)$ com $g_\Gamma = g_0/\Gamma$, em que g_0 é a métrica natural de \mathbb{R}^n , forma uma variedade riemanniana obtida por ação de grupo e munida da métrica quociente:

$$(g_0/\Gamma)_{[p]}(u, v) = (g_0)_p((d\pi_p)^{-1}(u), (d\pi_p)^{-1}(v)); \forall [p] \in \mathbb{R}^n/\Gamma, \forall u, v \in T_{[p]}(\mathbb{R}^n/\Gamma) \quad (3.1)$$

Sendo que $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$ é a aplicação projeção, $\pi(p) = [p] = \Gamma + p$, a qual é um difeomorfismo local.

Definição 3.5 (Toro Plano) *Cada variedade riemanniana \mathbb{R}^n/Γ munida da métrica quociente g_Γ denomina-se um **toro plano** (de dimensão n).*

Observação 3.6 *O fato da métrica em um toro plano ser da forma em (3.1) relacionando as métricas das variedades via um difeomorfismo local π tem como consequência imediata que os toros planos n -dimensionais são localmente isométricos a \mathbb{R}^n , conforme se desejava verificar para poder assumir o conceito usual do operador laplaciano Δ , via uma identificação natural de coordenadas.*

O seguinte resultado mostra que todos os toros planos (numa dada dimensão fixa) são equivalentes no sentido de variedades diferenciáveis (a equivalência como variedade riemanniana não será verdadeira em geral).

Teorema 3.7 \mathbb{R}^n/Γ é difeomorfo a T^n

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(p) = (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$, $p = (x_1, \dots, x_n)$. Tem-se $f|_{[p]}$ constante, daí a aplicação $g : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow \tau^n$ por $g([p]) = f(p)$ está bem definida com $\tau = \{e^{2\pi i x} : x \in \mathbb{R}\}$, o qual é difeomorfo a $T^1 = S^1$ e, portanto, τ^n é

difeomorfo a T^n . Basta então verificar que g é um difeomorfismo. Uma estrutura diferenciável para \mathbb{R}^n/Γ é formado por uma restrição da aplicação projeção da forma $\pi \circ id \upharpoonright_U = \pi \upharpoonright_U$ (sendo U qualquer das regiões do reticulado que contém exatamente um representante de cada ponto). Já uma estrutura diferenciável para \mathbb{R}^n é formado pela identidade $\{id\}$. Com isso, compostas envolvendo $f, id, \pi \upharpoonright_U$ e seus inversos formam difeomorfismos, daí segue que g também é. \square

Com isto se tira propriedades topológicas, como o fato dos toros planos serem compactos. O conceito a seguir será bastante útil à análise do espectro de um dado toro plano.

Definição 3.8 (Reticulado Dual) Para cada reticulado $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, chama-se reticulado dual de Γ o conjunto $\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall y \in \Gamma, \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}\}$.

Proposição 3.9 (Propriedades de Γ^*) Se Γ é reticulado de \mathbb{R}^n , então Γ^* também é um reticulado de \mathbb{R}^n e, além disso, $(\Gamma^*)^* = \Gamma$.

Demonstração: Seja $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de Γ . A ideia é mostrar que é possível formar uma base $\beta^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ para Γ^* tal que $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$. De fato, para $\{de_1, \dots, de_n\}$ base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$, tem-se $de_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, que é o produto de uma matriz linha de_i da forma $[a_1, \dots, a_n]$ por um vetor coluna e_j , quando expressos na notação matricial sobre a base β . Ou seja, definindo $e_i^* = (a_1, \dots, a_n)$ na base β , então $de_i \cdot e_j$ coincide com o produto interno usual $\langle e_i^*, e_j \rangle$, logo $de_j \cdot e_i = \langle e_i^*, e_i \rangle = \delta_{ij}$. Com isso o conjunto β^* está construído e decorre imediatamente que $\beta^* = \{e_i^*\}_{i=1}^n$ é base de \mathbb{R}^n .

Deseja-se verificar que é base também de Γ^* sobre o anel \mathbb{Z} . Dado $x = \sum_{i=1}^n n_i e_i^* \in \Gamma^*$ e $e_j \in \Gamma$ tem-se $\langle x, e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n n_i e_i^*, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n n_i \delta_{ij} = n_j \in \mathbb{Z}$. Como os elementos de Γ são combinações de escalares inteiros dos vetores $\{e_j\}_{j=1}^n$, então dado $y \in \Gamma$, $\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}$.

Por fim, um processo repetido permite construir $\{e_i^{**}\}_{i=1}^n$ tal que $\langle e_j^{**}, e_i^* \rangle = \delta_{ij}$ e daí conclui-se que $e_j^{**} = e_j$, obtendo $(\Gamma^*)^* = \Gamma$. \square

O seguinte resultado de análise, demonstrado na referência [14], será útil.

TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS: Sejam K um espaço topológico compacto de Hausdorff e A uma subálgebra de $C_{\mathbb{C}}(K)$ (ou seja, A é subespaço vetorial de $C_{\mathbb{C}}(K)$) tal que:

- (a) A separa pontos (ou seja, $\forall x, y \in K$, com $x \neq y$, $\exists g \in A$, $g(x) \neq g(y)$);
- (b) A contém as funções constantes;
- (c) A é fechada por conjugação complexa ($\forall f \in A, \bar{f} \in A$);

Então A é denso em $C_{\mathbb{C}}(K)$

O resultado a seguir é um dos objetivos mencionados.

Proposição 3.10 (Espectro de um toro plano) *Seja $M = (\mathbb{R}^n/\Gamma, g_\Gamma)$ um toro plano dado. Então:*

- (a) $\lambda \in \text{Spec}M$ se, e somente se, existe $x \in \Gamma^*$ tal que $\lambda = 4\pi^2|x|^2$. (daí multiplicidade de λ é quantidade de vetores x do reticulado dual que satisfazem tal igualdade).
- (b) Cada autoespaço E_λ admite como base as funções da forma $f_x : M \rightarrow \mathbb{C}$, com $f_x([y]) = -e^{2\pi i \langle x, y \rangle}$, onde $x \in \Gamma^*$ satisfaz $\lambda = 4\pi^2|x|^2$.

Demonstração: Primeiro é fácil notar que as funções f_x estão bem definidas, pois se y' é outro representante de $[y]$ então $y' = y + v$, onde $v \in \Gamma$. Como $x \in \Gamma^*$ tem-se $\langle x, v \rangle = n$, algum $n \in \mathbb{Z}$ e com isto $f_x([y]) = -e^{2\pi i \langle x, y' \rangle} = -e^{2\pi i \langle x, y \rangle} e^{2\pi i n} = -e^{2\pi i \langle x, y \rangle}$.

Além disso o laplaciano é uma noção local e sobre o corpo \mathbb{C} se comporta como o laplaciano usual sobre \mathbb{R} , já que envolve apenas as derivadas de segunda ordem. Conforme observado anteriormente a partir das observações (3.3) e (3.6), o operador Δ também se comporta da mesma forma sobre M . Em torno de cada ponto $[y] \in M$ é possível tomar uma vizinhança $U[y]$ tal que a aplicação de projeção π seja um difeomorfismo (pois π é difeomorfismo local). Como π faz o mapeamento $y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto [(y_1, \dots, y_n)]$ nesta vizinhança, então pode-se escrever Δf_x nestas coordenadas como:

$$\Delta f_x([y]) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{f}_x}{\partial y_j^2}(y), \quad \tilde{f}_x = f \circ \pi|_{U[y]} \quad (3.2)$$

Assim $\tilde{f}_x : U[y] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é a expressão de f_x sobre a região mapeada por $U[y]$, a qual sabe-se calcular o laplaciano de forma usual. Sendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ em coordenadas cartesianas, tem-se:

$$\tilde{f}_x(y) = -e^{2\pi i \sum_{i=1}^n x_i y_i} \quad (3.3)$$

Logo:

$$\Delta f_x([y]) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \left(e^{2\pi i \sum_{i=1}^n x_i y_i} \right) = -4\pi^2 \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) e^{2\pi i \sum_{i=1}^n x_i y_i} = 4\pi^2|x|^2 f_x([y]) \quad (3.4)$$

Fazendo $\lambda = 4\pi^2|x|^2$, tem-se $\Delta f_x = \lambda f_x$, daí f_x é autofunção e também está provada a volta do item (a) da proposição.

