

Superfícies de Curvatura Gaussiana Constante no \mathbb{R}^3

Antero Soares de Lima Neto



Universidade Federal do ABC

Título: Superfícies de Curvatura Gaussiana
Constante no \mathbb{R}^3

Autor: Antero Soares de Lima Neto

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva
Universidade Federal do ABC

Prof.^a Dr.^a Ana Carolina Boero
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito
Universidade Federal do ABC

Santo André, 14 de agosto de 2017.

1	Introdução	7
2	Superfícies de Rotação de Curvatura Constante	11
2.1	Superfícies de Revolução	11
2.2	Helicoides generalizados	16
2.2.1	As integrais elípticas de segundo tipo	18
2.3	Superfícies de Revolução de Curvatura Constante Positiva	18
2.4	Superfícies de Revolução de Curvatura Constante Negativa	21
2.5	Outras superfícies com $K \leq 0$ constante	25
3	Superfícies de Curvatura Constante Negativa	30
3.1	Parametrização assintótica de Chebyshev	31
3.2	Parametrizações principais de superfícies com curvatura constante negativa em \mathbb{R}^3	36
3.3	Equação Seno-Gordon	40
3.4	Parametrização de Chebyshev de uma superfície de curvatura constante negativa	41
3.4.1	A Transformada de Bianchi	44
3.5	Referencial móvel de uma superfície em \mathbb{R}^3	48
3.6	Construção de uma pseudoesfera usando a transformada de Bianchi	49
3.7	A superfície de Kuen como a transformada de Bianchi da pseudoesfera	50
3.8	A Transformada de Bäcklund	53
3.9	Construção da superfície de Dini como uma transformação de Bäcklund	56
4	Apêndice	58
4.1	Tópicos Elementares de Geometria Diferencial	58
4.2	Curvatura de uma Superfície de Revolução e Helicoides Generalizados	71
4.3	Transformação de coordenadas na equação Seno-Gordon	75
4.4	Determinação das Coordenadas de Referenciais Móveis em \mathbb{R}^3	77

Sem dúvidas algo sempre difícil de fazer, em tempos que a sociedade nos compele ao contrário. Sendo assim, dado que minha mente é rebelde, tenho de agradecer inicialmente ao meu eu lírico, este ente que habita em mim e vez por outra tenta tomar o comando e vê a vida como um poeta, depois a minha mãe, a Val, por sempre ter respeitado minhas decisões mesmo não concordando com todas elas, a Val sempre mostrou porque esse substantivo mãe é tão forte, eis aí uma das transcendências que nos faz o que somos.

Outra amostra do que sem dúvidas nos diferencia de outros seres, pude aprender na convivência com os excelentes professores que tive na minha trajetória acadêmica, especialmente agradeço Carlos Henrique Lima, Francisca Alves, Elisângela, Ramiro Lima ainda na educação básica, enquanto que nos tempos de UFABC meus agradecimentos se direcionam ao Márcio, Ana Boero, Mariana, Romarly, Roldão, Cristian, Faleiros, Fabiano e Thomas, cada um desses professores me ensinaram valiosas lições, cada um a sua maneira. Evidentemente tenho que prestar agradecimentos especiais a dois desses por sua paciência do tamanho do ordinal dos números reais para comigo, Márcio e Ana. Ao Márcio por ter aceito me orientar nesta empreitada, por sempre ter prontidão em atender as minhas incontáveis dúvidas, por ser essa pessoa tão boa de conviver e gostar de ensinar. A Ana, por desde os meus primeiros passos na vida universitária me orientar, me ensinar, ter paciência comigo, ser essa mulher mais que maravilha, porque ela é real.

A amizade sem dúvidas é uma das outras belas transcendências, tenho que agradecer pela parceria dessas pessoas que mesmo de lares diferentes e de realidades diferentes nos fazem pessoas melhores, em especial a Daiane Lima, Pally, Bia, Matheus desde os tempos antigos aos que universidade me reservou, Juliana, Agnes, Ana Paula, Nordon, Fernando, Iara, companheiros de jornada nessa vida não tão tranquila, mas que passamos momentos bons e não tão bons, vocês são muito especiais e importantes para mim.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, serão estudados exemplos e resultados da teoria das superfícies de curvatura gaussiana constante, como a parametrização de Chebyshev de uma superfície de rotação de curvatura gaussiana constante negativa.

Palavras Chaves: superfícies, curvatura gaussiana constante, superfícies rotacionais.

In this undergraduate thesis, we study examples and results of the theory of constant gaussian curvature surfaces, for example the Chebyshev parametrization on surfaces of revolution with constant negative gaussian curvature.

Keywords: Surfaces, constant gaussian curvature, rotational surfaces.

A primeira aproximação do conceito de curvatura de uma superfície S no espaço tridimensional em um ponto P de S foi expressa em termos da curvatura de curvas planas obtidas por meio da intersecção de planos normais à superfície S em P , denominada *curvatura normal*. Evidentemente, diferentes planos podem determinar diferentes curvas em S e, portanto, diferentes curvaturas dessas curvas. Dentre essas curvaturas, a maior e a menor curvatura em P são chamadas de *curvaturas principais*.

Em 1760, Euler mostrou que as curvaturas principais ocorrem em seções perpendiculares, e por meio delas podemos determinar a curvatura de uma seção qualquer obtida a partir de um plano que forma um ângulo α com um plano fixado normal à S em P .

Gauss, em seus estudos, parte da ideia de que a curvatura de uma superfície pode ser detectada intrinsecamente, isto é, pode ser mensurada inteiramente em termos da superfície (mais precisamente, em termos da primeira forma fundamental da superfície). Em 1827, ele fez uma descoberta magnífica sobre o produto das curvaturas principais, denominado de *curvatura gaussiana*. Tal curvatura pode ser definida intrinsecamente, e na realidade trata-se de um invariante geométrico da superfície; essa descoberta foi sistematizada no *Teorema Egregium de Gauss*.

Originalmente, Gauss determinou a curvatura gaussiana em um ponto P da superfície S analisando a área de uma região contida em uma vizinhança desse ponto, digamos A ; considerou A' como sendo a imagem dessa região por meio da aplicação normal de Gauss (que mapeia S em \mathbb{S}^2) e então a curvatura gaussiana é o limite da razão entre A' e A , quando A tende a zero.

Ou seja, no caso em que $K \neq 0$:

$$K(P) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}.$$

Com os resultados que foram obtidos mais tarde, pode-se demonstrar a validade da relação anterior. Para isso, deve-se considerar uma parametrização $X(u, v)$

1 Introdução

de uma vizinhança de P em S com $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$ e o campo normal $N(u, v)$ à S , de modo que,

$$A = \iint_R \|X_u \times X_v\| dudv.$$

Assim,

$$A' = \iint_R \|N_u \times N_v\| dudv,$$

em que $N_u = (N \circ X)_u$ e $N_v = (N \circ X)_v$.

Mas, $N_u \times N_v = KX_u \times X_v$. Consequentemente,

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \frac{K \|X_u \times X_v\|}{\|X_u \times X_v\|} = K.$$

Na busca de exemplos de superfícies de curvatura gaussiana constante, observamos que uma esfera de raio r tem somente círculos máximos como seções normais, de modo que, as curvaturas principais coincidem e são iguais a $1/r$ e sua curvatura gaussiana é constante, positiva e igual a $K = 1/r^2$. O plano tem somente retas como seções normais e então sua curvatura normal é identicamente nula e sua curvatura gaussiana é constante e igual a $K = 0$. Por exemplo de superfície de curvatura gaussiana constante e negativa temos a pseudoesfera, que é uma superfície de revolução obtida por meio da rotação da *tractrix*¹ em torno do eixo Ox . Essa superfície foi estudada, por exemplo, por Huygens, que obteve, dentre outros resultados, a sua área.

Desse modo, superfícies de curvatura gaussiana constante são um objeto de estudo em geometria. Nesta linha, Ferdinand Minding, ex-aluno de Gauss, estabeleceu em 1839, que todas as superfícies de mesma curvatura gaussiana constante são localmente isométricas e, em particular, as de curvatura gaussiana constante negativa $K = -\frac{1}{\lambda^2}$ podem ser isometricamente mapeadas sobre uma pseudoesfera de pseudoraio λ .

As superfícies de curvatura gaussiana constante identicamente nula são planos, cilindros, cones ou superfícies que tenham regiões isométricas com estes. Com efeito, se $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular tal que $K = 0$, então pelo menos uma das curvaturas principais é nula, pois $K = k_1 k_2$; digamos que seja k_1 . Se k_2 também for nula, temos que todos os pontos de tal superfície são planares.²

¹Curva plana γ , tal que o segmento da tangente entre o ponto de tangência e uma reta r do plano, que não encontra a curva γ é constante e igual a 1.

²Um ponto p de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito *planar* se $K(p) = 0$ e Operador de Weingarten de S em p for identicamente nulo.

1 Introdução

O outro caso, em que k_2 é não-nula (e $k_1 = 0$), ou seja, o Operador de Weingarten de S não é identicamente nulo, engloba *superfícies regradadas*, isto é, superfícies que podem ser parametrizadas por

$$X(u, v) = \gamma(u) + v\beta(u)$$

onde $\gamma(u)$ é uma curva diferenciável, chamada de *diretriz* e $\beta(u)$ é um campo vetorial ao longo de γ que não se anula em nenhum ponto. As retas $v \mapsto \gamma(u_0) + v\beta(u_0)$ são denominadas geradoras da superfície. Em [5] e [7] há uma série de resultados acerca de tais superfícies dentre os quais a curvatura gaussiana de tais superfícies é sempre não positiva. Com a hipótese adicional de que S deve ser completa, então S é um cilindro (para uma demonstração disto veja [10]).

Pelo Teorema de Hilbert e consequências deste (ver página 91 de [11]), as superfícies compactas, conexas, de curvatura gaussiana constante positiva são esferas. Neste trabalho de conclusão, nosso objetivo é estudar as superfícies rotacionais de curvatura gaussiana constante negativa e a teoria desenvolvida para as não rotacionais de curvatura negativa.

Não são encontrados muitos trabalhos sobre superfícies de curvatura gaussiana constante na literatura, todavia o tema foi estudado ao longo do século passado em trabalhos como o de E. Kaneda [8] e Ja. G. Sinai [12]. Mais recentemente, W. Cao, F. Huang & D. Wang [3] estudaram imersões isométricas de superfícies obtendo soluções para determinados sistemas de Gauss-Codazzi e N. Cui [4] caracterizou superfícies de curvatura gaussiana constante em 3-variedades de Randers.

O presente trabalho está dividido em três capítulos e um apêndice. No capítulo 1 motivamos e introduzimos os objetos de estudo, no capítulo 2 tratamos das superfícies de rotação de curvatura gaussiana constante, definimos essas superfícies e sua generalização, os helicoides generalizados, convencionamos certas parametrizações de ambos e damos alguns resultados importantes. Em seguida, detalhamos tais superfícies e caracterizamos suas parametrizações. Damos um resultado sobre os helicoides generalizados planos e finalizamos exemplificando as superfícies de Dini e Kuen.

No capítulo 3 detalhamos a teoria das superfícies de curvatura gaussiana constante, definimos parametrizações de Chebyshev e damos resultados associados a essas parametrizações, mostramos a relação de tais parametrizações com a equação Seno-Gordon e certas soluções desta equação. Apresentamos a transformada de Bianchi, detalhamos alguns referenciais móveis sobre superfícies, utilizamos tal transformada para mostrar a superfície de Kuen como transformada de uma pseu-

1 Introdução

doesfera, também construímos uma pseudoesfera. Definimos a transformada de Bäcklund e usamos para construir uma superfície de Dini.

No Apêndice mostramos uma série de resultados da geometria diferencial clássica e algumas demonstrações acerca de transformações na equação Seno-Gordon e sobre referenciais móveis.

2 SUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO DE CURVATURA CONSTANTE

As superfícies de rotação constituem uma importante classe de superfícies. Elipsoides e hiperboloides são superfícies de revolução desde que as medidas de dois dos seus eixos sejam iguais.

Começamos um estudo analítico de superfícies de revolução definindo parametrizações padrão cujas curvas coordenadas são paralelos e meridianos.

Indicamos que paralelos e meridianos são curvas principais, tangentes às direções determinadas pelas curvaturas principais.

Prosseguimos tratando de helicoides generalizados, que constituem uma classe de superfícies que englobam tanto helicoides como superfícies de revolução.

Desenvolvemos o estudo das superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante e apresentamos as integrais elípticas de Legendre.

Além da esfera, existem dois tipos de superfícies de revolução com curvatura constante positiva: num deles as imagens das superfícies lembram uma bola de futebol americano e, no outro um barril. Existem também três tipos no caso negativo, dos quais o mais famoso é o da pseudoesfera, a superfície de revolução obtida pela rotação de uma *tractrix*.

Em seguida, definimos um helicóide generalizado plano e em seguida, ilustramos as superfícies de Dini e Kuen.

2.1 Superfícies de Revolução

Uma superfície de revolução é formada girando uma curva plana em torno de uma reta em \mathbb{R}^3 . Mais precisamente,

Definição 2.1 *Sejam Π um plano em \mathbb{R}^3 , l uma reta em Π e C a imagem de curva diferenciável regular contida em Π . Quando C é rodada em \mathbb{R}^3 em volta de l , o conjunto de pontos resultante M é chamada de superfície de revolução gerada por C , que é chamada de curva perfil. A reta l é chamada de eixo de revolução de M .*

Por conveniência, escolheremos Π para ser o plano xz e l para ser o eixo z .

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

Vamos supor que \mathcal{C} possui uma parametrização $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{C}$ diferenciável e escrevemos $\alpha(t) = (\phi(t), 0, \psi(t)) \sim (\phi(t), \psi(t))$.

Definição 2.2 A parametrização $X : (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (\phi(v) \cos u, \phi(v) \sin u, \psi(v)) \quad (2.1)$$

é chamada de parametrização padrão da superfície de revolução \mathcal{M} .

A parametrização (2.1) foi definida com o ângulo u situado no intervalo aberto $(0, 2\pi)$, o que significa que a parametrização padrão deve ser combinada com uma parametrização análoga para cobrir a superfície. Usualmente assume-se que $\phi(v) > 0$ na Definição 2.2 para assegurar que a curva perfil não cruza o eixo de revolução, para evitar pontos singulares. A Figura 2.1 ilustra um conjunto de curvas de uma superfície de revolução sendo a curva perfil aquela que está no plano xz .

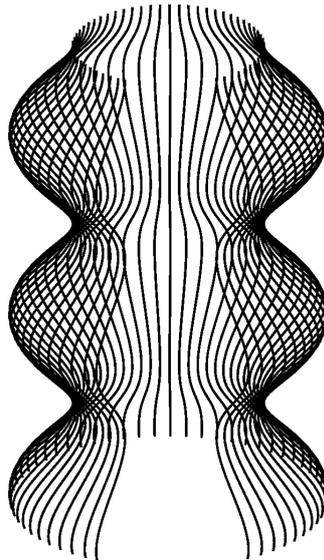


Figura 2.1: Curva perfil de uma superfície de revolução

Um meridiano na Terra é um grande círculo que passa pelos pólos norte e sul. Um paralelo é um círculo na Terra paralelo ao Equador. Estas noções se estendem para uma superfície arbitrária de revolução.

Definição 2.3 Sejam \mathcal{C} a imagem de uma curva num plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ e \mathcal{M} a superfície de revolução em \mathbb{R}^3 gerada pela rotação de \mathcal{C} em torno de $l \subset \Pi$. Um meridiano sobre \mathcal{M} é a intersecção de \mathcal{M} com um plano contendo o eixo de revolução l da superfície. Um

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

paralelo em \mathcal{M} é a intersecção de \mathcal{M} com um plano ortogonal ao eixo de revolução da superfície.

Considerando a parametrização (2.1) padrão de uma superfície de revolução, as curvas coordenadas

$$\beta(u) = X(u, v_0) = (\phi(v_0) \cos u, \phi(v_0) \operatorname{senu}, \psi(v_0))$$

e

$$\gamma(v) = X(u_0, v) = (\phi(v) \cos u_0, \phi(v) \operatorname{senu}_0, \psi(v))$$

são os paralelos e meridianos de \mathcal{M} , respectivamente.