3 Autoestrutura dos Toros Planos

Note que há uma quantidade enumerável dos λ tais que $\lambda = 4\pi^2|x|^2$ para algum $x \in \Gamma^*$, pois o reticulado Γ^* é enumerável. Logo é possível indexá-los como sendo λ_j , para $j \in \mathbb{N}$. Defina então $A_j := \left\{ f_x : |x|^2 = \frac{\lambda_j}{4\pi^2} \right\}$, $j \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que A_j é finito. Será mostrado que cada conjunto A_j é linearmente independente. O argumento é por indução sobre a quantidade de autofunções em A_j .

Para $\{f_x\} \subset A_j$, tem-se $A_j = \{f_x\}$ com $f_x \neq 0$ e portanto A_j é linearmente independente.

Suponha que $k-1$ autofunções de A_j quaisquer sejam linearmente independentes (hipótese de indução). Supondo $\sum_{j=1}^k c_j f_{x_j} = 0$ combinação de k autofunções distintas, o objetivo é mostrar que as constantes c_1, \dots, c_k se anulam. Daí será comprovado que k autofunções de A_j são linearmente independentes. Tem-se:

$$\sum_{j=1}^k c_j f_{x_j}([y]) = -\sum_{j=1}^k c_j e^{2\pi i \langle x_j, y \rangle} = -c_k e^{2\pi i \langle x_k, y \rangle} - \sum_{j=1}^{k-1} c_j e^{2\pi i \langle x_j, y \rangle} = 0 \quad (3.5)$$

Logo:

$$-c_k e^{2\pi i \langle x_k, y \rangle} = \sum_{j=1}^{k-1} c_j e^{2\pi i \langle x_j, y \rangle} \Rightarrow c_k = -\sum_{j=1}^{k-1} c_j e^{2\pi i \langle x_j - x_k, y \rangle} = -\sum_{j=1}^{k-1} c_j f_{x_j - x_k} \quad (3.6)$$

Tomando o operador Δ dos dois lados tem-se:

$$0 = -\sum_{j=1}^{k-1} c_j 4\pi^2 |x_j - x_k|^2 f_{x_j - x_k} \quad (3.7)$$

Pela hipótese de indução $c_j 4\pi^2 |x_j - x_k|^2 = 0$, o que implica $c_j = 0$, para $j = 1, \dots, k-1$. Pelas relações em (3.6) também se obtém $c_k = 0$, conforme se desejava mostrar.

Defina $V_j := \text{span} A_j$ o subespaço gerado pelas autofunções de A_j . Então tem-se $\dim V_j = |A_j| = n_j$, algum inteiro n_j . A ideia agora é utilizar o teorema (3.2) sobre os subespaços V_j . O item (i) do teorema já está satisfeito, resta provar o item (ii).

Para tal prova, será usado o Teorema de Stone-Weierstrass.

A soma direta $S = \sum_{j \in \mathbb{N}} V_j$ é claramente uma subálgebra de $C_{\mathbb{C}}(M)$, pois dados $f, g \in S$ e $c \in \mathbb{C}$, tem-se $\Delta(cf+g) = c\Delta f + \Delta g = \lambda_j cf + \lambda_k g$, logo $(cf+g) \in V_j \oplus V_k \subset S$. Além disso como $f_0([y]) = -1$, $\forall [y] \in M$, então o conjunto $\{cf_0 : c \in \mathbb{C}\} \subset S$ contempla todas as funções constantes. Por fim, dado $f_x \in S$, tem-se $\overline{f_x}([y]) = -e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} = -e^{2\pi i \langle -x, y \rangle}$, ou seja, $\overline{f_x} = f_{-x} \in S$ e com isto conclui-se que S é fechado por conjugação complexa.

3 Autoestrutura dos Toros Planos

Com isto, pelo Teorema de Stone-Weierstrass, S é denso em $C_{\mathbb{C}}(M)$, isto é, tem-se o item (ii) do teorema (3.2).

Conclusão: $\text{Spec}M = \{\lambda_j : j \in \mathbb{N}\}$ e $V_j = E_{\lambda_j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, o que termina a prova. \square

Observação 3.11 Note que no resultado acima $f_x \in E_{\lambda_j} \Leftrightarrow f_{-x} \in E_{\lambda_j}$, pois $|x| = |-x|$ e $\lambda_j = 4\pi^2|x|^2 \geq 0$. Daí, se $\lambda_j > 0$, tem-se $x \neq 0$ e, portanto, a multiplicidade de λ_j é par. Além disso, $E_0 = \{cf_0 : c \in \mathbb{C}\}$.

Note que há uma desvantagem em relação aos problemas no triângulo equilátero, pois lá mostrou-se um método para construir as autofunções, enquanto aqui foi assumido de antemão o conhecimento das autofunções, bastando apenas verificar que elas satisfaziam as condições do problema.

Lema 3.12 (isometria de reticulados e toros planos em \mathbb{R}^2) Sejam Γ e Γ' reticulados em \mathbb{R}^2 isométricos (no sentido de espaços com produto interno). Então:

(i) Γ^* e $(\Gamma')^*$ são isométricos.

(ii) Γ e (Γ') geram toros planos isométricos.

Demonstração: (i) Se $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ então $\Gamma' = \mathbb{Z}Te_1 + \mathbb{Z}Te_2$ para alguma isometria T (em particular uma aplicação linear) e que satisfaz $\langle e_i, e_j \rangle = \langle Te_i, Te_j \rangle$. Além disso, os reticulados duais são como na proposição (3.9), com bases $\{e_1^*, e_2^*\}$ e $\{(Te_1)^*, (Te_2)^*\}$ para Γ^* e $(\Gamma')^*$ respectivamente. Daí $\langle (Te_i)^*, Te_j \rangle = \delta_{ij} = \langle e_i^*, e_j \rangle = \langle T(e_i^*), Te_j \rangle$, o que implica $(Te_i)^* = T(e_i^*)$. Logo $\Gamma = \mathbb{Z}e_1^* + \mathbb{Z}e_2^*$ e $\Gamma' = \mathbb{Z}T(e_1^*) + \mathbb{Z}T(e_2^*)$, assim T também é uma isometria entre os duais.

(ii) Basta considerar a aplicação que leva cada $[p]$ em $[Tp]$, a qual determina uma isometria entre os toros planos, visto que eles estão identificados por coordenadas de maneira natural através da aplicação projeção π (verificação simples). \square

Observe que não há nenhum empecilho para generalizar este resultado em \mathbb{R}^n , porém o objetivo daqui em diante é verificar que toros planos em dimensão 2 com mesmo espectro são isométricos, o que não será verdade em geral para dimensão n .

Lema 3.13 Seja $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 \subset \mathbb{R}^2$ um reticulado e $v \in \Gamma$ um vetor não nulo de comprimento mínimo. Então existe $z \in \Gamma$ tal que $\Gamma = \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}z$

Demonstração: Dentre as possibilidades, um reticulado Γ é determinado pelos dois menores vetores em Γ que sejam linearmente independentes. Se $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$, para uma base $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$, então fazendo $r = \max\{|e_1|, |e_2|\} + 1$ a bola aberta de raio r e

centrada na origem $B_r(0)$ contém os vetores e_1, e_2 e v (este último pela hipótese de ter o menor comprimento do reticulado). Assim $B_r(0)$ contém no mínimo um vetor linearmente independente a v . Como $B_r(0)$ contém um número finito de vetores do reticulado Γ , pode-se então escolher z como o menor vetor que seja linearmente independente a v (mesmo que haja mais de uma possibilidade de escolha). \square

Definição 3.14 Para cada $v \in \mathbb{R}^2$, denota-se por $R[v]$ um referencial ortonormal do plano cujas coordenadas são definidas por $(x, y)_v$ e satisfazem $v = (|v|, 0)_v$.