As quantidades $\phi(v_0)$ e $\psi(v_0)$ possuem interpretação geométrica: $|\phi(v_0)|$ representa o raio do paralelo, enquanto que $|\psi(v_0)|$ pode ser interpretado como a distância do centro de cada paralelo até a origem.

Curvas Principais

Nesta seção, daremos alguns resultados para uma importante classe de curvas sobre uma superfície, chamadas de curvas principais.

Para simplificar, trataremos apenas de superfícies orientáveis (ver Definição 4.9). Para uma tal superfície \mathcal{M} , escolhemos um campo normal unitário globalmente definido N . Para uma melhor compreensão dos conceitos a seguir, sugerimos a leitura do Apêndice quando construimos o Operador de Weingarten.

Definição 2.4 *Uma curva α em uma superfície regular $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ é chamada de curva principal se, e somente se, α' aponta em todos os pontos uma direção principal.*

Assim,

$$W(\alpha') = k_i \alpha'$$

onde W denota o operador de Weingarten (conforme Definição 4.14) de \mathcal{M} com relação a N e k_i ($i = 1$ ou 2) é uma curvatura principal de \mathcal{M} .

Uma caracterização útil de uma direção principal é fornecida pelo lema seguinte.

Lema 2.5 *Um vetor tangente não nulo v_p a uma superfície regular \mathcal{M} é principal se, e somente se,*

$$W(v_p) \times v_p = 0.$$

Portanto, uma curva α em \mathcal{M} é uma curva principal se, e somente se, $W(\alpha') \times \alpha' = 0$.

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

Demonstração: Se $W(v_p) = k_i v_p$, então $W(v_p) \times v_p = k_i v_p \times v_p = 0$. Reciprocamente, se $W(v_p) \times v_p = 0$, então $W(v_p)$ e v_p são linearmente dependentes, de modo que v_p é um autovetor de W cujos autovalores são as curvaturas principais. \square

Na maioria das vezes, as curvas principais podem ser encontradas por considerações geométricas. Outro exemplo de como se pode encontrar curvas principais é o próximo teorema, devido a Terquem e Joachimsthal, que fornece um critério mais simples para que a intersecção de duas superfícies seja uma curva principal em ambas.

Teorema 2.6 (Joachimsthal) *Sejam α uma curva cujo traço se encontra na intersecção das superfícies regulares $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^3$ e N_i o vetor normal unitário para cada uma das superfícies ($i = 1, 2$). Suponha que ao longo de α as superfícies $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ se encontrem com um ângulo constante, isto é, $\langle N_1, N_2 \rangle$ é constante ao longo de α . Então α é uma curva principal em \mathcal{M}_1 se, e somente se, é uma curva principal em \mathcal{M}_2 .*

Demonstração: Ao longo da curva de intersecção temos,

$$0 = \frac{d}{dt}(\langle N_1, N_2 \rangle) = \left\langle \left(\frac{d}{dt} N_1 \right), N_2 \right\rangle + \left\langle N_1, \left(\frac{d}{dt} N_2 \right) \right\rangle,$$

em que $\frac{d}{dt} N_i = \frac{d}{dt}(N_i \circ \alpha(t))$.

Suponha que a curva de intersecção α é uma curva principal em \mathcal{M}_1 . Então

$$\frac{d}{dt} N_1 = -k_1 \alpha',$$

onde k_1 é uma curvatura principal de \mathcal{M}_1 . Mas α' é ortogonal a N_2 , donde concluímos que

$$0 = \left\langle N_1, \left(\frac{d}{dt} N_2 \right) \right\rangle.$$

Como N_2 é unitário então dN_2/dt também é perpendicular a N_2 . Além disso, em cada ponto $P \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \alpha$, temos que $\{N_1, N_2, \alpha\}$ é uma base do \mathbb{R}^3 . Assim,

$$\frac{d}{dt} N_2 = -k_2 \alpha',$$

para algum k_2 . Em outras palavras, α é uma curva principal em \mathcal{M}_2 . A recíproca é análoga. \square

Como uma aplicação do teorema anterior, vamos encontrar curvas principais sobre uma superfície de revolução.

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

Teorema 2.7 *Seja \mathcal{M} uma superfície de revolução gerada por uma curva α . Então os meridianos e paralelos em \mathcal{M} são curvas principais.*

Demonstração: Cada meridiano de \mathcal{M} é obtido pela intersecção de \mathcal{M} com um plano $\Pi_{\mathcal{M}}$ contendo o eixo de rotação de \mathcal{M} . Para $p \in \mathcal{M} \cap \Pi_{\mathcal{M}}$ a normal $N(p)$ de \mathcal{M} está em $\Pi_{\mathcal{M}}$. Assim, $N(p)$ e o campo normal unitário a $\Pi_{\mathcal{M}}$ em p são ortogonais. Portanto, do Teorema 2.6, segue que, os meridianos são curvas principais de \mathcal{M} , pois elas são curvas principais em $\Pi_{\mathcal{M}}$, visto que no plano qualquer curva é principal.

Agora, cada paralelo de \mathcal{M} é determinado pela intersecção de \mathcal{M} com um plano Π_p ortogonal ao eixo de rotação de \mathcal{M} . Para cada ponto $p \in \mathcal{M} \cap \Pi_p$, segue da simetria rotacional que a normal $N(p)$ a \mathcal{M} faz um ângulo constante com a normal a Π_p em p . Pelo mesmo argumento do caso anterior, os paralelos são curvas principais. □

Teorema 2.8 *Seja α uma curva que é intersecção de duas superfícies regulares $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^3$. Se α é uma curva principal em \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 , então os vetores normais à \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 têm ângulo constante ao longo de α .*

Demonstração: Sejam N_1, N_2 os vetores normais à \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 , respectivamente. Temos que,

$$\frac{d}{dt}(\langle N_1, N_2 \rangle) = \left\langle \frac{d}{dt} N_1, N_2 \right\rangle + \left\langle N_1, \frac{d}{dt} N_2 \right\rangle = \langle k_i \alpha', N_2 \rangle + \langle N_1, k_i \alpha' \rangle = 0.$$

□

As curvas principais dão origem a uma classe importante de parametrizações para as quais os cálculos de curvatura são especialmente simples.

Definição 2.9 *Uma parametrização principal é uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, para a qual as curvas*

$$u \mapsto X(u, v) \quad e \quad v \mapsto X(u, v)$$

são curvas principais.

De acordo com esta definição, temos que X será uma parametrização principal se, e somente se, as direções $\gamma'(u) = X_u$ e $\beta'(v) = X_v$ forem principais.

A seguir, apresentamos condições para que uma parametrização seja principal.

Lema 2.10 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização regular.*

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

1. Se $F = 0 = f$, onde $F = \langle X_u, X_v \rangle$, $f = \langle X_{vu}, N \rangle$ e N o vetor normal, em todos os pontos de U , então X é uma parametrização principal.
2. Se X é uma parametrização principal com curvaturas principais distintas, então $F = 0 = f$ em U .

Demonstração: Se $F = 0 = f$, as equações de Weingarten (4.3) tornam-se

$$W(X_u) = -\frac{e}{E}X_u \quad \text{e} \quad W(X_v) = -\frac{g}{G}X_v,$$

de modo que X_u e X_v são autovetores do Operador de Weingarten e, portanto, são direções principais. Reciprocamente, se X é uma parametrização principal, então X_u e X_v são autovetores do Operador de Weingarten e, novamente por (4.3), temos que $eF - fE = 0$ e $-fG + gF = 0$. Se, além disso, as curvaturas principais são distintas, segue da Definição 4.14 que $F = 0$. Consequentemente, como $E \neq 0$, temos $f = 0$. \square

De acordo com o Lema 4.20, temos que a parametrização padrão de uma superfície de revolução é principal.

No caso do plano ou esfera, as curvaturas principais são iguais e cada ponto da superfície é dito ser *umbílico*. Além disso, qualquer curva sobre o plano ou a esfera é principal.

2.2 Helicoides generalizados

Tanto helicoides como superfícies de revolução são exemplos da classe de superfícies conhecidas como helicoides generalizados, que foram estudados primeiramente por Ferdinand Minding.

Definição 2.11 *Sejam Π um plano em \mathbb{R}^3 , l uma reta em Π e C um conjunto de pontos em Π . Suponha que C é rodado em \mathbb{R}^3 em torno de l e deslocado simultaneamente paralelamente a l , de modo que a velocidade de deslocamento seja proporcional à velocidade de rotação. Então, o conjunto de pontos resultante \mathcal{H} é chamado helicóide generalizado gerado por C , que é chamada a curva perfil de \mathcal{H} . A reta l é chamada o eixo de \mathcal{H} . A razão entre a velocidade de deslocamento e a velocidade de rotação é chamada de passo do helicóide generalizado \mathcal{H} .*

O movimento euclidiano (que consiste em uma translação e rotação simultâneas) usado nesta definição é chamado de movimento rígido. Uma superfície de revolução é um helicóide generalizado de passo 0, e um helicóide generalizado reduz-se a um helicóide quando a curva perfil é $t \mapsto (bt, 0)$.

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

Darboux observou que uma superfície de revolução tem uma propriedade cinemática importante: uma superfície de revolução é a órbita de uma curva em um plano Π por um grupo a 1-parâmetro de rotações de \mathbb{R}^3 sobre uma reta em Π , enquanto que um helicóide generalizado é a órbita de uma curva num plano Π por 1-parâmetro do grupo de movimentos rígidos de \mathbb{R}^3 sobre uma reta em Π .

Assim como fizemos para superfícies de revolução, escolhemos Π para ser o plano xz e l para ser o eixo z . Vamos supor que o conjunto de pontos \mathcal{C} tem uma parametrização $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{C}$ que é diferenciável.

Definição 2.12 *Seja α uma curva plana e escreva $\alpha(t) = (\phi(t), 0, \psi(t)) \sim (\phi(t), \psi(t))$. Então o helicóide generalizado com curva perfil α e passo c é a superfície em \mathbb{R}^3 parametrizada por*

$$X(u, v) = (\phi(v) \cos u, \phi(v) \operatorname{senu}, cu + \psi(v)) \quad (2.2)$$

Convencionaremos que esta seja a parametrização padrão de helicóides generalizados.

Em suma, um helicóide generalizado é gerado por uma curva plana que é rotacionada em torno de um eixo fixo e ao mesmo tempo translado na direção do eixo com velocidade constante múltipla da velocidade de rotação.

Também é possível definir a noção de meridiano para um helicóide generalizado.

Definição 2.13 *Sejam \mathcal{C} um conjunto de pontos de um plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ e \mathcal{H} o helicóide generalizado em \mathbb{R}^3 de passo c gerado pela rotação de \mathcal{C} em torno de uma reta $l \subset \Pi$ e simultaneamente deslocado paralelamente à l . Um meridiano em \mathcal{H} é a intersecção de \mathcal{H} com um plano contendo o eixo l .*

Para uma superfície de revolução, um paralelo é uma circunferência, enquanto que, para um helicóide generalizado a curva correspondente é uma curva helicoidal, que chamamos de *curva helicoidal paralelo*. As curvas coordenadas $\beta(u) = X(u, v_0)$, com X dado por (2.2), são as curvas helicoidais paralelos e $\gamma(v) = X(u_0, v)$ são os meridianos de \mathcal{H} .

Mostraremos que um helicóide generalizado com a propriedade que seus meridianos são curvas principais deve ser uma superfície de revolução ou uma superfície de Dini.

Para estudarmos as superfícies de revolução de curvatura constante, precisaremos das integrais de funções elípticas. Para os propósitos deste trabalho faremos um breve detalhamento sobre essas funções e fixaremos a notação que adotaremos para esses objetos.

2.2.1 As integrais elípticas de segundo tipo

Definição 2.14 Uma integral elíptica de segundo tipo é definida por

$$E(\phi|m) = \int_0^\phi (1 - m \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2} d\theta,$$

em que m é um número real positivo.

Repare que para $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$, temos $E(\phi|1) = \operatorname{sen} \phi$, dessa maneira podemos considerar $E(\phi|m)$ uma generalização da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Precisaremos de $E(\phi|m)$ no estudo das superfícies de revolução com curvatura constante positiva e de $-iE(i\phi|-m)$ no estudo das superfícies de revolução com curvatura constante negativa.

Além disso, $-iE(i\phi|-m) = -i \int_0^{i\phi} (1 - m(i \operatorname{sen} \theta)^2)^{1/2} d\theta$.

Com a mudança de variáveis $i\theta = \lambda$, temos que

$$-iE(i\phi|-m) = -i \int_0^{-\phi} (1 - m \operatorname{senh}^2 \lambda)^{1/2} d\lambda.$$

Com a mudança de variáveis $\theta = -\lambda$, chegamos a

$$-iE(i\phi|-m) = \int_0^\phi (1 - m \operatorname{senh}^2(-\theta))^{1/2} d\theta = \int_0^\phi (1 - m \operatorname{senh}^2 \theta)^{1/2} d\theta.$$

2.3 Superfícies de Revolução de Curvatura Constante Positiva

Sabemos que a esfera de raio $a > 0$ é uma superfície de revolução e pode ser parametrizada por $X(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \operatorname{sen} u, a \operatorname{sen} v)$.

Além disso, a esfera tem curvatura gaussiana constante positiva $K = 1/a^2$. A esfera não é a única superfície em \mathbb{R}^3 que tem curvatura gaussiana constante.

Para encontrarmos outras superfícies de revolução em \mathbb{R}^3 que têm curvatura gaussiana constante positiva, vamos proceder da seguinte forma: vamos assumir que é dada uma superfície de revolução \mathcal{M} com curvatura gaussiana constante positiva e procurar restrições sobre uma parametrização X de \mathcal{M} .

Primeiro, vamos determinar as curvas perfil de uma superfície de curvatura gaussiana constante positiva.

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

Teorema 2.15 *Seja \mathcal{M} uma superfície de revolução cuja curvatura gaussiana é uma constante positiva $1/a^2$, com $a > 0$. Então \mathcal{M} é parte de uma superfície parametrizada por X da forma (2.1), com*

$$\begin{cases} \phi(v) = b \cos\left(\frac{v}{a}\right) \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right)\right)^2} dt = aE\left(\frac{v}{a} \middle| \frac{b^2}{a^2}\right) \end{cases}$$

para algum $b > 0$. O parâmetro v é tal que

$$\begin{cases} \text{se } b = a, & \text{então } -\frac{\pi a}{2} \leq v \leq \frac{\pi a}{2} \\ \text{se } b < a, & \text{então } -\infty \leq v \leq \infty \\ \text{se } b > a, & \text{então } -a \operatorname{arcsen}\frac{a}{b} \leq v \leq a \operatorname{arcsen}\frac{a}{b} \end{cases}$$

A parametrização X é regular em (u, v) se, e somente se, $\phi(v) \neq 0$, isto é, $v \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi a$, para $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Assuma, sem perda de generalidade, que X é dada forma (2.2) e que a curva perfil $\alpha = (\phi, \psi)$ está parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$. Se \mathcal{M} tem curvatura gaussiana constante positiva $1/a^2$ então pelo Corolário 4.24, temos que ϕ satisfaz a equação diferencial

$$\phi'' + \frac{1}{a^2}\phi = 0,$$

cuja equação característica é $\lambda^2 + (1/a^2) = 0$, a qual admite as soluções básicas $\phi_1(v) = e^{iv/a}$ e $\phi_2(v) = e^{-iv/a}$. Assim, a solução geral é $\phi(v) = c_1 \cos\left(\frac{v}{a}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{v}{a}\right)$. Tomando-se $b = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\cos c = \frac{c_1}{b}$ e $\operatorname{sen} c = \frac{-c_2}{b}$, a solução geral pode ser reescrita como $\phi(v) = b \cos\left(\frac{v}{a} + c\right)$.

Sem perda de generalidade podemos assumir $c = 0$, pois $c \neq 0$ corresponde somente a uma translação da curva perfil ao longo do eixo de revolução. Também, tomando uma imagem espelhada da curva, se necessário, podemos assumir que $b > 0$. Assim, obtemos a primeira equação.

Como tomamos uma curva perfil parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$, segue que

$$\psi'(v) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{v}{a}\right)}.$$

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

Podemos assumir que $\psi'(v) \geq 0$ para todo v , pois, caso contrário, bastaria substituir v por $-v$. Assim, integrando esta equação de 0 a v (pois v é o comprimento de arco), chegamos a

$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{t}{a}\right)} dt = a \int_0^{v/a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 u} du = aE\left(\frac{v}{a} \middle| \frac{b^2}{a^2}\right), \quad (2.3)$$

para a qual foi usada a mudança de variável $u = t/a$; assim, obtemos a segunda equação.

Falta mostrar que $\psi(v)$ está bem definida. Para tal, é necessário que o radicando em (2.3) seja não-negativo. Para $b < a$ essa quantidade é sempre positiva, então $\psi(v)$ é definida para todo v . Quando $b = a$, a curva perfil é uma parte de uma circunferência; neste caso, $-\pi/2 \leq v/a \leq \pi/2$ garante que a curva perfil não se sobreponha e é assim uma semicircunferência. Se $b > a$ o radicando é definido para $-a/b \leq \sin(v/a) \leq a/b$, isto é, $-a \arcsen \frac{a}{b} \leq v \leq a \arcsen \frac{a}{b}$. \square

Quando $b = a$, a curva perfil é

$$v \mapsto \left(a \cos\left(\frac{v}{a}\right), a \sin\left(\frac{v}{a}\right) \right), -\frac{\pi a}{2} \leq v \leq \frac{\pi a}{2},$$

que dá origem a uma esfera de raio a . Na verdade, há infinitas cópias de esferas de raio a que se tangenciam.

Quando $b > a$, a curva perfil é definida no intervalo

$$-a \arcsen \frac{a}{b} \leq v \leq a \arcsen \frac{a}{b},$$

e a superfície de revolução resultante parece um barril.

Para concluir, enunciamos o seguinte corolário.

Corolário 2.16 *Seja \mathcal{S} a superfície de revolução com curvatura gaussiana constante positiva cuja curva perfil é $\alpha = (\phi, \psi)$ com ϕ, ψ dadas por (2.1). Então*

1. *Se $b = a$ então, \mathcal{S} é uma esfera usual de raio a ;*
2. *(Tipo bola de futebol americano) Se $0 < b < a$, \mathcal{S} é uma superfície de revolução cuja imagem lembra a um fio infinito de grânulos, cada uma das quais tem a forma de uma bola de futebol americano com seus vértices no eixo de revolução;*
3. *(Tipo barril) Se $0 < a < b$, então a imagem de \mathcal{S} tem forma de barril e não cruza o eixo de revolução.*

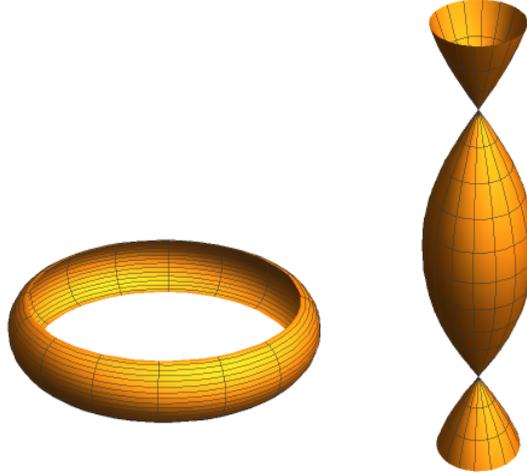


Figura 2.2: À esquerda encontra-se o tipo barril com $a = 1$ e $b = 2$ e à direita o tipo de bola de futebol americano com $a = 2$ e $b = 1$.

2.4 Superfícies de Revolução de Curvatura Constante Negativa

Procedemos como anteriormente para determinar as superfícies de revolução de curvatura negativa constante.

Teorema 2.17 *Seja \mathcal{M} uma superfície de revolução cuja curvatura gaussiana é uma constante negativa $-1/a^2$. Então \mathcal{M} é parte de uma superfície parametrizada por (2.1) cuja curva perfil $\alpha = (\phi, \psi)$ satisfaz um dos seguintes tipos:*

1. (Pseudosfera)

$$\alpha(v) = \begin{cases} (ae^{-v/a}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t/a}} dt) & \text{para } 0 \leq v < \infty \\ (ae^{v/a}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t/a}} dt) & \text{para } -\infty < v \leq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

2. (Tipo Hiperbolóide)

$$\begin{cases} \phi(v) = b \cosh(v/a) \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left(\sinh\left(\frac{t}{a}\right) \right)^2} dt = -iaE\left(\frac{iv}{a} \middle| \frac{-b^2}{a^2}\right), \end{cases} \quad (2.5)$$

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

para alguma constante $b > 0$ e v tal que $-a \operatorname{arcsen}\left(\frac{a}{b}\right) \leq v \leq a \operatorname{arcsen}\left(\frac{a}{b}\right)$.

3. (Tipo cônico)

$$\begin{cases} \phi(v) = b \sinh(v/a) \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left(\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)^2} dt = -i\sqrt{a^2 - b^2} E\left(\frac{iv}{a} \middle| \frac{-b^2}{a^2 - b^2}\right) \end{cases} \quad (2.6)$$

para alguma constante $b > 0$ com $0 < b \leq a$ e v tal que

$$-a \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) \leq v \leq a \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right).$$

Demonstração: Assuma, sem perda de generalidade, que X é dada por (2.1) e que a curva perfil $\alpha = (\phi, \psi)$ está parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$. Se \mathcal{M} tem curvatura gaussiana constante negativa $1/a^2$, $a > 0$, então pelo Corolário 4.24, temos que ϕ satisfaz a equação diferencial

$$\phi'' - \frac{1}{a^2}\phi = 0,$$

cuja equação característica é $\lambda^2 - (1/a^2) = 0$, a qual admite as soluções básicas $\phi_1(v) = e^{v/a}$ e $\phi_2(v) = e^{-v/a}$. Assim a solução geral é

$$\phi(v) = Ae^{v/a} + Be^{-v/a}.$$

Caso 1. Suponha $A = 0$. Neste caso, podemos assumir $B > 0$, pois basta trocar v por $-v$, se necessário. Além disso, substituindo v por $v + a \log B - a \log a$, podemos assumir que $B = a$. Logo, $\phi(v) = ae^{-v/a}$ e como

$$0 \leq \psi'(v)^2 = 1 - \phi'(v)^2 = 1 - e^{-2v/a},$$

temos que ter $v \geq 0$. Assim, usando o fato que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco v ,

$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t/a}} dt,$$

obtendo assim a primeira alternativa de (2.4). Analogamente, para $B = 0$ obtemos a segunda equação de (2.4), que é válida para $v < 0$, levando-nos à segunda alternativa em (2.4).

Em seguida, suponha que A e B são ambos diferentes de zero. Usando a mu-

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

dança de variáveis

$$v \mapsto v + \frac{a}{2} \log \left| \frac{B}{A} \right|$$

podemos tomar $|A| = |B|$. Esta condição será estudada nos dois casos seguintes.

Caso 2. Quando $A = B$, temos

$$\phi(v) = A(e^{\frac{v}{a}} + e^{-\frac{v}{a}}) = 2A \cosh\left(\frac{v}{a}\right).$$

Assim, podemos considerar $A > 0$, pois, se necessário, basta tomar a reflexão da curva perfil em relação ao eixo de revolução no plano xz . Fazendo $b = 2A$, obtemos

$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sinh^2 \frac{t}{a}} dt = a \int_0^{v/a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sinh^2 \theta} d\theta = -iaE\left(\frac{iv}{a} \middle| \frac{-b^2}{a^2}\right),$$

obtendo assim (2.5). Neste caso, temos $b > 0$ e v é tal que $(\psi'(v))^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \sinh^2\left(\frac{v}{a}\right) \geq 0$ e assim $-a \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a}{b}\right) \leq v \leq a \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a}{b}\right)$, pois a função $f(x) = \sinh x$ é ímpar.

Caso 3. Se $A = -B$, a solução geral torna-se

$$\phi(v) = A(e^{\frac{v}{a}} - e^{-\frac{v}{a}}) = 2A \sinh\left(\frac{v}{a}\right).$$

Podemos assumir $A > 0$, mudando v para $-v$, se necessário. Tomamos $b = 2A$ e considerando que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco v , segue que

$$\psi'(v)^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) = \frac{a^2 - b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \sinh^2\left(\frac{v}{a}\right)$$

e

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \int_0^v \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \sinh^2 \frac{t}{a}} dt \\ &= a \int_0^{v/a} \sqrt{\frac{1}{a^2} ((a^2 - b^2) - b^2 \sinh^2 \theta)} d\theta \\ &= \sqrt{a^2 - b^2} \int_0^{v/a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 - b^2} \sinh^2 \theta} d\theta \\ &= -i\sqrt{a^2 - b^2} E\left(\frac{iv}{a} \middle| \frac{-b^2}{a^2 - b^2}\right) \end{aligned}$$

assim obtendo (2.6). Neste caso, temos $b > 0$ e $a^2 - b^2 \geq 0$, isto é, $0 < b \leq a$. Além

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

disto, $(\psi'(v))^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \sinh^2\left(\frac{v}{a}\right)$, donde segue que,

$$-a \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) \leq v \leq a \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right).$$

□

As Figuras 2.3 e 2.4 ilustram superfícies de rotação com curvatura gaussiana constante negativa.

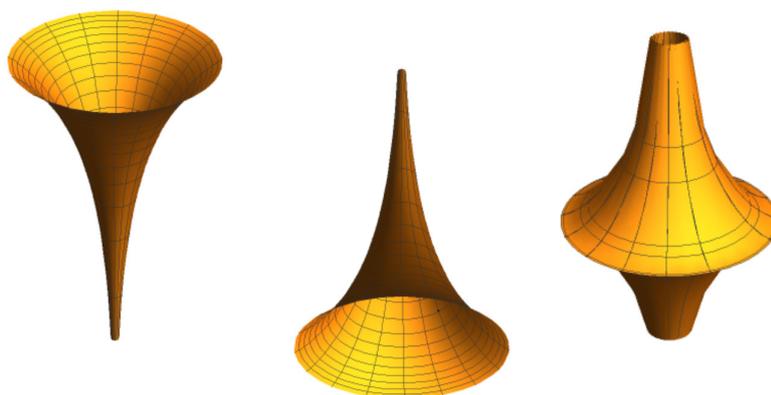


Figura 2.3: Pseudoesfera com $a = 1$. À esquerda está a parte da superfície correspondente a $v > 0$, no centro com $v < 0$ e à direita a superfície obtida.

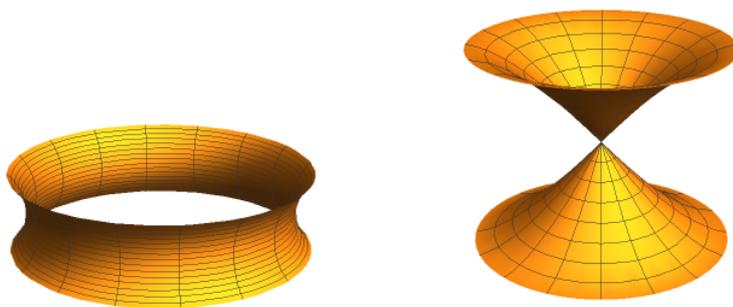


Figura 2.4: À esquerda encontra-se o tipo hiperbólico com $a = 2$ e $b = 3$ e à direita o tipo cônico com $a = 3$ e $b = 2$.

2.5 Outras superfícies com $K \leq 0$ constante

Nesta seção final, apresentamos outros exemplos não tão comuns de superfícies de curvatura gaussiana constante negativa: a superfície de Dini e a superfície de Kuen. Apresentamos também os helicoides generalizados planos.

O resultado a seguir caracteriza os helicoides generalizados planos (isto é, com curvatura gaussiana nula).

Teorema 2.18 *Um helicóide generalizado é plano se, e somente se, sua curva perfil $\alpha = (t, \psi(t))$ com*

$$\psi(t) = \pm t \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{t^2}} + c \arcsen\left(\frac{c}{at}\right). \quad (2.7)$$

Demonstração: Pelo Teorema 4.25 um helicóide generalizado é plano se, e somente se, sua curva perfil $\alpha = (\phi, \psi)$ satisfaz a equação diferencial

$$\phi^3(\phi' \psi' \psi'' - \psi'^2 \phi'') - c^2 \phi'^4 = 0.$$

A curva perfil pode ser parametrizada de modo que, $\phi(t) = t$. Então, a equação diferencial reduz-se a

$$t^3 \psi' \psi'' - c^2 = 0. \quad (2.8)$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}(\psi')^2 = 2\psi' \psi'',$$

assim (2.8) se torna

$$\frac{d}{dt}(\psi')^2 = \frac{2c^2}{t^3}. \quad (2.9)$$

Integrando a equação em (2.9) com relação a t , temos

$$\psi'(t)^2 = a^2 - \frac{c^2}{t^2},$$

onde a^2 é constante de integração e $a > 0$. Ou seja,

$$\psi'(t) = \pm \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{t^2}} \quad (2.10)$$

A fim de encontrarmos $\psi(t)$, precisamos integrar a equação em (2.10). Para tal, usemos a seguinte mudança de variáveis, $a \operatorname{sen} x = \frac{c}{t}$ donde obtemos $t = \frac{c}{a} \operatorname{cosec} x$, e conseqüentemente $dt = -\frac{c}{a} \operatorname{cosec} x \cot g x dx$.

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

Usando-se a identidade trigonométrica $\cotg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$, obtemos que uma primitiva de $\sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 x} \left(-\frac{c}{a} \operatorname{cosec} x \cotg x \right)$ é $c \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + cx$

Assim,

$$\psi(t) = \pm \left(t \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{t^2}} + c \operatorname{arcsen} \left(\frac{c}{at} \right) \right),$$

pois $\cos x = \frac{\sqrt{a^2 t^2 - c^2}}{at}$.

□

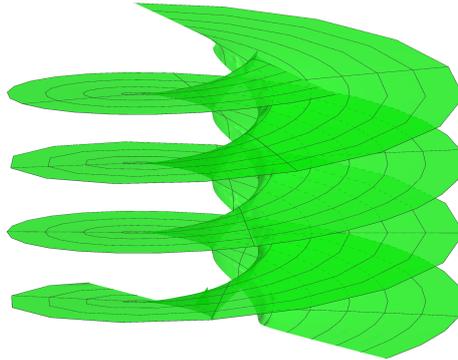


Figura 2.5: Helicoide Generalizado Plano, com $a = 1$ e $c = 1$.

Definição 2.19 Uma superfície de Dini é uma superfície parametrizada por

$$X(u, v) = (a \cos u \operatorname{sen} v, a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a \left(\cos v + \ln \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) \right) + cu). \quad (2.11)$$



Figura 2.6: Superfície de Dini

Uma superfície de Dini tem curvatura gaussiana constante, fato que será explorado no próximo capítulo. Neste momento, nosso objetivo é relacionar os helicoi-

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

des generalizados com a superfície de Dini. Este resultado consta na obra original de Luigi Bianchi [2].