Pode-se enxergar $R[v]$ como um sistema de coordenadas ortonormal cujo eixo x está na direção e sentido positivo de v . A definição, contudo, permite dois referenciais $R[v]$ distintos (os dois que alternam o sinal da coordenada y , ou seja, os dois sentidos da reta ortogonal a v). Isso não será um problema pois, para os resultados a seguir, não fará diferença escolher um ou outro, podendo então considerar $R[v]$ um destes referenciais previamente fixado.

Lema 3.15 Para cada reticulado $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ obtém-se a forma $\Gamma = \mathbb{Z}v_a + \mathbb{Z}v_b$, com $v_a \in \Gamma$ de comprimento mínimo $a > 0$ e $v_b = (b_1, b_2)_{v_a}$ em $R[v_a]$ satisfazendo $b_1 \in [0, a/2]$ e $b_2 > 0$. Em particular o resultado se aplica aos reticulados duais.

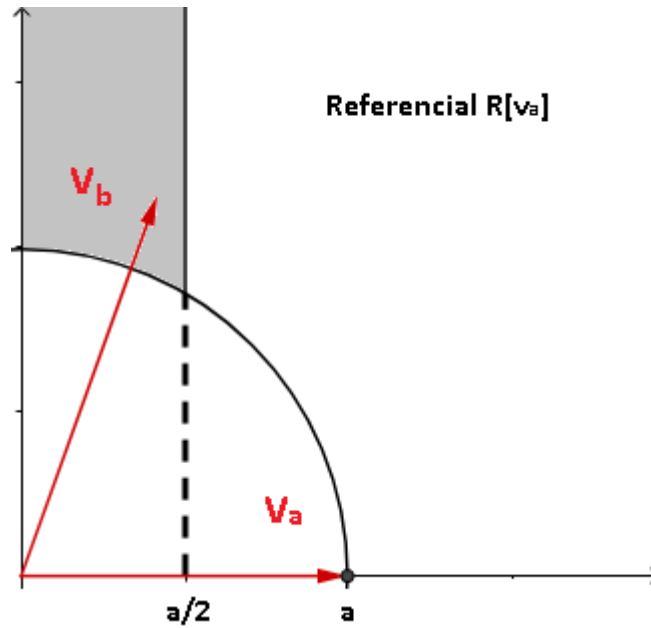


Figura 3.1: ilustração dos vetores v_a e v_b mencionados no lema (3.15) e expressos no referencial $R[v_a]$.

Demonstração: Tome v_a um vetor de comprimento mínimo em Γ e considere o referencial $R[v_a]$. Pelo lema 3.13 existe $z = (z_1, z_2)_{v_a}$ tal que $\Gamma = \mathbb{Z}v_a + \mathbb{Z}z$. Pode-se

3 Autoestrutura dos Toros Planos

considerar $z_2 \geq 0$ (senão troca-se z por $-z$). Além disso $z_1 \in [na - a/2, na + a/2]$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Logo o vetor $z - nv_a$ está em Γ e é da forma $(x_0, z_2)_{v_a}$ com $x_0 \in [-a/2, a/2]$. O vetor $z - nv_a$ também forma base junto com v_a , pois satisfazem $v_a = 1v_a + 0(z - nv_a)$ e $z = 1(z - nv_a) + n(v_a)$, ou seja é possível expressar os vetores da base $\{v_a, z\}$ como combinações inteiras dos vetores $\{v_a, (z - nv_a)\}$. Se $x_0 \in [0, a/2]$, toma-se $v_b = z - nv_a$ e está demonstrado. Suponha que $x_0 \in [-a/2, 0]$, então considera-se a base $\{(-v_a), (z - nv_a)\}$ e o referencial $R[-v_a]$. Daí basta tomar $v'_a = -v_a$ e $v'_b = v_b = z - nv_a$ e então $\Gamma = \mathbb{Z}v'_a + \mathbb{Z}v'_b$ satisfaz as condições do lema. \square

Corolário 3.16 Cada reticulado $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ é isométrico a um reticulado expresso na forma $\Gamma' = \mathbb{Z}(a, 0) + \mathbb{Z}(b_1, b_2)$ onde a é o comprimento do menor vetor de Γ , $b_1 \in [0, a/2]$ e $b_2 > 0$. Em particular cada toro plano está associado a um reticulado cujo dual é isométrico a um reticulado da forma acima.

Demonstração: Expresse $\Gamma = \mathbb{Z}v_a + \mathbb{Z}v_b$ como no lema anterior. Daí $|v_a| = a$. Basta então considerar a isometria de rotação que leva v_a em $(a, 0)$ (pode ser vista como rotação do referencial $R[v_a]$). Tal rotação levará v_b a um vetor com coordenada do eixo x em $[0, a/2]$. Caso a coordenada do eixo y deste vetor seja negativa basta fazer uma reflexão no eixo x (outra possibilidade é escolher o outro referencial da forma $R[v_a]$ já que ele possuía duas possibilidades que alternavam o sinal da coordenada y , conforme já foi observado anteriormente). \square

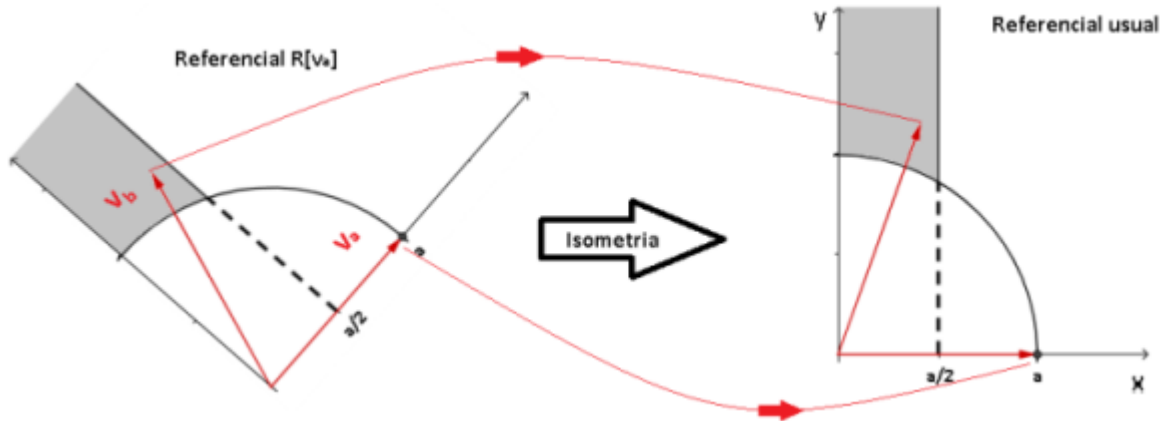


Figura 3.2: ilustração do corolário (3.16)

Lema 3.17 *Sejam Γ e Γ' dois reticulados do \mathbb{R}^2 tais que $\text{Spec}(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_\Gamma) = \text{Spec}(\mathbb{R}^2/\Gamma', g_{\Gamma'})$ e $v_a = (a, 0) \in \Gamma^* \cap (\Gamma')^*$ satisfaz $a = |v_a| = \sqrt{\lambda_0}/(2\pi)$, com $\lambda_0 > 0$ o menor autovalor não nulo do espectro. Suponha ainda que $\Gamma^* = \mathbb{Z}v_a + \mathbb{Z}v_b$ e $(\Gamma')^* = \mathbb{Z}v_a + \mathbb{Z}v'_b$, com $v_b = (b_1, b_2)$ e $v'_b = (b'_1, b'_2)$ satisfazendo $b_1, b'_1 \in [0, a/2]$ e $b_2, b'_2 > 0$. Nestas condições, obtém-se $v_b = v'_b$ e $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_\Gamma) = (\mathbb{R}^2/\Gamma', g_{\Gamma'})$.*

Demonstração:

Note que para $x \in \Gamma^*$, tem-se $|x| = \sqrt{\lambda_j}/(2\pi)$, para algum autovalor λ_j , assim v_a é um vetor de comprimento mínimo de Γ^* . Analogamente v_a é um vetor de comprimento mínimo de $(\Gamma')^*$.