Teorema 2.20 *Seja \mathcal{H} um helicóide generalizado com a propriedade de que os meridianos são curvas principais. Então \mathcal{H} é parte de uma superfície de Dini.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva perfil do helicóide generalizado é da forma $\alpha(v) = (v, \psi(v))$, de modo que

$$X(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{senu}, cu + \psi(v)).$$

Temos que

$$X_u = (-v \operatorname{senu}, v \cos u, c) \quad \text{e} \quad X_v = (\cos u, \operatorname{senu}, \psi'(v)).$$

Assim,

$$X_u \times X_v = (v\psi'(v)\cos u - c \operatorname{senu}, v\psi'(v)\operatorname{senu} + c \cos u, -v),$$

donde

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{(-v)^2 + (v\psi'(v)\cos u - c \operatorname{senu})^2 + (v\psi'(v)\operatorname{senu} + c \cos u)^2} \\ &= \sqrt{c^2 + v^2 + v^2\psi'(v)^2}. \end{aligned}$$

Assim o vetor normal unitário de \mathcal{H} em relação a X é

$$N_X = \frac{(v\psi'(v)\cos u - c \operatorname{senu}, v\psi'(v)\operatorname{senu} + c \cos u, -v)}{\sqrt{c^2 + v^2 + v^2\psi'(v)^2}}.$$

O meridiano $v \mapsto X(u, v)$ é a intersecção do helicóide generalizado com um plano Π através de seu eixo. O vetor normal unitário a este plano é dado por

$$N_\Pi = (-\operatorname{senu}, \cos u, 0).$$

Suponhamos que α seja uma curva principal no helicóide generalizado. Como α é automaticamente uma curva principal em Π , pelo Teorema 2.8 temos que os campos

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante

vetoriais N_X e N_Π encontram-se com um ângulo constante σ ao longo de α . Assim,

$$\cos \sigma = \langle N_X, N_\Pi \rangle = \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2 + v^2 \psi'(v)^2}}. \quad (2.12)$$

De (2.12) segue que

$$\begin{aligned} (c^2 + v^2 + v^2 \psi'(v)^2) \cos^2 \sigma &= c^2 \\ v^2(1 + \psi'(v)^2) &= \frac{c^2(1 - \cos^2 \sigma)}{\cos^2 \sigma} = c^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\cos^2 \sigma} \\ v^2(1 + \psi'(v)^2) &= c^2 \operatorname{tg}^2 \sigma. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\psi'(v) = \pm \sqrt{\frac{c^2 \operatorname{tg}^2 \sigma}{v^2} - 1} = \pm \sqrt{\frac{c^2 \operatorname{tg}^2 \sigma - v^2}{v^2}}.$$

Com a mudança de variável $v = c \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sent} t$ temos $dv = c \operatorname{tg} \sigma \cos t dt$ e

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \pm c \operatorname{tg} \sigma \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sent} t} dt = \pm c \operatorname{tg} \sigma \left[\int (\operatorname{cossect} - \operatorname{sent} t) dt \right] \\ &= \pm c \operatorname{tg} \sigma \left(\cos t + \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

de modo que a curva perfil pode ser parametrizada por $\alpha(t) = (c \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sent} t, c \operatorname{tg} \sigma (\cos t + \ln(\operatorname{tg}(\frac{t}{2})))$, que corresponde a uma *tractrix*. Portanto, um helicóide generalizado cujos meridianos são curvas principais é parte de uma superfície de Dini, também conhecida como pseudoesfera torcida. \square

Uma outra superfície de curvatura gaussiana negativa constante não tão comum é a de Kuen, que pode ser parametrizada por

$$X(u, v) = \left(\frac{(\cos u + u \operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v}{1 + u^2 \operatorname{sen}^2 v}, \frac{(\operatorname{sen} u - u \cos u) \operatorname{sen} v}{1 + u^2 \operatorname{sen}^2 v}, \frac{1}{2} \log \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) + \frac{\cos v}{1 + u^2 \operatorname{sen}^2 v} \right)$$

Uma ilustração da superfície de Kuen é dada na Figura 2.7.

2 Superfícies de Rotação de Curvatura Constante



Figura 2.7: Superfície de Kuen.

Em relação a esta superfície, temos

$$E = \frac{4u^2 \operatorname{sen}^2 v}{(2 + u^2 - u^2 \cos 2v)^2} \quad F = 0 \quad G = \frac{(2 - u^2 + u^2 \cos 2v)^2 \operatorname{cosec}^2 v}{(2 + u^2 - u^2 \cos 2v)^2}$$

$$e = -2 \operatorname{sen} v \sqrt{\frac{u^2(2 - u^2 + u^2 \cos 2v)^2}{(2 + u^2 - u^2 \cos 2v)^4}} \quad f = 0 \quad g = 2 \operatorname{cosec} v \sqrt{\frac{u^2(2 - u^2 + u^2 \cos 2v)^2}{(2 + u^2 - u^2 \cos 2v)^4}},$$

de modo que suas curvas coordenadas são curvas principais e $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -4$.

3 SUPERFÍCIES DE CURVATURA CONSTANTE NEGATIVA

Bianchi foi quem primeiramente conseguiu um método de se obter superfícies de curvatura gaussiana constante negativa. Tal método foi sistematizado na transformada de Bianchi, que por meio de uma superfície conhecida com curvatura gaussiana constante negativa se obtém outras por meio da aplicação da técnica. Outros matemáticos baseados nos trabalhos de Bianchi logo encaminharam generalizações de seu método, entre eles, Lie, Bäcklund e outras transformadas que podem ser encontradas no oitavo capítulo de [6].

A abordagem adotada aqui se faz embasada no conceito de *rede de Chebyshev*, que são parametrizações nas quais os comprimentos dos lados opostos de qualquer quadrilátero formado por elas são iguais. Uma condição necessária e suficiente para que isso aconteça é $E_v = G_u = 0$.

Daí tratamos de dois tipos de parametrizações fortemente relacionadas e caracterizadas por propriedades da primeira forma fundamental. Definimos uma parametrização de Chebyshev para a qual $E = G$ e constantes e , em seguida, uma para a qual $E + G$ é constante e $F = 0$.

Para os propósitos deste trabalho de conclusão de curso, estamos considerando superfícies em \mathbb{R}^3 . Para estas, o objeto de estudo é sua curvatura gaussiana K , principalmente no caso em que K é constante. O Teorema Egregium de Gauss afirma que a curvatura gaussiana K de uma superfície $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ é intrínseca, isto é, não depende de como ela está mergulhada em \mathbb{R}^3 . Neste contexto, faz sentido (é natural) introduzir as superfícies abstratas, que são variedades bidimensionais com métrica Riemanniana ou pseudo-Riemanniana. Os resultados dados nas seções 3.1 e 3.2 podem ser enunciados para superfícies abstratas. Contudo não faz parte de nossos objetivos neste trabalho detalhar isso e portanto não comentaremos quais resultados são válidos de modo mais geral.

Mostramos que as parametrizações principais em tais superfícies têm propriedades especiais e os dois tipos de parametrizações de Chebyshev podem ser determinados como assintóticos e parametrizações principais, respectivamente, nos quais k_1, k_2 são determinados pela métrica. Além disso, tratamos superficialmente

da equação Seno-Gordon, cujas soluções determinam funções angulares de parametrizações de Chebyshev com curvatura constante. Também usamos soluções especiais para tratar superfícies de revolução, culminando em parametrizações explícitas para a pseudoesfera.

Prosseguimos definindo a transformada de Bianchi de superfícies de curvatura negativa constante, a aplicamos na pseudoesfera e encontramos a superfície de Kuen. Os referenciais móveis em superfícies no \mathbb{R}^3 são estudados, bem como um análogo das fórmulas de Frenet. Definimos transformada de Bäcklund e a aplicamos à construção da superfície de Dini.

3.1 Parametrização assintótica de Chebyshev

Inicialmente definiremos um tipo particular de parametrização de uma superfície abstrata.

Definição 3.1 *Sejam $a > 0$ e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$, U aberto, a parametrização de uma superfície regular $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$. Dizemos que X é uma parametrização assintótica de Chebyshev com raio a se a primeira forma fundamental de \mathcal{M} for dada por*

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

com $E = G = a^2$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$F^2 = \langle X_u, X_v \rangle \leq \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 = EG = a^4.$$

Assim, $F = a^2 \cos \omega(u, v)$ para algum $\omega(u, v) \in \mathbb{R}$, de modo que

$$I = a^2(du^2 + 2\cos \omega dudv + dv^2).$$

Como $F = a^2 \cos \omega$, então $\cos \omega = \frac{F}{a^2} = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|}$, que coincide com a noção usual de ângulo entre dois vetores no \mathbb{R}^3 . Portanto, podemos definir a função ângulo como

$$\cos \omega = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|}.$$

Usando as equações (4.6), (4.7) e (4.8), vemos que os símbolos de Christoffel dependem somente dos coeficientes da primeira forma e de suas derivadas. Para o

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

caso de uma parametrização assintótica de Chebyshev, temos o seguinte lema.

Lema 3.2 *Os símbolos de Christoffel de uma parametrização assintótica de Chebyshev são dados por*

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= (\cotg\omega)\omega_u, & \Gamma_{11}^2 &= -(\operatorname{cosec}\omega)\omega_u, \\ \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= -(\operatorname{cosec}\omega)\omega_v, & \Gamma_{22}^2 &= (\cotg\omega)\omega_v.\end{aligned}$$

Demonstração: Como $E = G = a^2$ e $F = a^2 \cos \omega(u, v)$, segue que, $E_u = E_v = G_u = G_v = 0$ e $F_u = -a^2 \omega_u \operatorname{sen} \omega$ e $F_v = -a^2 \omega_v \operatorname{sen} \omega$. Assim, de (4.6), (4.7) e (4.8) segue que

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{(-2a^2 \cos \omega)(-a^2 \omega_u \operatorname{sen} \omega)}{2(a^4 - a^4 \cos^2 \omega)} = \frac{a^4 \omega_u \cos \omega \operatorname{sen} \omega}{a^4 \operatorname{sen}^2 \omega} = \omega_u (\cotg \omega), \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{(2a^2)(-a^2 \omega_u \operatorname{sen} \omega)}{2(a^4 - a^4 \cos^2 \omega)} = \frac{-a^4 \omega_u \operatorname{sen} \omega}{a^4 \operatorname{sen}^2 \omega} = -\omega_u (\operatorname{cosec} \omega), \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{12}^2 = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{(2a^2)(-a^2 \omega_v \operatorname{sen} \omega)}{2(a^4 - a^4 \cos^2 \omega)} = \frac{-a^4 \omega_v \operatorname{sen} \omega}{a^4 \operatorname{sen}^2 \omega} = -\omega_v (\operatorname{cosec} \omega), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{(-2a^2 \cos \omega)(-a^2 \omega_v \operatorname{sen} \omega)}{2(a^4 - a^4 \cos^2 \omega)} = \frac{a^4 \omega_v \cos \omega \operatorname{sen} \omega}{a^4 \operatorname{sen}^2 \omega} = \omega_v (\cotg \omega).\end{aligned}$$

□

Vamos agora determinar a curvatura gaussiana de uma superfície parametrizada por uma parametrização assintótica de Chebyshev com raio a .

Lema 3.3 *A curvatura gaussiana de uma parametrização assintótica de Chebyshev de raio $a > 0$ é dada por*

$$K = \frac{-\omega_{uv}}{a^2 \operatorname{sen} \omega}.$$

Demonstração: Pela Equação de Gauss (4.9), temos

$$FK = (\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1.$$

Pelo Lema 3.2, esta equação torna-se

$$\begin{aligned}-a^2 \cos \omega K &= -\operatorname{cosec}^2 \omega \omega_u \omega_v + \cotg \omega \omega_{vu} + \operatorname{cosec}^2 \omega \omega_u \omega_v \\ K &= \frac{-\cotg \omega \omega_{vu}}{a^2 \cos \omega} = \frac{-\omega_{uv}}{a^2 \operatorname{sen} \omega}.\end{aligned}$$

□

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

Lema 3.4 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização regular. Uma condição suficiente para a existência de parametrização assintótica de Chebyshev que reparametriza X é que*

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0.$$

Demonstração: Seja X uma parametrização com $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ tal que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$. De (4.6), (4.7) e (4.8) segue que os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem

$$\begin{cases} GE_v - FG_u = 0 \\ EG_u - FE_v = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para E_v e G_u obtemos que a única solução é a trivial, $E_v = G_u = 0$, pois como X é regular então $EG - F^2 > 0$. Assim, a função E só depende de u e G só depende de v . Desse modo, podemos definir funções p, q por

$$p(u) = \frac{1}{a} \int \sqrt{E} du \quad e \quad q(v) = \frac{1}{a} \int \sqrt{G} dv$$

em que a é uma constante real positiva.

Como $p'(u) = \frac{\sqrt{E}}{a} \neq 0$ e $q'(v) = \frac{\sqrt{G}}{a} \neq 0$, o Teorema da Função Inversa garante a existência das funções inversas deriváveis $u = u(p)$ e $v = v(q)$.

Seja Y dada por $Y(p, q) = X(u(p), v(q))$.

Segue do Teorema da Função Inversa que Y é, de fato, uma reparametrização de X e que

$$\frac{du}{dp} = \frac{a}{\sqrt{E}}, \quad \frac{dv}{dq} = \frac{a}{\sqrt{G}}.$$

Além disso, $\frac{du}{dq} = \frac{dv}{dp} = 0$.

Assim, $Y_p = X_u, Y_q = X_v, E_Y = \|Y_p\|^2 = \frac{a^2}{E}E = a^2, G_Y = \|Y_q\|^2 = \frac{a^2}{G}G = a^2$, de modo que $I_Y = a^2 dp^2 + 2F_Y dpdq + a^2 dq^2$.

Portanto, Y é uma parametrização assintótica de Chebyshev. \square

Vamos agora dar um outro tipo especial de parametrização de uma superfície.

Definição 3.5 *Sejam $a > 0$ e $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Uma parametrização principal de Chebyshev de raio a e função ângulo θ é uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$, U aberto, tal que*

$$E = (a \cos \theta)^2, \quad F = 0, \quad G = (a \sin \theta)^2$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

de modo que

$$I_X = a^2(\cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2). \quad (3.1)$$

Observemos que se θ é função ângulo de uma parametrização principal de Chebyshev, então $-\theta$ também serve como função ângulo. Determinamos a seguir os símbolos de Christoffel para uma tal parametrização.

Lema 3.6 *Os símbolos de Christoffel para uma parametrização principal de Chebyshev são dados por*

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -(\operatorname{tg} \theta)\theta_u, & \Gamma_{11}^2 &= (\operatorname{cotg} \theta)\theta_v, \\ \Gamma_{12}^1 &= -(\operatorname{tg} \theta)\theta_v, & \Gamma_{12}^2 &= (\operatorname{cotg} \theta)\theta_u, \\ \Gamma_{22}^1 &= -(\operatorname{tg} \theta)\theta_u, & \Gamma_{22}^2 &= (\operatorname{cotg} \theta)\theta_v. \end{aligned}$$

Demonstração: Como $E = (a \cos \theta)^2$, $F = 0$ e $G = (a \sin \theta)^2$, então $F_u = F_v = 0$, $E_u = (-2a^2 \sin \theta \cos \theta)\theta_u$, $E_v = (-2a^2 \cos \theta \sin \theta)\theta_v$, $G_u = (2a^2 \sin \theta \cos \theta)\theta_u$ e $G_v = (2a^2 \sin \theta \cos \theta)\theta_v$. Assim, usando (4.6), (4.7) e (4.8) segue que,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{(a^2 \sin^2 \theta)(-2a^2 \cos \theta \sin \theta \theta_u)}{2(a^2 \cos^2 \theta a^2 \sin^2 \theta)} = -\frac{2a^4 \cos \theta \sin \theta \theta_u}{2a^4 \cos^2 \theta} = -(\operatorname{tg} \theta)\theta_u, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-(a \cos \theta)^2(-2a^2 \sin \theta \cos \theta)\theta_v}{2(a^2 \cos^2 \theta a^2 \sin^2 \theta)} = \frac{\cos \theta \sin \theta \theta_v}{\sin^2 \theta} = (\operatorname{cotg} \theta)\theta_v, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{(a^2 \sin^2 \theta)(-2a^2 \sin \theta \cos \theta \theta_v)}{2(a^2 \cos^2 \theta a^2 \sin^2 \theta)} = \frac{\cos \theta \sin \theta \theta_v}{\cos^2 \theta} = (\operatorname{tg} \theta)\theta_v, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{(a^2 \cos^2 \theta)(2a^2 \sin \theta \cos \theta \theta_u)}{2(a^2 \cos^2 \theta a^2 \sin^2 \theta)} = \frac{\sin \theta \cos \theta \theta_u}{\sin^2 \theta} = (\operatorname{cotg} \theta)\theta_u, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{(a^2 \sin^2 \theta)(-2a^2 \cos \theta \sin \theta \theta_u)}{2(a^2 \cos^2 \theta a^2 \sin^2 \theta)} = -\frac{2a^4 \cos \theta \sin \theta \theta_u}{2a^4 \cos^2 \theta} = -(\operatorname{tg} \theta)\theta_u, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{-(a \cos \theta)^2(-2a^2 \sin \theta \cos \theta)\theta_v}{2(a^2 \cos^2 \theta a^2 \sin^2 \theta)} = \frac{\cos \theta \sin \theta \theta_v}{\sin^2 \theta} = (\operatorname{cotg} \theta)\theta_v. \end{aligned}$$

□

Agora vamos determinar a curvatura gaussiana de uma parametrização principal de Chebyshev.