Seja $b = |v_b|$ e $b' = |v'_b|$. Não é difícil verificar que v_b é o menor vetor linearmente independente com relação a v_a em Γ^* . De fato, na região $[-a, a] \times [-b, b]$ os únicos vetores que são linearmente independentes com relação a v_a são $\Gamma^* \pm v_b$ e $\pm(v_b - v_a)$ e vale $|\pm(v_b - v_a)|^2 = b^2 + a^2 - 2b_1a > b^2 + a^2 - 2(a/2)a = b^2 = |\pm v_b|^2$.

Observe também que os menores vetores de Γ^* possuem tamanhos ordenados por $0 < a < (2a) < \dots < (ma) \leq b \leq |v_b - v_a| \leq |v_b + v_a|$ para algum inteiro positivo m . Tamanhos esses biunivocamente associados aos autovalores, pois eles tem a forma $\lambda = 4\pi^2|x|$ para $x \in \Gamma^*$.

Não pode ocorrer $b < b'$, pois dentre $b \leq |v_b - v_a| \leq |v_b + v_a|$ (tamanhos vizinhos), caso ocorresse $b < b'$, haveria ao menos um deles que não estaria associado a nenhum autovalor de $\text{Spec}(\mathbb{R}^2/\Gamma', g_{\Gamma'})$. Da mesma forma, $b < b'$ não ocorre e daí $|v_b| = |v'_b|$.

As propriedades a seguir em Γ^* e v_b também valerão de forma totalmente análoga para $(\Gamma')^*$ e v'_b .

Propriedade 1: $0 \leq \langle v_a, v_b \rangle \leq a^2/2$

De fato, $0 \leq \langle v_a, v_b \rangle = ab \cos \theta$ com $\theta \in [0, \pi/2]$ pois v_a e v_b estão no mesmo quadrante. Além disso $b \cos \theta$ é o tamanho da projeção do vetor v_b sobre o eixo x , logo $b \cos \theta \leq a/2$ e daí segue a segunda desigualdade.

Propriedade 2: $b^2 \leq |v_b - v_a|^2 \leq a^2 + b^2$

Como $\langle v_a, v_b \rangle = \frac{1}{2}(|v_a|^2 + |v_b|^2 - |v_a - v_b|^2)$ então pela propriedade anterior obtém-se $0 \leq \frac{1}{2}(|v_a|^2 + |v_b|^2 - |v_a - v_b|^2) \leq \frac{a^2}{2}$. Daí $-a^2 \leq b^2 - |v_a - v_b|^2 \leq 0$. Somando $-b^2$ a todos os membros e posteriormente multiplicando as desigualdades por -1 , chega-se ao resultado.

Além de $\pm(v_b - v_a)$, podem haver outros $x = \alpha v_a + \beta v_b$ no reticulado Γ^* que satisfaçam a propriedade 2. Pergunta-se: quais os x desta forma tais que $b^2 \leq |x|^2 \leq a^2 + b^2$?

Sabe-se que $\pm(v_b - v_a)$ e $\pm v_b$ são as respostas imediatas. Será verificado se existem

3 Autoestrutura dos Toros Planos

outras. Note que a estimativa $b^2 \leq |x|^2 \leq a^2 + b^2$ é bem restrita, daí pela ordenação dos menores autovalores feita no início do problema e pelo fato dos vetores do reticulado serem sempre combinações inteiras (ou seja os tamanhos dos vetores dão saltos relativamente grandes) então $(v_a + v_b)$ é a maior combinação inteira que pode satisfazer a tal estimativa. Assim as soluções estarão confinadas em $\{\pm v_b, \pm(v_b - v_a), \pm(v_b + v_a)\}$, vetores associados a autovalores vizinhos na ordenação do espectro. Pode-se então descartar quaisquer outras possibilidades.

Em particular, deseja-se que $|x|^2 = |\alpha v_a + \beta v_b| \leq a^2 + b^2$.

Como $|\alpha v_a + \beta v_b| = \alpha^2 a^2 + 2\alpha\beta \langle v_a, v_b \rangle + \beta^2 b^2$, chega-se em:

$$p_{\alpha,\beta} := \alpha^2 a^2 + 2\alpha\beta \langle v_a, v_b \rangle + \beta^2 b^2 - a^2 - b^2 \leq 0 \quad (3.8)$$

Para β fixo, o discriminante da equação de segundo grau $p_{\alpha,\beta} = 0$ em α , denotado por Δ_β , satisfaz $\Delta_\beta \leq \frac{a^2 b^2 (8 - 3\beta^2)}{4}$. Assim, para todo β inteiro tal que $|\beta| \geq 2$, tem-se $\beta^2 > \frac{8}{3}$ e, portanto, $\Delta_\beta < 0$. Neste caso, o polinômio $p_{\alpha,\beta}$ atinge um valor maior que zero em seu ponto de mínimo, contradizendo a desigualdade (3.8).

Daí só sobra que $\beta \in \{1, -1, 0\}$. Pode-se descartar $\beta = 0$, pois nesse caso teria-se x múltiplo de v_a , o qual é descartado. Tanto x quanto $-x$ servirão de solução, então pode-se considerar sem perda de generalidade $\beta = 1$ e fazer o valor de α variar, o qual deve ser não nulo, já que $x = v_b$ já era solução.

Com isto, $p_{\alpha,1} = \alpha^2 a^2 + 2\alpha \langle v_a, v_b \rangle - a^2 \leq 0$, ou seja, $\alpha^2 a^2 - a^2 \leq -2\alpha \langle v_a, v_b \rangle$

Caso 1: $\alpha < 0$

Tem-se $\alpha^2 a^2 - a^2 \leq -2\alpha \langle v_a, v_b \rangle \leq -2\alpha \frac{a^2}{2}$, o que implica $a^2(\alpha^2 - 1 + \alpha) \leq 0$ e essa desigualdade só tem solução para $\alpha \in \{0, -1\}$. Como $\alpha < 0$ só sobra $\alpha = -1$, daí $x = -v_a + v_b$, o qual já era solução.

Caso 2: $\alpha \geq 1$

Daí $\alpha^2 a^2 - a^2 \leq -2\alpha \langle v_a, v_b \rangle \leq 0$, pois $\langle v_a, v_b \rangle \geq 0$. Isto implica $\alpha^2 a^2 - a^2 \leq 0$ a qual, neste caso, só é verdade para $\alpha = 1$. Com isto $\alpha^2 a^2 - a^2 = 0 \leq -2\alpha \langle v_a, v_b \rangle \leq 0$, concluindo v_a e v_b ortogonais. Logo $|v_a - v_b| = |v_a + v_b|$.

Conclusão: a inequação $b^2 \leq |x|^2 \leq a^2 + b^2$, ou seja, $b^2 \leq \frac{\lambda}{4\pi^2} \leq a^2 + b^2$, onde λ é o autovalor correspondente a x , só tem solução para um dos casos: (i) quando $x = \pm(v_b - v_a)$; (ii) quando $x = \pm v_b$; (iii) quando $x = \pm(v_b + v_a)$ com v_a e v_b ortogonais. Analogamente para v'_b no reticulado $(\Gamma')^*$.

Assim o vetor $(v'_b - v_a)$ (ou então o vetor v'_b) é igual a uma das soluções x mencionadas em (i), (ii) ou (iii).