Lema 3.7 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$, U aberto, uma parametrização principal de Chebyshev. Então a curvatura gaussiana de X é dada por,*

$$K = \frac{-\theta_{uu} + \theta_{vv}}{a^2 \sin \theta \cos \theta}.$$

Demonstração:

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

Pela Equação de Gauss (4.10)

$$-EK = \frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{11}^2) - \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2$$

Como $\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{11}^2) = \frac{\partial}{\partial v}((\cotg\theta)\theta_v) = -\operatorname{cosec}^2\theta(\theta_v)^2 + (\cotg\theta)\theta_{vv}$ e $\frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}^2) = \frac{\partial}{\partial u}((\cotg\theta)\theta_u) = -\operatorname{cosec}^2\theta(\theta_u)^2 + (\cotg\theta)\theta_{uu}$, então

$$\begin{aligned} (a^2 \cos^2 \theta)K &= -\operatorname{cosec}^2\theta(\theta_v)^2 + (\cotg\theta)\theta_{vv} - \operatorname{cosec}^2\theta(\theta_u)^2 + (\cotg\theta)\theta_{uu} - \theta_u^2 + \\ &+ \cotg^2\theta(\theta_v)^2 + \theta_v^2 - \cotg^2\theta(\theta_u)^2 \\ &= \cotg\theta(\theta_{vv} - \theta_{uu}) + \theta_v^2(-\operatorname{cosec}^2\theta + \cotg^2\theta + 1) \\ &+ \theta_u^2(\operatorname{cosec}^2\theta - \cotg^2\theta - 1) \\ K &= \frac{\cotg\theta(\theta_{vv} - \theta_{uu})}{a^2 \cos^2 \theta} = \frac{\theta_{vv} - \theta_{uu}}{a^2 \operatorname{sen}\theta \cos \theta}. \end{aligned}$$

□

Existe uma relação entre uma parametrização assintótica de Chebyshev e uma parametrização principal de Chebyshev.

Lema 3.8 *Sejam X e Y duas parametrizações de uma superfície regular $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ tais que*

$$X(u, v) = Y\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right), Y(p, q) = X(p+q, p-q)$$

Sendo I_X e I_Y suas respectivas primeiras formas fundamentais, então

$$I_X = a^2(\cos^2 \theta du^2 + \operatorname{sen}^2 \theta dv^2) \quad (3.2)$$

se, e somente se,

$$I_Y = a^2(dp^2 + 2 \cos \omega dpdq + dq^2).$$

Demonstração: Tomando

$$I_X = E_X du^2 + 2F_X dudv + G_X dv^2 \quad I_Y = E_Y dp^2 + 2F_Y dpdq + G_Y dq^2.$$

Temos que

$$X_u = \frac{1}{2}(Y_p + Y_q), \quad X_v = \frac{1}{2}(Y_p - Y_q)$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

de modo que

$$E_X = \frac{1}{4} \langle Y_p + Y_q, Y_p + Y_q \rangle = \frac{1}{4}(E_Y + 2F_Y + G_Y), F_X = \frac{1}{4}(E_Y - G_Y) \text{ e } G_X = \frac{1}{4}(E_Y - 2F_Y + G_Y)$$

Portanto, se $E_Y = G_Y = a^2$ e $F_Y = a^2 \cos \omega$ então

$$\begin{aligned} E_X &= \frac{a^2}{2}(1 + \cos \omega) = a^2 \cos^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) = a^2 \cos^2 \theta, \\ F_X &= 0, \\ G_X &= \frac{a^2}{2}(1 - \cos \omega) = a^2 \sin^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) = a^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Reciprocamente, $Y_p = X_u + X_v$, $Y_q = X_u - X_v$, de modo que

$$E_Y = E_X + 2F_X + G_X, F_Y = E_X - G_X, G_Y = E_X - 2F_X + G_X.$$

Como $E_X = a^2 \cos^2 \theta$, $F_X = 0$ e $G_X = a^2 \sin^2 \theta$ então

$$\begin{aligned} E_Y &= a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2, \\ F_Y &= a^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a^2 \cos 2\theta = a^2 \cos \omega, \\ G_Y &= a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2. \end{aligned}$$

□

3.2 Parametrizações principais de superfícies com curvatura constante negativa em \mathbb{R}^3

Nesta seção estabeleceremos um importante fato sobre as curvaturas principais de uma superfície em \mathbb{R}^3 com curvatura gaussiana constante negativa. A ferramenta mestra para tal serão as conhecidas equações de Mainardi-Codazzi (4.17).

Lema 3.9 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização principal de uma superfície regular M com primeira forma fundamental $I = Edu^2 + Gdv^2$ e sejam k_1 e k_2 as curvaturas principais de M . Suponhamos que X tem curvatura gaussiana constante $-a^{-2} < 0$. Então*

$$\begin{cases} E(1 + a^2 k_1^2) = e^{-2A(u)} \\ G(1 + a^2 k_2^2) = e^{-2B(v)} \end{cases} \quad (3.3)$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

de modo que

$$\begin{cases} k_1^2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{A(u)}{E} - 1 \right), \\ k_2^2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{B(v)}{G} - 1 \right). \end{cases} \quad (3.4)$$

Demonstração: Usando a primeira equação do Corolário 4.19 e que $k_1 k_2 = -a^{-2}$, segue que $k_1 \neq k_2$ e

$$\frac{E_v}{2E} = \frac{(k_1)_v}{k_2 - k_1} = \frac{k_{1v}}{-\frac{1}{a^2 k_1} - k_1} = \frac{-a^2 k_1 (k_1)_v}{1 + a^2 k_1^2}. \quad (3.5)$$

Integrando (3.5) com relação a v , obtemos

$$-\frac{1}{2} \log(1 + a^2 k_1^2) = \frac{1}{2} \log(E) + A(u), \quad (3.6)$$

onde $A(u)$ é uma constante de integração. Logo,

$$(1 + a^2 k_1^2)^{-1} = e^{2A(u)} E, \quad (3.7)$$

e assim a primeira parte do lema está demonstrada. A segunda parte se faz usando a segunda equação do Corolário 4.19. \square

Agora vamos mostrar como as curvaturas principais de uma parametrização principal com curvatura gaussiana constante negativa são expressas em termos da primeira forma fundamental.

Teorema 3.10 *Suponhamos que $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, U$ aberto, é uma parametrização principal de Chebyshev com primeira forma fundamental $I_Y = E_Y dp^2 + G_Y dq^2$ e curvatura gaussiana constante $K = -a^{-2} < 0$. Então existe uma reparametrização principal X de Y da forma*

$$X(u, v) = Y(p(u), q(v)), \quad (3.8)$$

tal que $I_X = E_X du^2 + G_X dv^2$ e as curvaturas principais de X satisfazem

$$\begin{cases} k_1^2 = \frac{a^2 - E_X}{a^2 E_X}, \\ k_2^2 = \frac{a^2 - G_X}{a^2 G_X}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Demonstração: Definamos X por (3.8) e determinamos funções de p e q tais que as

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

equações em (3.9) sejam válidas. Temos que, $X_u = p'(u)Y_p$ e $X_v = q'(v)Y_q$. Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental de X estão relacionados com os de Y por

$$\begin{cases} E_X(u, v) = p'(u)^2 E_Y(p(u), q(v)), \\ F_X(u, v) = 0, \\ G_X(u, v) = q'(v)^2 G_Y(p(u), q(v)). \end{cases} \quad (3.10)$$

Além disso,

$$X_{uu} = p''(u)Y_p + p'(u)^2 Y_{pp}, \quad X_{uv} = p'(u)q'(v)Y_{pq}, \quad X_{vv} = q''(v)Y_q + q'(v)^2 Y_{qq},$$

e então

$$\begin{cases} e(u, v) = p'(u)^2 e_Y(p(u), q(v)) \\ f(u, v) = f_Y(p(u), q(v)) = 0, \\ g(u, v) = q'(v)^2 g_Y(p(u), q(v)). \end{cases} \quad (3.11)$$

Como $F_X(u, v) = f_X(u, v) = 0$, temos que a parametrização X é principal. Sendo \bar{k}_1 e \bar{k}_2 as curvaturas principais de \mathcal{M} obtidas a partir de Y , temos

$$k_1(u, v) = \bar{k}_1(p(u), q(v)) \quad \text{e} \quad k_2(u, v) = \bar{k}_2(p(u), q(v)), \quad (3.12)$$

onde k_1 e k_2 denotam as curvaturas principais de \mathcal{M} obtidas por X .

Por (3.7), (3.10) e (3.12), temos que

$$\begin{cases} k_1(u, v)^2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{p'(u)^2 A(p(u))}{E(u, v)} - 1 \right) \\ k_2(u, v)^2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{q'(v)^2 B(q(v))}{G(u, v)} - 1 \right) \end{cases}$$

Finalmente, basta escolher $p(u)$ e $q(v)$ tais que

$$p'(u)^2 A(p(u)) = q'(v) B(q(v)) = a^2,$$

donde segue (3.9). □

Por fim, vamos demonstrar a existência de parametrização de Chebyshev de uma superfície em \mathbb{R}^3 com curvatura gaussiana constante (negativa).

Teorema 3.11 *Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular com $K = -a^{-2} < 0$. Denote por 2θ o ângulo entre dois vetores assintóticos. Em uma vizinhança de cada ponto de \mathcal{M} existe uma parametrização principal $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$, U aberto, tal que,*

1. A métrica de X é dada por $I_X = a^2(\cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2)$.

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

2. As curvaturas principais satisfazem $k_1^2 = \left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{a}\right)^2$ e $k_2^2 = \left(\frac{\operatorname{cotg}\theta}{a}\right)^2$.

3. A curvatura média é $H = \pm \frac{1}{a \operatorname{sen}(2\theta)}$.

4. A segunda forma fundamental de X é dada por $II = \pm a \operatorname{sen}\theta \cos\theta (du^2 - dv^2)$.

Demonstração: Como $K < 0$ então não há pontos umbílicos¹ em \mathcal{M} , de modo que é possível escolher uma parametrização principal para \mathcal{M} , que pode ser normalizada de acordo com o Teorema 3.10. Além disso, como todos os pontos de \mathcal{M} são hiperbólicos² então em cada ponto $p \in \mathcal{M}$ passam exatamente duas linhas assintóticas. Sendo 2θ o ângulo entre estas linhas, $e_1(p)$ e $e_2(p)$ as direções principais (unitárias) correspondentes a $k_1(p)$ e $k_2(p)$, respectivamente, temos que o ângulo entre as linhas de curvatura em p e $e_1(p)$ é igual a θ . Segue da Fórmula de Euler que

$$\operatorname{tg}^2\theta = -\frac{k_1}{k_2} = \frac{-k_1^2}{K} = a^2 k_1^2.$$

Assim, $k_1^2 = \left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{a}\right)^2$ e, como $K = k_1 k_2 = -a^{-2}$, concluímos que $k_2^2 = \left(\frac{\operatorname{cotg}\theta}{a}\right)^2$. De $k_1^2 = \frac{a^2 - E}{a^2 E} = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{a^2}$ e $k_2^2 = \frac{a^2 - G}{a^2 G} = \frac{\operatorname{cotg}^2\theta}{a^2}$, temos que $E = a^2 \cos^2\theta$ e $G = a^2 \operatorname{sen}^2\theta$, de modo que a métrica de X é dada por

$$I_X = a^2(\cos^2\theta du^2 + \operatorname{sen}^2\theta dv^2).$$

Para (3), temos que,

$$H = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{a} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{a} \right) = \pm \frac{1}{a \operatorname{sen}(2\theta)}$$

Sejam e, f e g os coeficientes da segunda forma fundamental de X . Pelo Lema 2.5, $f = 0$. Para provar (4), vamos usar o fato de que considerando $F = 0$ nas equações de Weingarten (4.3), encontramos que as curvaturas principais são $k_1 = \frac{e}{E}$ e $k_2 = \frac{g}{G}$. Consequentemente,

$$e = k_1 E = \pm a^2 \cos^2\theta \frac{\operatorname{tg}\theta}{a} = \pm \cos\theta \operatorname{sen}\theta.$$

¹Um ponto p de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito ser *umbílico* se as curvaturas principais em p coincidem.

²Um ponto p de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, é dito *hiperbólico* se $K(p) < 0$, ou equivalentemente, as curvaturas principais têm sinais opostos.

E,

$$g = k_2 G = \mp \frac{\cotg \theta}{a} a^2 \sen^2 \theta = \mp a \sen \theta \cos \theta,$$

donde temos (4). □

3.3 Equação Seno-Gordon

De acordo com Lema 3.7, encontrar parametrizações principais de Chebyshev de uma superfície com curvatura gaussiana constante negativa $K = -a^{-2}$ está relacionado a determinar soluções de uma equação diferencial parcial não-linear

$$\theta_{uu} - \theta_{vv} = \sen \theta \cos \theta \quad (3.13)$$

que é conhecida como equação Seno-Gordon.

Por meio de uma mudança de variáveis $u = p + q$ e $v = p - q$ e $\omega = 2\theta$, temos que

$$\omega_{pq} = 2\theta_{pq} = 2(\theta_{uu} - \theta_{vv}) = 2 \sen \theta \cos \theta = \sen \omega,$$

que é uma outra versão da equação Seno-Gordon. Os detalhes estão na Seção 4.3 do Apêndice.

De acordo com o Lema 3.3, encontrar parametrizações assintóticas de Chebyshev de uma superfície com curvatura gaussiana constante negativa $K = -a^{-2}$ está relacionado a determinar soluções da equação Seno-Gordon na segunda versão.

A garantia de existência de soluções segue de um teorema de existência de soluções para a equação Seno-Gordon.

Lema 3.12 *Seja θ uma solução de (3.13), dependendo somente de u . Então*

$$\theta_u^2 = b^2 - \cos^2 \theta, \quad (3.14)$$

em que b é uma constante real.

Demonstração: Como θ é função somente de u , então podemos multiplicar (3.13) por θ_u e escrevemos

$$2\theta_{uu}\theta_u = -(-2 \sen \theta \cos \theta)\theta_u. \quad (3.15)$$

Integrando (3.15), obtemos (3.14). □

3.4 Parametrização de Chebyshev de uma superfície de curvatura constante negativa

O próximo resultado nos dá uma identidade trigonométrica que utilizaremos nesta seção.

Lema 3.13 *Seja $a = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)$. Então $\operatorname{sen}\psi = \operatorname{secha}$ e $\operatorname{cos}\psi = -\operatorname{tgha}$.*

Demonstração: De fato, usando as definições de secante e tangente hiperbólicas segue que

$$\operatorname{secha} = \frac{2}{e^a + e^{-a}} = \frac{2}{\operatorname{tg}(\psi/2) + \operatorname{cotg}(\psi/2)} = 2 \operatorname{sen}(\psi/2) \operatorname{cos}(\psi/2) = \operatorname{sen}\psi,$$

e

$$\operatorname{tgha} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = \frac{\operatorname{tg}(\psi/2) - \operatorname{cotg}(\psi/2)}{\operatorname{tg}(\psi/2) + \operatorname{cotg}(\psi/2)} = \operatorname{sen}^2(\psi/2) - \operatorname{cos}^2(\psi/2) = -\operatorname{cos}\psi.$$

□

Vamos agora determinar a forma geral de uma parametrização principal de Chebyshev de uma superfície de revolução com curvatura gaussiana constante negativa.