3 Autoestrutura dos Toros Planos

(i) Suponha que $v'_b - v_a = \pm(v_b - v_a)$. Então $v'_b = v_b$ ou $v'_b + v_b = 2v_a(2a, 0)$ (este último não ocorre, pois violaria a imposição $b_2, b'_2 > 0$). Também não ocorre $v'_b = \pm(v_b - v_a)$ visto que violaria $0 \leq b_1, b'_1 \leq a/2$.

(ii) Pelo mesmo motivo acima $v'_b - v_a = \pm v_b$ não ocorre. Suponha agora $v'_b = \pm v_b$, esta igualdade só vale para $v'_b = v_b$ visto que $b_2, b'_2 > 0$.

(iii) Suponha $v'_b - v_a = \pm(v_a + v_b)$ com v_a e v_b ortogonais, ou seja, $v_b = (0, b_2)$. Então $v'_b - v_b = 2v_a = (2a, 0)$ (contradição pois isso leva a $b'_1 = 2a$ violando $0 < b'_1 < a/2$) ou $v'_b = -v_b$ (isso viola $b_2, b'_2 > 0$). De maneira análoga ao que já foi feito em (i) e (ii) também não ocorre $v'_b = \pm(v_b + v_a)$.

Assim, quaisquer soluções levam a $v_b = v'_b$. □

Agora já é possível enunciar o último resultado central desta parte o qual afirma que, em dimensão 2, toros planos distintos provenientes de um mesmo espectro são na verdade o mesmo a menos de isometria.

Proposição 3.18 *Se $\text{Spec}(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_\Gamma) = \text{Spec}(\mathbb{R}^2/\Gamma', g_{\Gamma'})$, então $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_\Gamma)$ e $(\mathbb{R}^2/\Gamma', g_{\Gamma'})$ são isométricos.*

Demonstração: O reticulado dual Γ^* é isométrico a um reticulado Γ_1 como no corolário (3.16). Daí pelo lema (3.12), tem-se que Γ_1^* e $(\Gamma^*)^* = \Gamma$ são isométricos, bem como os toros planos $T_1 = \mathbb{R}^2/\Gamma_1^*$ e \mathbb{R}^2/Γ gerados por eles.

Analogamente existe Γ_2 isométrico $(\Gamma')^*$ como no corolário (3.16), com $T_2 = \mathbb{R}^2/\Gamma_2^*$ e \mathbb{R}^2/Γ' sendo toros planos isométricos.

Basta então provar que T_1 e T_2 são isométricos.

De fato, como T_1 e T_2 possuem mesmo espectro, com Γ_1 e Γ_2 sendo os reticulados duais associados a estes toros obedecendo ao formato do corolário (3.16), então T_1 e T_2 estão nas condições do lema (3.17). Logo $T_1 = T_2$. □

4.1 Espectro do triângulo equilátero vs. espectro do toro plano

Embora os problemas no triângulo equilátero e nos toros planos tenham sido tratados de forma separada, será visto que para certo toro plano, os autovalores tenham muita forma muito similar (é possível então que haja uma relação mais direta, contudo a análise a seguir ficará restrita apenas ao formato dos autovalores).

Se $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ é um reticulado do \mathbb{R}^2 , então os pontos de Γ determinam cópias do paralelogramo obtido pelos vetores da base e_1 e e_2 . Em outras palavras, dado $x \in \Gamma$, os pontos $x, x + e_1, x + e_2$ e $x + e_1 + e_2$ em Γ determinam a região de um paralelogramo congruente ao que é formado a partir dos vetores e_1 e e_2 .

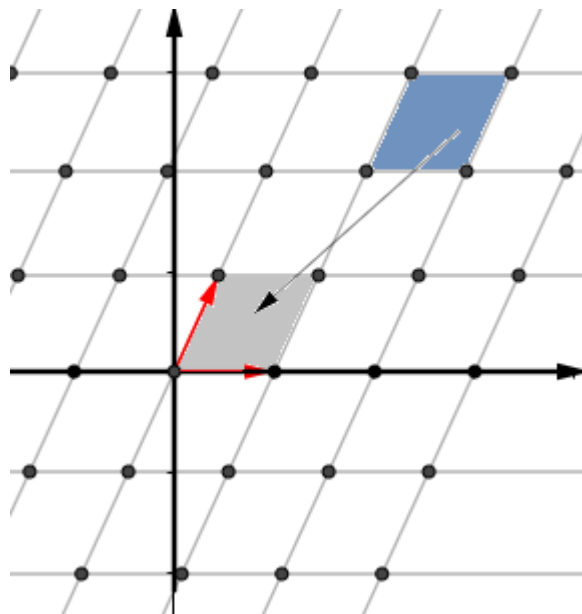


Figura 4.1: ilustração dos paralelogramos delimitados por pontos do reticulado Γ

Quando é construído o quociente $T = \mathbb{R}^2/\Gamma$, cada região delimitada por um desses paralelogramos em \mathbb{R}^2 forma um conjunto contendo exatamente um representante

4 Relação entre os Espectros

dos elementos de T , desde que exclua o lado superior e o lado à direita do paralelogramo por já estarem identificados com os lados inferior e à esquerda (analogamente pode-se optar em excluir os lados inferior e à esquerda e ficar com os lados superior e à direita). Assim, pode-se enxergar o quociente T como uma construção que identifica todos esses paralelogramos como sendo um único (que pode ser por exemplo o formado pelos vetores da base). É justamente esta ideia que está representada na figura 4.1 .

Com isto em mente, o reticulado natural a se tomar para relacioná-lo ao triângulo equilátero D , do início do trabalho, é fazendo $e_1 = (h, 0)$ e $e_2 = (\frac{h}{2}, \frac{\sqrt{3}h}{2})$, pois os pontos de chegada de e_1 e e_2 determinam, junto à origem, os vértices de D . Assim, neste reticulado, a região cinza da figura 4.1 passa a ser um paralelogramo que é composto de dois triângulos equiláteros refletidos pela diagonal menor.

Impondo a condição de bordo do problema original do triângulo equilátero (Dirichlet ou Neumann) sobre os lados e a diagonal menor neste paralelogramo, continua-se com o problema original, porém agora com dois triângulos de tal modo a valer as propriedades de simetria e reflexão das autofunções.

Observe também que estas restrições sobre o toro plano T não seriam condições de bordo, mas sim imposições a mais ao problema, o que não mudaria a forma dos autovalores λ que foram obtidos no espectro.

Com todas estas considerações, é natural de se esperar que os autovalores $k_{m,n}^2$ nos problemas do triângulo equilátero tenham ligação com os autovalores λ obtidos a partir de T , com a escolha de e_1 e e_2 feita anteriormente.

Para verificar isto, é necessário conhecer o reticulado dual $\Gamma^* = \mathbb{Z}e_1^* + \mathbb{Z}e_2^*$. Conforme visto na demonstração da proposição 3.9, para determinar e_1^* e e_2^* basta encontrar a base dual de $\{e_1, e_2\}$.

Fazendo $f_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{-1}{\sqrt{3}h} \end{bmatrix}$ e $f_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}h} \end{bmatrix}$ os funcionais lineares expressos como matriz linha na base canônica, verifica-se facilmente que $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Logo $\{f_1, f_2\}$ é a base dual de $\{e_1, e_2\}$. Com isso, tem-se $e_1^* = (\frac{1}{h}, \frac{-1}{\sqrt{3}h})$ e $e_2^* = (0, \frac{2}{\sqrt{3}h})$.