Teorema 3.14 *Sejam \mathcal{M} uma superfície de revolução com $K = -a^{-2} < 0$ e θ uma função ângulo satisfazendo $\theta_v = 0$ e (3.14). Uma parametrização principal de Chebyshev de \mathcal{M} é dada por*

$$X(u, v) = \left(\frac{a}{b} \operatorname{sen}(\theta(u)) \operatorname{cos}(\beta v), \frac{a}{b} \operatorname{sen}(\theta(u)) \operatorname{sen}(\beta v), \psi(u) \right), \quad (3.16)$$

onde

$$\psi'(u) = \pm \frac{a}{b} \operatorname{cos}^2(\theta(u)). \quad (3.17)$$

Demonstração: A superfície de revolução \mathcal{M} pode ser parametrizada localmente por

$$X(u, v) = (\alpha \operatorname{sen}(\theta(u)) \operatorname{cos}(\beta v), \alpha \operatorname{sen}(\theta(u)) \operatorname{sen}(\beta v), \psi(u)), \quad (3.18)$$

para certos α, β são constantes e alguma função ψ . Calculamos

$$\begin{cases} X_u(u, v) = (\alpha \operatorname{cos}(\theta) \theta_u \operatorname{cos}(\beta v), \alpha \operatorname{cos}(\theta) \theta_u \operatorname{sen}(\beta v), \psi'(u)) \\ X_v(u, v) = (-\alpha \beta \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\beta v), \alpha \beta \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{cos}(\beta v), 0). \end{cases}$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

Para que X seja uma parametrização principal de Chebyshev deve ocorrer $a^2 \cos^2(\theta) = E = \alpha^2 \cos^2(\theta)\theta_u^2 + \psi'(u)^2$ e $a^2 \sin^2\theta = G = \alpha^2 \beta^2 \sin^2\theta$, implicando $\alpha^2 \beta^2 = a^2$.

A condição de \mathcal{M} ter curvatura gaussiana constante negativa é (3.14) e temos que

$$\psi'(u)^2 = \cos^2 \theta (a^2 - \alpha^2 b^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta).$$

Assim, tomando $\alpha = a/b$ e $\beta = b$, obtemos (3.17). □

Agora, um caso especial a se considerar quando $b^2 = 1$.

Teorema 3.15 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização principal de Chebyshev com raio $a > 0$ cuja a função ângulo θ satisfaz as equações diferenciais parciais*

$$\theta_u^2 = \sin^2 \theta \quad e \quad \theta_v = 0. \quad (3.19)$$

Suponha ainda que X seja uma parametrização padrão de uma superfície de rotação, ou seja,

$$X(u, v) = (\phi(u) \cos v, \phi(u) \sin v, \psi(u)). \quad (3.20)$$

Então

1. X tem curvatura gaussiana constante negativa $-a^{-2}$.
2. ϕ e ψ são dadas por $\phi(u) = \alpha a \operatorname{sech}(u + C)$ e $\psi(u) = \beta a(u + B - \operatorname{tgh}(u + C))$, onde α e β são ± 1 e B, C são constantes.
3. A menos de um movimento rígido, X é uma reparametrização de uma pseudoesfera de raio a .
4. Cada função ângulo é dada por $\theta = 2\delta \operatorname{arctg}(e^{\gamma(u+C)})$, onde γ e δ são ± 1 .

Demonstração: De (3.19), temos que $\theta_{uu} = \sin\theta \cos\theta$. Pelo Lema 3.7, X tem curvatura gaussiana $K = -a^{-2} < 0$, provando (1). Além disso, a primeira equação de (3.19) pode ser reescrita como

$$\theta_u = \gamma \sin\theta, \quad (3.21)$$

com $\gamma = \pm 1$, cuja solução é

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| = \frac{1}{|\operatorname{cossec}\theta + \operatorname{cotg}\theta|} = e^{\gamma(u+C)},$$

onde C é uma constante, donde segue (4).

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

Assim, pelo Lema 3.13, temos que

$$\gamma\theta_u = \text{sen}\theta = \delta \text{sen}(\delta\theta) = \delta \text{sech}(\gamma(u+C)) = \delta \text{sech}(u+C) \quad (3.22)$$

e

$$\cos\theta = \cos(\delta\theta) = -\text{tgh}(\gamma(u+C)) = -\gamma \text{tgh}(u+C). \quad (3.23)$$

Agora, suponhamos que X é dada por (3.20), de modo que

$$G = \phi(u)^2 \quad \text{e} \quad E = \phi'(u)^2 + \psi'(u)^2.$$

Para X ser uma parametrização principal de Chebyshev, devemos ter que $\phi(u)^2 = G = a^2 \text{sen}^2\theta$, de modo que

$$\phi(u) = \alpha a \text{sen}\theta, \quad (3.24)$$

com $\alpha = \pm 1$. De (3.22) e (3.24) segue que

$$\phi(u) = \alpha \delta a \text{sech}(u+C). \quad (3.25)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $\delta = 1$ em (3.25) e assim obtemos a primeira equação de (2).

Similarmente, o fato que $\phi'(u)^2 + \psi'(u)^2 = E = a^2 \cos^2\theta$, combinado com (3.24) e (3.21), implicam que

$$\psi'(u)^2 = E - \phi'(u)^2 = a^2 \cos^2\theta - a^2(\cos^2\theta)\theta_u^2 = a^2(\cos^2\theta)(1 - \theta_u^2) = a^2 \cos^4\theta. \quad (3.26)$$

De (3.26) e (3.23) temos que $\psi'(u)^2 = a^2(\text{tgh}(u+C))^4$, de modo que

$$\psi'(u) = \beta a(\text{tgh}(u+C))^2, \quad (3.27)$$

com $\beta = \pm 1$. Integrando (3.27), obtemos

$$\psi(u) = \beta a(u+B - \text{tgh}(u+C)), \quad (3.28)$$

onde B é uma constante de integração, assim concluímos (2).

Consequentemente, (3.20) torna-se

$$X(u,v) = a\left(\frac{\alpha \cos v}{\cosh(u+C)}, \frac{\alpha \text{sen} v}{\cosh(u+C)}, \beta(u+B - \text{tgh}(u+C))\right)$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

onde α e β são ± 1 . Uma translação ao longo do eixo z combinada com uma mudança de variáveis $u \mapsto u - C$ transforma $X(u, v)$ obtida anteriormente em

$$X(u, v) = a \left(\frac{\alpha \cos v}{\cosh u}, \frac{\alpha \operatorname{sen} v}{\cosh u}, \beta(u - \operatorname{tgh} u) \right). \quad (3.29)$$

Fazendo $u = \ln \operatorname{tg} \frac{q}{2}$ e $v = p + \pi(\alpha - 1)/2$ e usando o Lema 3.13, obtemos

$$\operatorname{sech} u = \operatorname{sen} q \quad \text{e} \quad u - \operatorname{tgh} u = \cos q + \ln \operatorname{tg}(q/2).$$

Além disso, $\alpha \cos v = \cos p$ e $\alpha \operatorname{sen} v = \operatorname{sen} p$. Assim, segue que

$$X(p, q) = a \left(\cos p \operatorname{sen} q, \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q, \beta \left(\cos q + \ln \left(\operatorname{tg} \frac{q}{2} \right) \right) \right). \quad (3.30)$$

Quando $\beta = 1$, $X(p, q)$ é a parametrização usual de uma pseudoesfera. Ao tomarmos $\beta = -1$, obtemos alguma pseudoesfera refletida no plano xy , e assim (3) segue. \square

A próxima definição é motivada a partir de (3.29), com $\alpha = \beta = 1$.

Definição 3.16 *Seja $a > 0$. A parametrização principal de Chebyshev de uma pseudoesfera de raio a é aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 dada por*

$$X(u, v) = a \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\operatorname{sen} v}{\cosh u}, u - \operatorname{tgh} u \right). \quad (3.31)$$

Cada função ângulo de uma pseudoesfera é dada por $\theta(u) = \pm 2 \operatorname{arctg}(e^{\pm u})$.

A parametrização assintótica de Chebyshev de uma pseudoesfera pode ser encontrada substituindo-se $u = p + q$ e $v = p - q$ em (3.31). Isto é,

$$(p, q) \mapsto a \left(\frac{\cos(p - q)}{\cosh(p + q)}, \frac{\operatorname{sen}(p - q)}{\cosh(p + q)}, p + q - \operatorname{tgh}(p + q) \right). \quad (3.32)$$

3.4.1 A Transformada de Bianchi

Definição 3.17 *Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular com curvatura gaussiana constante $K = -a^{-2} < 0$. Dizemos que uma superfície \mathcal{N} com campo vetorial normal $N_{\mathcal{N}}$ é uma transformada de Bianchi de \mathcal{M} se existe $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ tal que para cada ponto $p \in \mathcal{M}$ valem as condições:*

1. $\|\Phi(p) - p\| = a$;
2. $\Phi(p) - p$ é paralelo a um vetor tangente a \mathcal{M} em p ;

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

3. $N_{\mathcal{N}}(\Phi(p))$ é paralelo a um vetor tangente a \mathcal{M} em p e perpendicular a $\Phi(p) - p$.

Bianchi denominou \mathcal{N} de superfície complementar de \mathcal{M} .

Lema 3.18 *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização principal de Chebyshev de uma superfície \mathcal{M} em \mathbb{R}^3 com $K = -a^{-2} < 0$ e θ uma função qualquer tal que $k_1 = (-\operatorname{tg}\theta)/a$, de modo que*

$$E = (a \cos \theta)^2 \quad e \quad G = (a \operatorname{sen} \theta)^2,$$

como no Teorema 3.11. Seja $Y = \Phi \circ X$ uma reparametrização de X que satisfaz as condições (1) e (2) da Definição 3.17. Então existe uma função $\bar{\theta} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, tal que

$$Y = X + \frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta} X_u + \frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}}{\operatorname{sen} \theta} X_v. \quad (3.33)$$

Chamamos $\bar{\theta}$ de uma função ângulo da transformada de Bianchi relativa a θ .

Demonstração: A condição (2) da Definição 3.17 implica que existem funções A e B tais que $Y = X + AX_u + BX_v$, com $p = X(q)$, para algum $q \in U$. Então pela condição (1) da Definição 3.17 temos que,

$$a^2 = \|Y - X\|^2 = A^2 \|X_u\|^2 + B^2 \|X_v\|^2 = a^2 (A^2 \cos^2 \theta + B^2 \operatorname{sen}^2 \theta),$$

pois a parametrização X é principal.

Assim, podemos tomar A e B como sendo $A = \frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta}$ e $B = \frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}}{\operatorname{sen} \theta}$, e portanto o resultado segue. \square

Agora, vamos obter um par de equações diferenciais parciais (chamadas as equações de Bianchi-Darboux) relacionando θ e $\bar{\theta}$. Elas decorrem da condição (3) da Definição 3.17 de transformada de Bianchi.

Teorema 3.19 *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização principal de Chebyshev de uma superfície \mathcal{M} em \mathbb{R}^3 com $K = -a^{-2}$, como no Teorema 3.11 e Y uma reparametrização de X dada por (3.33). Então Y é uma transformada de Bianchi de X se, e somente se,*

$$\begin{cases} \bar{\theta}_u + \theta_v = \operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \theta, \\ \bar{\theta}_v + \theta_u = -\cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta. \end{cases} \quad (3.34)$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

Demonstração: Suponhamos que Y seja uma transformada de Bianchi de X , tal que Y é dada por (3.33). Derivando Y com relação a u , obtemos

$$Y_u = X_u + \left(\frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta} \right)_u X_u + \frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta} X_{uu} + \left(\frac{\sin \bar{\theta}}{\sin \theta} \right)_u X_v + \frac{\sin \bar{\theta}}{\sin \theta} X_{uv}.$$

De acordo com o Teorema 3.11 e as equações (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) temos

$$X_{uu} = -(\operatorname{tg} \theta) \theta_u X_u + (\operatorname{cotg} \theta) \theta_v X_v - a \sin \theta \cos \theta N \quad \text{e} \quad X_{uv} = -(\operatorname{tg} \theta) \theta_v X_u + (\operatorname{cotg} \theta) \theta_u X_v,$$

e, conseqüentemente,

$$Y_u = AX_u + BX_v - a \sin \theta \cos \bar{\theta} N \quad (3.35)$$

onde,

$$A = 1 + \left(\frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta} \right)_u - \frac{(\sin \theta \cos \bar{\theta}) \theta_u}{\cos^2 \theta} - \frac{(\sin \bar{\theta}) \operatorname{tg} \theta \theta_v}{\sin \theta} = \frac{\cos \theta - (\bar{\theta}_u + \theta_v) \sin \bar{\theta}}{\cos \theta}$$

e

$$B = \left(\frac{\sin \bar{\theta}}{\sin \theta} \right)_u + \frac{(\cos \bar{\theta}) \theta_v}{\sin \theta} + \frac{(\sin \bar{\theta} \cos \theta) \theta_u}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos \bar{\theta} (\bar{\theta}_u + \theta_v)}{\sin \theta}.$$

Procedendo de modo análogo para Y_v , obtemos

$$\begin{cases} Y_u = \frac{\cos \theta - \sin \bar{\theta} (\bar{\theta}_u + \theta_v)}{\cos \theta} X_u + \frac{\cos \bar{\theta} (\bar{\theta}_u + \theta_v)}{\sin \theta} X_v - a \sin \theta \cos \bar{\theta} N, \\ Y_v = -\frac{\sin \bar{\theta} (\bar{\theta}_v + \theta_u)}{\cos \theta} X_u + \frac{\sin \theta + \cos \bar{\theta} (\bar{\theta}_v + \theta_u)}{\sin \theta} X_v + a \sin \bar{\theta} \cos \theta N. \end{cases}$$

Seja N_Y o campo normal unitário de Y . Então a condição (3) da Definição 3.17 e a equação (3.33) implicam que

$$N_Y = -\frac{\sin \bar{\theta}}{a \cos \theta} X_u + \frac{\cos \bar{\theta}}{a \sin \theta} X_v. \quad (3.36)$$

Temos que

$$\begin{aligned}\langle Y_u, N_Y \rangle &= \frac{-\operatorname{sen}\bar{\theta} \cos \theta + \operatorname{sen}^2\bar{\theta}(\bar{\theta}_u + \theta_v)}{a \cos^2 \theta} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{\cos^2 \bar{\theta}(\bar{\theta}_u + \theta_v)}{a \operatorname{sen}^2 \theta} \langle X_v, X_v \rangle \\ &= a(-\operatorname{sen}\bar{\theta} \cos \theta + \bar{\theta}_u + \theta_v)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle Y_v, N_Y \rangle &= \frac{\operatorname{sen}^2\bar{\theta}(\bar{\theta}_v + \theta_u)}{a \cos^2 \theta} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{\cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta + \cos^2 \bar{\theta}(\bar{\theta}_v + \theta_u)}{a \operatorname{sen}^2 \theta} \langle X_v, X_v \rangle \\ &= a(\cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta + \bar{\theta}_v + \theta_u)\end{aligned}$$

Como $\langle Y_v, N_Y \rangle = \langle Y_u, N_Y \rangle = 0$, obtemos (3.34).

Reciprocamente, suponhamos que Y seja dada por (3.33) e que valem as equações em (3.34). As condições (1) e (2) da Definição 3.17 são garantidas pela expressão de Y . Além disso, temos que

$$\begin{cases} Y_u = \cos^2 \bar{\theta} X_u + \cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \bar{\theta} \cotg \theta X_v - a \operatorname{sen} \theta \cos \bar{\theta} N, \\ Y_v = \operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \operatorname{tg} \theta X_u + \operatorname{sen}^2 \bar{\theta} X_v + a \operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \theta N. \end{cases} \quad (3.37)$$

Definindo N_Y por (3.36), temos que N_Y satisfaz a condição (3) da Definição 3.17, uma vez que N_Y se escreve em função de X_u e X_v e $\langle N_Y, \Phi(p) - p \rangle = 0$. Portanto, Y é uma transformada de Bianchi de X . \square

Teorema 3.20 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização principal de Chebyshev de uma superfície \mathcal{M} em \mathbb{R}^3 com $K = -a^{-2}$, onde $a > 0$. Seja $\bar{\theta}$ uma função ângulo de uma transformada de Bianchi Y de X . Então Y é uma parametrização principal de Chebyshev com curvatura constante $-a^{-2}$ e $\bar{\theta}$ é uma função ângulo de Y .*

Demonstração: De (3.34), temos que

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{uu} - \bar{\theta}_{vv} &= \frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \theta - \theta_v) - \frac{\partial}{\partial v}(-\cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta - \theta_u) \\ &= \bar{\theta}_u \cos \bar{\theta} \cos \theta - \theta_u \operatorname{sen} \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta - \bar{\theta}_v \operatorname{sen} \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta + \theta_v \cos \bar{\theta} \cos \theta \\ &= (\bar{\theta}_u + \theta_v) \cos \bar{\theta} \cos \theta - (\bar{\theta}_v + \theta_u) \operatorname{sen} \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta \\ &= \operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \bar{\theta}.\end{aligned}$$

Tomando-se Y como em (3.33), segue de (3.37) que

$$\langle Y_u, Y_u \rangle = a^2 \cos^2 \bar{\theta}, \quad \langle Y_u, Y_v \rangle = 0 \quad e \quad \langle Y_v, Y_v \rangle = a^2 \operatorname{sen}^2 \bar{\theta},$$

donde segue que Y é uma parametrização principal de Chebyshev, com função ân-

gulo dada por $\bar{\theta}$. Daí, pelo Lema 3.7, temos que Y tem curvatura gaussiana constante igual a $K = -a^{-2}$. \square

3.5 Referencial móvel de uma superfície em \mathbb{R}^3

Um dos primeiros tópicos abordados em cursos elementares de Geometria Diferencial é o estudo de curvas no espaço. Para tal, o referencial de Frenet é uma peça fundamental para caracterização de curvas espaciais por meio de sua curvatura e torção, com o uso dos vetores tangente, normal e binormal à curva em cada ponto. O que faremos nessa seção é semelhante a isso, ou seja, construiremos uma base do \mathbb{R}^3 para estudar parametrizações principais. O referencial que obteremos é, na verdade, uma variante do triedro de Darboux³

Definição 3.21 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, U$ aberto, uma parametrização principal de uma superfície regular $\mathcal{M} = X(u)$ com primeira forma fundamental $I = Edu^2 + Gdv^2$. Para cada ponto $p \in \mathcal{M}$, sejam*

$$e_1(p) = \frac{X_u}{\sqrt{E}} \quad e \quad e_2(p) = \frac{X_v}{\sqrt{G}}.$$

Sendo $N(p)$ o vetor normal unitário de X , a base $\{e_1(p), e_2(p), N(p)\}$ é chamada de referencial ortonormal móvel de X .

Assim como procedemos no estudo das equações de Frenet, em que escrevemos as derivadas dos vetores tangente, normal e binormal em termos dos vetores do Triedro de Frenet, faremos aqui um processo similar.

Teorema 3.22 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, U$ aberto, uma parametrização principal com primeira forma fundamental $I = Edu^2 + Gdv^2$. As derivadas parciais de e_1, e_2 e N satisfazem*

³Seja S uma superfície orientável e $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação normal de Gauss em S . Se $\alpha : I \rightarrow S$ é uma geodésica em S parametrizada pelo comprimento de arco definida em um intervalo de \mathbb{R} , definimos as aplicações $T, N, B : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$T(s) = \alpha'(s) \quad N(s) = (N \circ \alpha)(s) \quad e \quad B(s) = T(s) \times N(s).$$

Então $\{T(s), N(s), B(s)\}$ formam uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 , a qual chamamos de Triedro de Darboux. Para mais detalhes, veja [5] ou [11].

$$\begin{cases} (e_1)_u = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}e_2 + \frac{e}{\sqrt{E}}N, & (e_1)_v = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}e_2, \\ (e_2)_u = \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}e_1, & (e_2)_v = -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}e_1 + \frac{g}{\sqrt{G}}N, \\ N_u = -\frac{e}{\sqrt{E}}e_1, & N_v = -\frac{g}{\sqrt{G}}e_2. \end{cases} \quad (3.38)$$

Demonstração: Ver a seção (4.4) do Apêndice. \square

Corolário 3.23 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, U$ aberto, uma parametrização principal de Chebyshev com primeira forma fundamental $I = Edu^2 + Gdv^2$. Então:*

$$\begin{cases} (e_1)_u = \theta_v e_2 - \text{sen}\theta N, & (e_1)_v = \theta_u e_2, \\ (e_2)_u = -\theta_v e_1, & (e_2)_v = -\theta_u e_1 + \text{cos}\theta N, \\ N_u = \text{sen}\theta e_1, & N_v = -\text{cos}\theta e_2. \end{cases}$$

Demonstração: Consequência do Teorema 3.22 e da Definição 3.5. \square

Lema 3.24 *Nas mesmas condições do Teorema 3.20, o referencial móvel da transformada de Bianchi Y de X é dado por $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{N}\}$, onde*

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \text{cos}\theta \text{cos}\bar{\theta}e_1 + \text{cos}\theta \text{sen}\bar{\theta}e_2 - \text{sen}\theta N, \\ \bar{e}_2 = \text{sen}\theta \text{cos}\bar{\theta}e_1 + \text{sen}\theta \text{sen}\bar{\theta}e_2 + \text{cos}\theta N, \\ \bar{N} = -\text{sen}\bar{\theta}e_1 + \text{cos}\bar{\theta}e_2. \end{cases}$$

Demonstração: Segue de (3.36), da Definição 3.21 e do fato de X ser parametrização principal de Chebyshev. \square

3.6 Construção de uma pseudoesfera usando a transformada de Bianchi

Vamos aplicar a transformada de Bianchi a uma parametrização singular

$$X(u, v) = (0, 0, \epsilon au), \quad (3.39)$$

onde $a > 0$ é uma constante e $\epsilon = \pm 1$, que corresponde à parametrização de uma reta vertical. Embora não seja possível construir um referencial ortonormal móvel, como na Definição 3.21, podemos tomar

$$e_1 = (0, 0, 1), \quad e_2 = (\text{cos}v, \text{sen}v, 0) \quad \text{e} \quad N = (-\text{sen}v, \text{cos}v, 0). \quad (3.40)$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

A fim de construir a transformada de Bianchi, consideramos $X_u = \epsilon a e_1 = a \cos \theta e_1$, onde θ é uma função ângulo de X e $\cos \theta = \epsilon$ e $\sin \theta = 0$. De (3.34), temos

$$\bar{\theta}_u = \epsilon \operatorname{sen} \bar{\theta} \quad \text{e} \quad \bar{\theta}_v = 0.$$

Integrando a primeira equação e tomando-se a constante de integração como sendo 0, temos

$$\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\delta \bar{\theta}}{2} \right) = \epsilon u,$$

onde $\delta = \pm 1$. Portanto, existem quatro possíveis parametrizações para a transformada de Bianchi. Pelo Lema 3.13 obtemos

$$\begin{cases} \cos \bar{\theta} = \cos(\delta \bar{\theta}) = -\operatorname{tgh}(\epsilon u) = -\epsilon \operatorname{tgh} u, \\ \operatorname{sen} \bar{\theta} = \delta \operatorname{sen}(\delta \bar{\theta}) = \delta \operatorname{sech}(\epsilon u) = \delta \operatorname{sech} u. \end{cases} \quad (3.41)$$

A transformada de Bianchi resultante de (3.39) é então dada por

$$\begin{aligned} Y &= X + a(\cos \bar{\theta} e_1 + \operatorname{sen} \bar{\theta} e_2) \\ &= a(\epsilon(0, 0, u) - \epsilon \operatorname{tgh} u(0, 0, 1) + \delta \operatorname{sech} u(\cos v, \operatorname{sen} v, 0)) \\ &= a(\delta \cos v \operatorname{sech} u, \delta \operatorname{sen} v \operatorname{sech} u, \epsilon(u - \operatorname{tgh} u)). \end{aligned}$$

Consequentemente Y coincide com a parametrização

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{a\delta \cos v}{\cosh u}, \frac{a\delta \operatorname{sen} v}{\cosh u}, a\epsilon(u - \operatorname{tgh} u) \right). \quad (3.42)$$

Assim (3.42) parametriza uma pseudoesfera e coincide com (3.31) se $\delta = \epsilon = 1$.

3.7 A superfície de Kuen como a transformada de Bianchi da pseudoesfera

Lema 3.25 *Seja Y uma transformada de Bianchi de uma parametrização principal de Chebyshev da pseudoesfera. Considerando $\theta = 2 \arctg(e^u)$ e $\bar{\theta}$ uma função ângulo de Y , então*

$$\bar{\theta}(u, v) = 2 \arctg \left(-\frac{v}{\cosh u} \right). \quad (3.43)$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

Demonstração: Segue do Lema 3.13 que

$$\cos \theta = -\operatorname{tgh} u \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sech} u. \quad (3.44)$$

Além disso,

$$\theta_u = \frac{2e^u}{1+e^{2u}} = \operatorname{sech} u \quad \text{e} \quad \theta_v = 0. \quad (3.45)$$

De (3.34), (3.44) e (3.45) temos que,

$$\bar{\theta}_u = -\operatorname{sen} \bar{\theta} \operatorname{tgh} u, \quad (3.46)$$

e

$$\bar{\theta}_v + \operatorname{sech} u = -\cos \bar{\theta} \operatorname{sech} u. \quad (3.47)$$

A solução da equação diferencial (3.46) é

$$\ln \operatorname{tg} \left| \frac{\bar{\theta}}{2} \right| = - \int \operatorname{tgh} u \, du = -\ln \cosh u + \ln A(v),$$

ou ainda

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma \bar{\theta}}{2} \right) = A(v) (\operatorname{sech} u), \quad (3.48)$$

onde $\gamma = \pm 1$ e $A(v)$ é uma constante de integração. A equação (3.47) pode ser reescrita como

$$\bar{\theta}_v = -2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sech} u. \quad (3.49)$$

Derivando-se a equação (3.48), obtemos

$$\frac{\gamma}{2} \sec^2 \left(\frac{\gamma \bar{\theta}}{2} \right) \bar{\theta}_v = A'(v) \operatorname{sech} u.$$

Substituindo (3.49) nesta equação, concluímos que $\gamma A(v) = -v$, e então (3.43). \square

Lema 3.26 *Seja $\bar{\theta}$ dada por (3.43), então*

$$\begin{cases} \cos \bar{\theta} = -\frac{v^2 - \cosh^2 u}{v^2 + \cosh^2 u}, \\ \operatorname{sen} \bar{\theta} = \frac{-2v \cosh u}{v^2 + \cosh^2 u}. \end{cases} \quad (3.50)$$

Demonstração: De (3.43) obtemos

$$\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{-\bar{\theta}}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{v}{\cosh u}\right).$$

Então, do Lema 3.13 segue que,

$$\cos \bar{\theta} = -\operatorname{tgh}\left(\ln\left(\frac{-v}{\cosh u}\right)\right) = -\frac{v^2 - \cosh^2 u}{v^2 + \cosh^2 u}.$$

E,

$$\operatorname{sen} \bar{\theta} = -\operatorname{sech}\left(\ln\left(\frac{-v}{\cosh u}\right)\right) = \frac{-2v \cosh u}{v^2 + \cosh^2 u}.$$

□

Teorema 3.27 *A transformada de Bianchi da pseudoesfera (3.31) é dada a partir da parametrização*

$$Y(u, v) = a\left(\frac{2 \cosh u (\cos v + v \operatorname{sen} v)}{v^2 + \cosh^2 u}, \frac{2 \cosh u (\operatorname{sen} v - v \cos v)}{v^2 + \cosh^2 u}, u - \frac{\operatorname{sech}(2u)}{v^2 + \cosh^2 u}\right)$$

Demonstração: Seguindo a mesma notação da prova do Lema 3.25 e usando (3.41), temos que

$$\theta = 2 \operatorname{arctg}(e^u), \quad \cos \theta = -\operatorname{tgh} u, \quad \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sech} u. \quad (3.51)$$

Como

$$\begin{cases} X &= (a \cos v \operatorname{sech} u, a \operatorname{sen} v \operatorname{sech} u, a(u - \operatorname{tgh} u)), \\ X_u &= (-a \cos v \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u, -a \operatorname{sen} v \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u, a \operatorname{tgh}^2 u), \\ X_v &= (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sech} u, a \cos v \operatorname{sech} u, 0). \end{cases}$$

Segue de (3.51) que

$$\begin{cases} \frac{X_u}{\cos \theta} &= a(\cos v \operatorname{sech} u, \operatorname{sen} v \operatorname{sech} u, -\operatorname{tgh} u), \\ \frac{X_v}{\operatorname{sen} \theta} &= a(-\operatorname{sen} v, \cos v, 0). \end{cases} \quad (3.52)$$

De (3.43) e (3.50) podemos escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta} = 2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{v}{\cosh u}\right), \\ \cos \bar{\theta} = -\frac{v^2 - \cosh^2 u}{v^2 + \cosh^2 u}, \\ \operatorname{sen} \bar{\theta} = -\frac{2v \cosh u}{v^2 + \cosh^2 u}. \end{array} \right. \quad (3.53)$$

A segunda equação em (3.53) implica que

$$1 + \cos \bar{\theta} = 1 - \frac{v^2 - \cosh^2 u}{v^2 + \cosh^2 u} = \frac{2 \cosh^2 u}{v^2 + \cosh^2 u}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} Y &= X + \frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta} X_u + \frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}}{\operatorname{sen} \theta} X_v \\ &= a((1 + \cos \bar{\theta}) \cos v \operatorname{sech} u - \operatorname{sen} \bar{\theta} \operatorname{sen} v, \\ &\quad (1 + \cos \bar{\theta}) \operatorname{sen} v \operatorname{sech} u + \operatorname{sen} \bar{\theta} \cos v, u - (1 + \cos \bar{\theta}) \operatorname{tgh} u), \end{aligned}$$

assim obtemos o resultado desejado. \square

3.8 A Transformada de Bäcklund

Bäcklund generalizou a transformada de Bianchi, como a seguir.

Definição 3.28 *Seja \mathcal{M} uma superfície em \mathbb{R}^3 com curvatura gaussiana constante e negativa $-a^{-2}$. Dizemos que a superfície \mathcal{N} com campo normal $N_{\mathcal{N}}$ é a transformada de Bäcklund de \mathcal{M} de inclinação σ se existe uma aplicação $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ tal que para $p \in \mathcal{M}$ as condições abaixo são verificadas:*

1. $\|\Phi(p) - p\| = a \cos \sigma$;
2. $\Phi(p) - p$ é paralelo ao vetor tangente a \mathcal{M} em p ;
3. $N_{\mathcal{N}}(p)$ é perpendicular a $\Phi(p) - p$;
4. O ângulo entre os normais $N_{\mathcal{M}}(p)$ e $N_{\mathcal{N}}(\Phi(p))$ é $\pi/2 - \sigma$.

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

Lema 3.29 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização principal de Chebyshev da superfície \mathcal{M} em \mathbb{R}^3 com $K = -a^{-2} < 0$ e seja $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função tal que $ak_1 = -\operatorname{tg}\theta$, de modo que*

$$E = (a \cos \theta)^2 \quad e \quad G = (a \operatorname{sen} \theta)^2.$$

Seja $Y = \Phi \circ X$ uma parametrização que satisfaz (1) e (2) da Definição 3.28. Então existe uma função $\bar{\theta} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de tal modo que

$$Y = X + \cos \sigma \left(\frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta} X_u + \frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}}{\operatorname{sen} \theta} X_v \right). \quad (3.54)$$

Chamamos $\bar{\theta}$ a função ângulo da transformada de Bäcklund com inclinação σ em relação a θ .

Demonstração: A condição (2) da Definição 3.28 implica que existem funções A e B tais que $Y = X + AX_u + BX_v$. Então pela condição (1) da Definição 3.28 temos que

$$a^2 \cos^2 \sigma = \|Y - X\|^2 = A^2 \|X_u\|^2 + B^2 \|X_v\|^2 = a^2 (A^2 \cos^2 \theta + B^2 \operatorname{sen}^2 \theta)$$

Tomando-se A e B como $A = \cos \sigma \frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta}$ e $B = \cos \sigma \frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}}{\operatorname{sen} \theta}$, encontramos Y . □

As equações de Bianchi-Darboux (3.34) são generalizadas no próximo teorema para as equações de Bäcklund-Darboux.