Assim um elemento x arbitrário do reticulado Γ^* está biunivocamente associado a um par de inteiros (m, n) , sendo da forma:

$$x = x_{m,n} = me_1^* + ne_2^* = \frac{1}{h} \left(m, \frac{-m + 2n}{\sqrt{3}} \right) \quad (4.1)$$

Daí o autovalor $\lambda^{(m,n)}$ associado a $x_{m,n}$ no espectro de T satisfaz:

$$\lambda^{(m,n)} = 4\pi^2 |x_{m,n}|^2 = \frac{16\pi^2}{3h^2} (m^2 + n^2 - mn) \quad (4.2)$$

4 Relação entre os Espectros

Como o raio interno r do triângulo equilátero D é dado pela relação $h = 2\sqrt{3}r$, então a equação é reescrita por:

$$\lambda^{(m,n)} = \frac{4}{9} \left(\frac{\pi}{r} \right)^2 (m^2 + n^2 - mn) \quad (4.3)$$

Fazendo a mudança de variável em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $(m', n') = (2m + n, m - n)$ e definindo $\lambda_{m,n} := \lambda^{(m', n')} = \lambda^{(2m+n, m-n)}$ (obtendo assim um rearranjo dos autovalores), chega-se a:

$$\lambda_{m,n} = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{r} \right)^2 (m^2 + n^2 + mn) \quad (4.4)$$

Lembrete: os autovalores nos problemas do triângulo equilátero eram dados por:

$$k_{m,n}^2 = \frac{4}{27} \left[\frac{\pi}{r} \right]^2 (m^2 + mn + n^2) \quad (4.5)$$

Daí de (4.4) e (4.5), conclui-se:

$$\lambda_{m,n} = 9k_{m,n}^2 \quad (4.6)$$

Assim tanto no toro plano escolhido T quanto no triângulo equilátero, os autovalores variam conforme o termo $(m^2 + mn + n^2)$ varia com os pares de inteiros (m, n) .

Conclusão: (4.6) determina uma relação entre os espectros. Em outras palavras, dado um autovalor $k_{m,n}^2$ em D , conhece-se então um autovalor em T . Reciprocamente, dado um autovalor $\lambda_{m,n}$ em T com as devidas restrições a (m, n) gerada pelas imposições sobre D , conhece-se então um autovalor em D .

Observação 4.1 *As considerações realizadas no início podem fazer parecer que se deveria chegar à relação $\lambda_{m,n} = k_{m,n}^2$ ao invés de $\lambda_{m,n} = 9k_{m,n}^2$. Contudo, os problemas foram tratados de forma independente e possuem distinções que passam por algumas técnicas. Por exemplo, os problemas em D foram considerados sobre o corpo dos reais enquanto em T usou-se o corpo dos complexos. Além disso, embora T possa ser identificada de maneira natural a partir de regiões do plano, T é ainda assim uma variedade riemanniana obtida por meio de um quociente e que pode ser parametrizada de diversas formas. Outro fator que já foi observado antes é o fato do operador laplaciano também possuir suas técnicas em variedades riemannianas. Por fim, o espectro de T não tem condições de bordo, como em D . Todos esses fatores, entre outros, ajudam a perceber que as construções envolvidas em T e D não se relacionam de maneira tão óbvia e imediata quanto se possa parecer.*

Estudar o espectro proveniente do operador laplaciano sobre determinadas estruturas pode ter suas particularidades.

Mesmo para superfícies mais simples como um triângulo equilátero no plano, pode ser necessário imposições como as condições de bordo para poder empregar os métodos de solução, bem como a técnica de se definir um sistema de coordenadas alternativo que está intimamente atrelado as propriedades de simetria do objeto. Assim, as técnicas utilizadas podem eventualmente ser úteis para estudar outras superfícies com certos eixos de simetria e suas condições iniciais.

Além disso, o estudo dos toros planos serviu para ver que as noções de diferenciabilidade e equações diferenciais (em particular as que envolvem o operador laplaciano) podem ser amplas e não tão imediatas. Como aplicação, foi constatado que o estudo do espectro a partir do operador laplaciano pode fornecer informações primordiais do objeto tratado, como foi o caso dos toros planos bidimensionais.

Finalmente foi visto que, mesmo estudando uma equação diferencial como a de autovalores do laplaciano sobre objetos distintos, é possível relacioná-los e aprimorar o conhecimento dos objetos envolvidos. Isto pode servir de estímulo a novos métodos de resolução de equações diferenciais, levando certos problemas para outros ambientes e tentando estabelecer uma relação entre eles.

6.1 Variedades Riemannianas

As construções a seguir valerão empregando os termos *diferenciável* e *difeomorfismo* tanto no sentido de classe C^∞ quanto para o sentido de classe C^k para um inteiro k específico e fixado.

Definição 6.1 (variedade diferenciável) Dizemos que (M^n, \mathcal{A}) é uma variedade diferenciável de dimensão n (ou simplesmente M é variedade diferenciável de dimensão n) se o conjunto $\mathcal{A} = \{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M; U_\alpha \text{ é aberto em } \mathbb{R}^n\}$ satisfizer as seguintes condições:

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
2. Sempre que houverem elementos x_α e x_β em \mathcal{A} que satisfaçam $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, então $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ é um difeomorfismo diferenciável sobre o maior aberto (não vazio) em que essa função possa ser definida junto à sua inversa. Além disso, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta))$ e $x_\beta^{-1}(x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta))$ são abertos em \mathbb{R}^n .
3. \mathcal{A} contém todas as aplicações da forma x_α que satisfaçam (1) e (2) (ideia de maximalidade).
4. M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.

As aplicações x_α são ditas parametrizações ou sistemas de coordenadas (suas inversas são ditas cartas).

A condição (3) serve apenas para evitar alguns elementos técnicos. Além disso, se exigidas apenas (1), (2) e (4), diz-se que (M, \mathcal{A}) é uma estrutura diferenciável.

Um exemplo trivial de variedade diferenciável é o \mathbb{R}^n tomando como estrutura diferenciável o conjunto $\mathcal{A} = \{id\}$ formado apenas pela identidade em \mathbb{R}^n .

Definição 6.2 (aplicações diferenciáveis) Seja $f : M_1^n \rightarrow M_2^m$ aplicação entre variedades diferenciáveis. Diz-se que f é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $f(p)$, existir uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que

6 Apêndice

$f(x(U)) \subset y(V)$ (aqui é importante considerar a condição (3) da definição) e a aplicação $y^{-1} \circ f \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Diz-se que f é diferenciável num aberto se for diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Obs.: a escolha das parametrizações pode ser arbitrária desde que satisfaça as propriedades acima (a construção de uma variedade diferenciável garante isto). A aplicação $y^{-1} \circ f \circ x$ é dita expressão de f nas parametrizações x e y .

O próximo passo será definir as noções de vetores tangentes e espaço tangente.

Definição 6.3 (curva diferenciável) Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$ é chamada curva diferenciável.

Definição 6.4 (vetor tangente) Seja uma curva diferenciável α como na definição acima satisfazendo $\alpha(0) = p \in M$ e seja $D = \{f : M^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é diferenciável em } p\}$. Um vetor tangente em p (e também tangente à α em $t = 0$) é a aplicação $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\alpha'(0).f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}$$

Definição 6.5 (espaço tangente de M em p) É o conjunto $T_p M$ formado por todos os vetores tangentes a p com respeito a variedade M .

Seja $x : U \rightarrow M$ parametrização em p e $q = (x_1, \dots, x_n) \in U$ tal que $x(q) \in M$. Para $f \in D$ e uma curva α , usará-se as seguintes identificações:

1. $f(q) = f(x_1, \dots, x_n) := f \circ x(q)$ é dita função f na parametrização x .
2. $x^{-1} \circ \alpha(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))$ função de \mathbb{R} em \mathbb{R}^n é a curva α expressa através da parametrização x .

Tem-se:

$$f \circ \alpha(t) = f \circ x \circ x^{-1} \circ \alpha(t) = f \circ x(x^{-1} \circ \alpha(t)) = f \circ x(x_1(t), \dots, x_n(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Obs.: f originalmente é uma aplicação definida em M . Quando se denota $f(q)$ com $q \in U \subset \mathbb{R}^n$, essencialmente se considera outra função, enxergada nas coordenadas da parametrização de x , no caso. Além disso $f \circ \alpha$ pode ser vista como

6 Apêndice

a restrição de f à curva α . Assim esta composta assume a forma $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Desta identificação, é possível utilizar propriedades do cálculo em variáveis reais.

Com as mesmas observações obtém-se a expressão de $\alpha'(0) \cdot f$ na parametrização x :

$$\alpha'(0) \cdot f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{df(x_1(t), \dots, x_n(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

Agora, trabalha-se com $\left. \frac{df(x_1(t), \dots, x_n(t))}{dt} \right|_{t=0}$ como é feito com variáveis reais, daí:

$$\left. \frac{df(x_1(t), \dots, x_n(t))}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f$$

Assim o vetor tangente $\alpha'(0)$ é representado mediante a parametrização x por:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$$

Das contas acima nota-se também que o elemento $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ é o vetor tangente da curva $t \mapsto x(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ (t na i -ésima posição). Assim algumas consequências são imediatas:

1. $T_p M$ é espaço vetorial com operações usuais de funções sobre o corpo dos reais.
2. $\dim T_p M = n$ e a parametrização x em p determina uma base para $T_p M$ dada por $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\}_{i=1}^n$.
3. A estrutura de $T_p M$ não muda mesmo se considerar outra parametrização em p . Apenas mudará para uma outra base sobre o mesmo espaço.

Definição 6.6 (Diferencial) *Seja $f : M_1^n \rightarrow M_2^m$ aplicação diferenciável. Para cada par $(p; v) \in M_1 \times T_p M_1$ escolha uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ tal que $(\alpha(0); \alpha'(0)) = (p; v)$ e defina a curva sobre M_2 , $\beta := f \circ \alpha$. Defina também a aplicação $df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ por $df_p \cdot (v) = \beta'(0)$. Tal aplicação é dita diferencial de f em p .*

Proposição 6.7 *df_p está bem definida mesmo se mudarmos a curva α contanto que mantenha as condições acima e é uma aplicação linear.*

Demonstração: Sejam x e y parametrizações em p e $f(p)$ respectivamente. Pode-se expressar f nestas parametrizações sob a forma: $y^{-1} \circ f \circ x(q) = (y_1(q), \dots, y_m(q))$ com $q = (x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } x$. A expressão de α em x é da forma: $x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Assim:

6 Apêndice

$$\begin{aligned} y^{-1} \circ \beta(t) &= y^{-1} \circ f \circ \alpha(t) \\ &= y^{-1} \circ f \circ x(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &= (y_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, y_m(x_1(t), \dots, x_n(t))) \end{aligned}$$

Defina $q(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $z_j(t) := y_j \circ q(t)$, $j = 1, \dots, m$. Assim chega-se à forma $y^{-1} \circ \beta(t) = (z_1(t), \dots, z_m(t))$.

Daí pelas construções que vistas nos espaços tangentes, pode-se expressar $\beta'(0)$ na base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_0 \right\}_{j=1}^m$ por $\beta'(0) = (z'_1(0), \dots, z'_m(0))$.

Por outro lado, $z'_i(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \cdot x'_j(0)$. Daí:

$$\beta'(0) = df_p(v) = df_p(\alpha'(0)) = df_p(x'_1(0), \dots, x'_n(0)) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \cdot x'_j(0), \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \cdot x'_j(0) \right)$$

Note que $\beta'(0) = [A_{ij}][v]$, sendo que $A_{ij} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$ determina uma matriz $n \times m$ e $[v]$ é o vetor v expresso como vetor coluna na base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\}_{i=1}^n$.

Esta igualdade mostra que $\beta'(0)$ independe da curva α . Além disso, fazendo A o operador da matriz $[A_{ij}]$, tem-se $df_p(v) = A \cdot v$, ou seja, $df_p \equiv A$, o que prova a linearidade. A é dita matriz de df_p nas parametrizações x e y (em suas respectivas bases associadas). □

Definição 6.8 (difeomorfismo) É uma aplicação entre variedades $f : M_1^n \longrightarrow M_2^m$ inversível tais que f e f^{-1} são diferenciáveis.

Definição 6.9 (difeomorfismo local) $f : M_1^n \longrightarrow M_2^m$ é difeomorfismo local em $p \in M_1$ se existirem vizinhanças U de p e V de $f(p)$ tais que $f : U \longrightarrow V$ seja um difeomorfismo.

Obs.: Difeomorfismo é uma espécie de equivalência entre variedades diferenciáveis. Além disso, se f é difeomorfismo então df_p é isomorfismo linear. Neste caso, as variedades tem mesma dimensão.

Definição 6.10 (Métrica Riemanniana) Seja M^n uma variedade diferenciável de Hausdorff e com base enumerável. Uma métrica riemanniana g associa $p \in M$ a um produto interno $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (quando não há confusão, pode-se omitir o índice inferior) sobre $T_p M$ sendo que $g_{ij}(q) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_p$ é uma função diferenciável, onde $q = (x_1, \dots, x_n) = x^{-1}(p)$ na parametrização x e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ são os vetores que formam uma

base no espaço tangente T_pM . As funções g_{ij} formam a expressão da métrica riemanniana g na parametrização x .

Definição 6.11 (Variedade Riemanniana) É uma variedade diferenciável M , Hausdorff, com base enumerável e que admite uma métrica riemanniana g . Notação: $(M; g)$.

Obs.: Daqui em diante qualquer variedade M, N ou M_i que forem sendo mencionadas serão riemannianas.

Definição 6.12 (isometria) É um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ entre variedades riemannianas tal que: $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $\forall p \in M; \forall u, v \in T_pM$. Neste caso, M e N são ditas isométricas.

Se as condições acima forem satisfeitas apenas para a aplicação $f : U \rightarrow f(U)$, onde U é vizinhança de p , diz-se que f é isometria local em p . Se todo ponto $p \in M$ admitir isometria local, então M e N são ditas localmente isométricas.

Obs.: Isometria é uma noção natural de equivalência entre variedades riemannianas.

Exemplo: Métrica produto.

O produto de variedades riemannianas $M_1 \times M_2$ é também uma variedade riemanniana. Sejam $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$, as projeções naturais e defina:

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1.u, d\pi_1.v \rangle_p + \langle d\pi_2.u, d\pi_2.v \rangle_q$$

Tal relação determina uma estrutura riemanniana para o produto $M_1 \times M_2$.

Caso particular: o toro $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$. S^1 tem métrica induzida por \mathbb{R}^2 . Daí, montando a métrica produto pelo processo acima tem-se que T^n é variedade riemanniana.

Definição 6.13 (ação de um grupo) Um grupo G age em M^n se existir uma aplicação $h : G \times M \rightarrow M$ tal que:

(i) $\forall g \in G, h_g : M \rightarrow M, h_g(p) := h(g; p)$ é uma aplicação que, assim definida, forma um difeomorfismo.

(ii) Se $e \in G$ é o elemento neutro, então $h_e = id$.

(iii) $\forall g, j \in G, h_{gj} = h_g \circ h_j$.

Obs: neste caso denota-se a ação, fazendo $h_g(p) = h(g;p) = gp$. Assim (iii) é vista como uma espécie de associatividade: $(gj)p = g(jp)$.

Denote também por $g(U)$ a imagem $h_g(U)$ de qualquer subconjunto $U \subset M$.

Definição 6.14 *É dito que G age livremente sobre M (ou que a ação é livre) se para todo $g \in G \setminus \{e\}$ valer que $gp \neq p$ (ou seja a ação do grupo via elementos diferentes do neutro não tem ponto fixo).*

Definição 6.15 *É dito que G age isometricamente sobre M (ou que a ação é isométrica) se a ação de cada elemento $g \in G$ for uma isometria (ou seja $h_g = g(\cdot) : M \rightarrow M$ é isometria).*

Definição 6.16 (ação propriamente descontínua de um grupo) *É uma ação tal que $\forall p \in M, \exists U \subset M$ vizinhança de p satisfazendo $U \cap g(U) = \emptyset, \forall g \neq e$.*

Suponha que G age sobre M e defina a relação $p_1 \sim p_2$ se, e só se, $p_1 = gp_2$ para algum $g \in G$; então \sim é uma relação de equivalência na variedade diferenciável M . Se, além disto, a ação for propriamente descontínua, M/\sim possuirá uma estrutura diferenciável de modo que a projeção $\pi : M \rightarrow M/\sim, \pi(p) = [p] = Gp = \{gp \mid g \in G\}$ (classe de equivalência de p) seja um difeomorfismo local. Neste caso, é comum usar a notação $M/\sim = M/G$.

Para cada $p \in M$ deve existir uma vizinhança $U \subset M$ tal que $g(U) \cap U = \emptyset, \forall g \neq e$. Pode-se tomar uma parametrização $x : V \rightarrow x(V) \subset U$ em p . Tem-se $\pi|_U$ injetiva e, portanto, $y = \pi \circ x : V \rightarrow M/G$ injetiva. Por tal construção, tem-se que as funções dessa forma (como y) compõem uma família \mathcal{A} cujas imagens das aplicações cobrem M/G e determina uma estrutura diferenciável.

Definição 6.17 (métrica quociente) *Seja Γ um grupo discreto agindo livremente, isometricamente e de forma propriamente descontínua sobre uma variedade riemanniana (M, g) . Considere a aplicação de projeção $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ que leva cada ponto p em sua classe de equivalência $[p] = Gp$ mediante a ação de Γ . Defina a aplicação g/Γ por:*

$$(g/\Gamma)_{[p]}(u, v) = g_p((d\pi_p)^{-1}(u), (d\pi_p)^{-1}(v)); \forall [p] \in M/\Gamma, \forall u, v \in T_{[p]}M$$

g/Γ é dita métrica quociente de M/Γ .

É preciso verificar alguns itens a fim de $(M/\Gamma, g/\Gamma)$ ser de fato uma variedade riemanniana. A aplicação $[p] \mapsto (g/\Gamma)_{[p]}(\cdot, \cdot)$ mapeia cada ponto $[p] \in M/\Gamma$ no produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{[p]} = (g/\Gamma)_{[p]}(\cdot, \cdot)$ sobre o espaço $T_{[p]}M$. O fato de ser um produto interno provém de g , bem como a diferenciabilidade das aplicações $(g/\Gamma)_{ij}$ exigida na

definição de métrica riemanniana, juntamente ao fato de π ser um difeomorfismo local. Resta então verificar que g/Γ está bem definida.

De fato, seja $p' \in [p]$ um representante distinto de p , ou seja, $p \neq p'$ com $[p] = [p']$. Como a ação é propriamente descontínua, livre e isométrica existe um único $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma p = p'$, cuja ação é um difeomorfismo. Além disso, como a imagem da aplicação projeção π só depende da classe de equivalência, então $\pi \circ \gamma = \pi$, pois $p \in [p] \Leftrightarrow \gamma p \in [p]$. Logo, $d\pi_p = d\pi_{\gamma p} d\gamma_p$, ou seja, $(d\pi_p)^{-1} = (d\gamma_p)^{-1} (d\pi_{p'})^{-1}$. Assim:

$$\begin{aligned} (g/\Gamma)_{[p]}(u, v) &= g_p((d\pi_p)^{-1}(u), (d\pi_p)^{-1}(v)) \\ &= g_p((d\gamma_p)^{-1}(d\pi_{p'})^{-1}(u), (d\gamma_p)^{-1}(d\pi_{p'})^{-1}(v)) \\ &= g_{p'}((d\pi_{p'})^{-1}(u), (d\pi_{p'})^{-1}(v)) \end{aligned}$$

A última igualdade é devido a ação de γ ser isometria. Logo, a definição independe de tomar p ou p' como representantes de $[p]$, conforme desejado.

Obs.: Os toros planos estudados ao longo do texto são variedades riemannianas obtidas como quociente por meio de ações de grupos, munida da métrica quociente associada mediante construções realizadas acima. Daí a necessidade destes conceitos.

Definição 6.18 (isomorfismos musicais) *Seja (M, g) uma variedade riemanniana qualquer. Dado um vetor $v \in TM$, ou seja, v é um vetor qualquer em algum espaço tangente $T_p M$, defina a aplicação ω^b por $\omega^b(v)(\cdot) = g(v, \cdot)$. Considere agora que dado T um funcional linear em TM , ou seja, com domínio em algum espaço tangente $T_p M$, tenha-se também uma aplicação $\sharp w$ definida por $\sharp w(T) = T^\sharp$, onde T^\sharp é o único vetor tangente satisfaz que $g(w, T^\sharp) = T(w)$ para todo $w \in T_p M$. As aplicações ω^b e $\sharp \omega$ são chamadas de isomorfismos musicais em (M, g) .*

Definição 6.19 (gradiente) *Se $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ uma função real ou complexa diferenciável com domínio na variedade riemanniana n -dimensional (M, g) e com diferencial df (o qual é um funcional linear). Então o gradiente de f é definido por $grad f = df^\sharp$.*

Definição 6.20 (laplaciano) *Para uma função f como na definição acima, define-se Δf ou $div(grad f)$ por:*

$$\Delta f(p) = div(grad f)(p) = \sum_{k=1}^n \langle \nabla_{e_k(p)} df_p^\sharp, e_k(p) \rangle$$

Sendo que $\{e_k(\cdot)\}_{k=1}^n$ denota uma base ortonormal (referencial) para os espaços tangentes numa vizinhança $U \subset M$ proveniente de uma dada parametrização entorno

6 Apêndice

de p em que os elementos dessa base variem diferencialmente nesta vizinhança. A aplicação ∇ é a conexão em (M, g) , objeto comumente presente na geometria riemanniana e que pode ser consultado na referência [13].

Δ é chamado de operador de *Laplace-Beltrami* ou simplesmente *laplaciano*.

Obs.: Esta definição para o operador Δ pode variar de autor para autor. Em algumas referências, por exemplo, é comum o sinal do operador aparecer trocado. A definição acima é a que acabará coincidindo com o operador laplaciano usualmente conhecido em \mathbb{R}^n , dado por $\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

- [1] C. A. J. Arrieta, O laplaciano em variedades e isoespectralidade, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 1993 (Dissertação de Mestrado).
- [2] D. Gurarie, Symmetries and Laplacians: Introduction to Harmonic Analysis, Group Representations and Applications, Dover Publications, 2008.
- [3] M. A. M. Marrocos, A. L. Pereira, Eigenvalues of the Neumann Laplacian in symmetric regions. J. Math. Phys. 56 (2015) 111502.
- [4] J.R.Munkres, Elements of algebraic topology, Westview Press, Revised edition, 1993.
- [5] A. L. Pereira, Eigenvalues of the Laplacian on symmetric regions. NoDEA- Non-linear Differential Equations and Applications (2) (1995) 63-109.
- [6] M. A. Pinsky, Completeness of the Eigenfunctions of the Equilateral Triangle, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 16, No. 4 (1985), pp. 848-851.
- [7] M. A. Pinsky, The Eigenvalues of an Equilateral Triangle, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 11, No. 5 (1980), pp. 819-827.
- [8] D. G. Figueiredo, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, Coleção Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [9] E. L. Lima, Análise Real, Vol. 2, Coleção Matemática Universitária, 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [10] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, International Series in Pure and Applied Mathematics, 3th edition, 1976.
- [11] B. J. M. Cartin, Laplacian Eigenstructure of the equilateral triangle, Hikari Ltd, First published 2011.

Referências Bibliográficas

- [12] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, Wiley, New York, NY, 1992.
- [13] M. P. Carmo, *Geometria Riemanniana*, Coleção Projeto Euclides, 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [14] W. A. Lopes, *O teorema de Stone-Weierstrass e aplicações*, Universidade Federal de Uberlândia, 2009 (Dissertação de Mestrado).