Teorema 3.30 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização principal de Chebyshev da superfície \mathcal{M} em \mathbb{R}^3 com $K = -a^{-2} < 0$. Seja Y uma parametrização dada por (3.54). Então Y é uma transformada de Bäcklund de inclinação σ de X se, e somente se,*

$$\begin{cases} \bar{\theta}_u + \theta_v = \frac{\operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \theta + \operatorname{sen} \sigma \cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma}, \\ \bar{\theta}_v + \theta_u = -\frac{\cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \theta}{\cos \sigma}. \end{cases} \quad (3.55)$$

Demonstração: Suponha que Y seja uma transformada de Bäcklund de inclinação σ de X . Então Y é dada por (3.54). Podemos derivar Y com respeito a u e obtemos

$$Y_u = X_u + \cos \sigma \left(\left(\frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta} \right)_u X_u + \frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \theta} X_{uu} + \left(\frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}}{\operatorname{sen} \theta} \right)_u X_v + \frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}}{\operatorname{sen} \theta} X_{uv} \right). \quad (3.56)$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

Assim como na prova do Teorema 3.19, temos

$$X_{uu} = -(\operatorname{tg}\theta)\theta_u X_u + (\operatorname{cotg}\theta)\theta_v X_v - a \operatorname{sen}\theta \cos\theta N$$

e

$$X_{uv} = -(\operatorname{tg}\theta)\theta_v X_u + (\operatorname{cotg}\theta)\theta_u X_v.$$

Segue que

$$Y_u = AX_u + BX_v - a \cos\sigma \operatorname{sen}\theta \cos\bar{\theta} N, \quad (3.57)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= 1 + \cos\sigma \left(\left(\frac{\cos\bar{\theta}}{\cos\theta} \right)_u - \left(\frac{\cos\bar{\theta}}{\cos\theta} \right) (\operatorname{tg}\theta)\theta_u - \left(\frac{\operatorname{sen}\bar{\theta}}{\operatorname{sen}\theta} \right) (\operatorname{tg}\theta)\theta_v \right) \\ &= \frac{\cos\theta - \cos\sigma \operatorname{sen}\bar{\theta}(\bar{\theta}_u + \theta_v)}{\cos\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos\sigma \left(\left(\frac{\operatorname{sen}\bar{\theta}}{\operatorname{sen}\theta} \right)_u + \left(\frac{\cos\bar{\theta}}{\cos\theta} \right) (\operatorname{cotg}\theta)\theta_v + \left(\frac{\operatorname{sen}\bar{\theta}}{\operatorname{sen}\theta} \right) (\operatorname{cotg}\theta)\theta_u \right) \\ &= \frac{\cos\sigma \cos\bar{\theta}(\bar{\theta}_u + \theta_v)}{\operatorname{sen}\theta}. \end{aligned}$$

O campo normal unitário de Y é, pela condição (3) da Definição 3.28, adequando-se o sinal,

$$N_Y = -\frac{\cos\sigma \operatorname{sen}\bar{\theta}}{a \cos\theta} X_u + \frac{\cos\sigma \cos\bar{\theta}}{a \operatorname{sen}\theta} X_v + \operatorname{sen}\sigma N. \quad (3.58)$$

Procedendo de maneira análoga para Y_v , segue que

$$Y_v = X_v + \cos\sigma \left[\left(\frac{\cos\bar{\theta}}{\cos\theta} \right)_v X_u + \left(\frac{\cos\bar{\theta}}{\cos\theta} \right) X_{uv} + \left(\frac{\operatorname{sen}\bar{\theta}}{\operatorname{sen}\theta} \right)_v + \left(\frac{\operatorname{sen}\bar{\theta}}{\operatorname{sen}\theta} \right) X_{vv} \right]$$

Usando X_{vv}, X_{uv} como no caso de Y_u , segue que

$$Y_v = CX_u + DX_v + a \cos\sigma \cos\theta \operatorname{sen}\theta N \quad (3.59)$$

onde

$$C = \frac{-\cos\sigma \operatorname{sen}\bar{\theta}(\bar{\theta}_v + \theta_u)}{\cos\theta}$$

e

$$D = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\sigma \cos\bar{\theta}(\theta_u + \bar{\theta}_v)}{\operatorname{sen}\theta} \right).$$

Temos que

$$\begin{cases} \langle Y_u, N_Y \rangle = a \cos \sigma (-\operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \theta + \cos \sigma (\bar{\theta}_u + \theta_v) - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \theta \cos \bar{\theta}), \\ \langle Y_v, N_Y \rangle = a \cos \sigma (\cos \sigma (\bar{\theta}_v + \theta_u) + \operatorname{sen} \theta \cos \bar{\theta} + \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \theta). \end{cases}$$

Uma vez que $\langle Y_u, N_Y \rangle = \langle Y_v, N_Y \rangle = 0$, essas equações implicam (3.55).

Reciprocamente, suponha que (3.55) valem. Então, em relação a (3.57), podemos escrever

$$\begin{aligned} Y_u &= (\cos^2 \bar{\theta} - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \operatorname{tg} \theta) X_u + (\cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \bar{\theta} \operatorname{cotg} \theta + \operatorname{sen} \sigma \cos^2 \bar{\theta}) X_v \\ &\quad - a \cos \sigma \cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \theta N, \\ Y_v &= (\operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \operatorname{tg} \theta + \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen}^2 \bar{\theta}) X_u + (\operatorname{sen}^2 \bar{\theta} - \operatorname{sen} \sigma \cos \bar{\theta} \operatorname{sen} \bar{\theta} \operatorname{cotg} \theta) X_v \\ &\quad + a \cos \sigma \operatorname{sen} \bar{\theta} \cos \theta N. \end{aligned}$$

Definindo N_Y como em (3.58), as equações acima para $\langle Y_u, N_Y \rangle$ e $\langle Y_v, N_Y \rangle$ implicam que N é, a menos de sinal, o campo normal unitário de Y . Além disso, N_Y é perpendicular a $Y - X$ e de (3.58) temos que $\langle N_Y, N \rangle = \operatorname{sen} \sigma$, donde segue o ângulo entre N e N_Y é $\frac{\pi}{2} - \sigma$. Então Y é uma transformada de Bäcklund de X . \square

3.9 Construção da superfície de Dini como uma transformação de Bäcklund

Começamos com uma parametrização degenerada X e o referencial móvel $\{e_1, e_2, N\}$ definidos por (3.39) e (3.40). Quanto à função ângulo de X , tomamos novamente $\theta = 0$ de modo que vale (3.41). A transformada de Bäcklund de inclinação σ de X é a parametrização Y dada por,

$$\begin{aligned} Y(u, v) &= X(u, v) + a \cos \sigma (\cos \bar{\theta} e_1 + \operatorname{sen} \bar{\theta} e_2) \\ &= a(0, 0, u) + a \cos \sigma (\cos \bar{\theta}(0, 0, 1) + \operatorname{sen} \bar{\theta}(\cos u, \operatorname{sen} u, 0)) \\ &= a(\cos \sigma \cos u \operatorname{sen} \bar{\theta}, \cos \sigma \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \bar{\theta}, u + \cos \sigma \cos \bar{\theta}) \end{aligned} \tag{3.60}$$

De (3.55), temos que

$$\bar{\theta}_u = \frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}}{\cos \sigma} \quad \text{e} \quad \bar{\theta}_v = -\frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \bar{\theta}}{\cos \sigma}.$$

Portanto,

$$\left(\ln \operatorname{tg} \frac{\bar{\theta}}{2} \right)_u = \frac{1}{\cos \sigma} \quad \text{e} \quad \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\bar{\theta}}{2} \right)_v = -\frac{\operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}.$$

3 Superfícies de Curvatura Constante Negativa

Ou seja,

$$d\left(\ln \operatorname{tg} \frac{\bar{\theta}}{2}\right) = \frac{du - \operatorname{sen} \sigma dv}{\cos \sigma}.$$

A forma diferencial $\omega(u, v) = \frac{1}{\cos \sigma} du - \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} dv$ é exata, pois $d\psi(u, v) = \omega(u, v)$, com $\psi(u, v) = \frac{u - \operatorname{sen} \sigma v}{\cos \sigma}$, donde

$$\operatorname{tg} \left| \frac{\bar{\theta}}{2} \right| = c \exp\left(\frac{u - v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} + c\right).$$

Pelo Lema 3.13,

$$\cos \bar{\theta} = -\operatorname{tgh}\left(\frac{u - v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \bar{\theta} = \pm \operatorname{sech}\left(\frac{u - v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\right).$$

De (3.60), concluímos (considerando o sinal positivo) que a transformada Y mapeia (u, v) a

$$a \left(\frac{\delta \cos \sigma \cos v}{\cosh\left(\frac{u - v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\right)}, \frac{\cos \sigma \operatorname{sen} v}{\cosh\left(\frac{u - v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\right)}, u - \cos \sigma \operatorname{tgh}\left(\frac{u - v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\right) \right).$$

Portanto esta é uma parametrização principal de Chebyshev de uma superfície com curvatura gaussiana constante negativa, com uma parametrização assintótica que é dada pelo Lema 3.8.

4.1 Tópicos Elementares de Geometria Diferencial

Neste capítulo vamos tratar dos principais fatos da Geometria Diferencial elementar de superfícies em \mathbb{R}^3 enfocando no Teorema Egregium de Gauss, equações de Mainardi-Codazzi e consequências.

Definição 4.1 (Superfície regular) *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, U$ aberto, uma aplicação tal que $X(U) \subset S$, dizemos que S é uma superfície parametrizada regular se, e somente se,*

1. X é $C^\infty(U)$;
2. X é um homeomorfismo entre U e $V \cap S$, em que V é um aberto do \mathbb{R}^3 ;
3. dX_q é injetora $\forall q \in U$.

Definição 4.2 *O vetor normal unitário em cada ponto p de uma superfície parametrizada regular $S = X(U)$, com $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é dado por*

$$N(p) = N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Primeira Forma Fundamental

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. A primeira forma fundamental de S é a restrição do produto interno usual do \mathbb{R}^3 aos vetores do espaço tangente de S (que é um subespaço de \mathbb{R}^3),

$$I_p = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p S \times T_p S}$$

Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) = V \subset S$ é uma parametrização, sabemos que $\{X_u, X_v\}$ é uma base de $T_p S$. Então, tomando $w \in T_p S$, tal que $w = aX_u + bX_v$ temos

4 Apêndice

$$I_p(w, w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle$$

As aplicações $\langle X_u, X_u \rangle, \langle X_u, X_v \rangle, \langle X_v, X_v \rangle$ são chamadas de coeficientes da primeira forma fundamental e denotadas por $E = E(u, v), F = F(u, v), G = G(u, v)$, respectivamente.

Definição 4.3 *Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular, com $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dizemos que $Y : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma reparametrização de X se existir um difeomorfismo $h : \tilde{U} \rightarrow U, h(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$ com $Y = X \circ h$. A função h é chamada de mudança de parâmetros.*

O próximo lema garante que, a escolha do vetor normal independe da parametrização da superfície, a menos de sinal.

Lema 4.4 *Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular e $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma reparametrização de X , isto é, $Y = X \circ h$, em que . Assim,*

$$N_Y = \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|} N_X(u, v).$$

Demonstração: Basta aplicar a regra da cadeia e usar que $N_X(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$, enquanto $N_Y(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}}}{\|Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}}\|}$. □

Lema 4.5 *A primeira forma fundamental de uma superfície regular S num ponto $p \in S$ e $w \in T_p S$ independe da parametrização de S ao redor de p .*

Demonstração: Basta observar que a primeira forma fundamental é a restrição do produto interno usual do \mathbb{R}^3 ao plano tangente $T_p S$. □

Segunda Forma Fundamental

Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular, $p = X(q) \in S$ e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ uma curva no aberto U com $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ e $\alpha(t)$ a composição da parametrização com a curva γ , isto é, $\alpha(t) = X(\gamma(t)) = X(u(t), v(t))$. Sejam $\vec{v} = \alpha'(t_0)$ e $\vec{a} = \alpha''(t_0)$,

4 Apêndice

temos que,

$$\begin{aligned}\alpha'(t_0) &= u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v \text{ e} \\ \alpha''(t_0) &= u''(t_0)X_u + u'(t_0)[X_{uu}u'(t_0) + X_{vu}v'(t_0)] + v''(t_0)X_v \\ &\quad + v'(t_0)[X_{uv}u'(t_0) + X_{vv}v'(t_0)].\end{aligned}$$

Pela regularidade de S , garantimos a existência do vetor normal

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v).$$

Assim, calculando a componente normal de $\alpha''(t_0)$, temos:

$$\begin{aligned}\langle \alpha''(t_0), N \rangle &= u''(t_0)\langle X_u, N \rangle + (u'(t_0))^2 \langle X_{uu}, N \rangle + \\ &\quad + 2u'(t_0)v'(t_0)\langle X_{uv}, N \rangle + v''(t_0)\langle X_v, N \rangle + (v'(t_0))^2 \langle X_{vv}, N \rangle \\ &= (u'(t_0))^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2u'(t_0)v'(t_0)\langle X_{uv}, N \rangle + (v'(t_0))^2 \langle X_{vv}, N \rangle\end{aligned}$$

Observação 4.6 $\langle \alpha''(t), N \rangle$ depende somente de $\gamma'(t) = (u'(t), v'(t))$.

Assim, se escolhermos outra curva β em S tal que $\beta(t_0) = p$ e $\beta'(t_0) = \alpha'(t_0)$, com, $\beta(t) = X(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$, temos

$$\beta'(t_0) = \bar{u}'(t_0)X_u + \bar{v}'(t_0)X_v = u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v = \alpha'(t_0).$$

Logo, $\langle \beta''(t_0), N \rangle = \langle \alpha''(t_0), N \rangle$.

Podemos definir a *segunda forma fundamental* em p como sendo a forma quadrática dada por:

$$II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$aX_u + bX_v \mapsto II_p(w) = a^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle.$$

Ficam definidas as funções $e, f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, U aberto, dadas por: $e(u, v) = \langle X_{uu}, N \rangle$, $f(u, v) = \langle X_{uv}, N \rangle$ e $g(u, v) = \langle X_{vv}, N \rangle$ e são denominadas de *coeficientes da segunda forma fundamental*.

Assim, a segunda forma fundamental pode ser reescrita como,

$$II_p(w) = a^2 e + 2abf + b^2 g.$$

Observação 4.7 $II_p(\alpha'(t_0)) = \langle \alpha''(t_0), N \rangle = -\langle dN_p(\alpha'(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle$.

Geometricamente,

1. Se α for parametrizada pelo comprimento de arco, $t(s) = \alpha'(s)$ e $n(s) = \frac{1}{k(s)}\alpha''(s)$ implicando em $\alpha''(s) = k(s)n(s)$. Assim,

$$\langle \alpha''(s_0), N \rangle = \langle k(s_0)n(s_0), N \rangle = k(s_0)\langle n, N \rangle = k(s_0)\cos\theta.$$

Neste caso, $\langle \alpha''(s_0), N \rangle$ nos dá a componente normal da curvatura, que também é chamada de curvatura normal.

2. Se α for uma seção normal, isto é, $\alpha = S \cap \Pi$ onde Π é o plano que passa por $\alpha(s_0) = p$ e que tem como diretores $N(p)$ e $\alpha'(s_0)$. Como α é uma curva plana $\alpha \subset \Pi$, então Π é o plano osculador, isto é, Π é o plano que passa por p e é gerado por $t(s_0) = \alpha(s_0)$ e $n(s_0)$. Assim temos que $\alpha'(s_0) \perp N_p$.
3. Se α não estiver parametrizada pelo comprimento de arco, procedemos como se segue, sejam

$\alpha'(t) = v, \alpha''(t) = a, k(t) = \frac{\|v \times a\|}{\|v\|^3}, n(t) = \frac{1}{\|v\|\|v \times a\|} [\langle v, v \rangle a - \langle v, a \rangle v]$, acarretando que,

$$\begin{aligned} \langle kn, N \rangle &= \left\langle \frac{\langle v, v \rangle a - \langle v, a \rangle v}{\|v\|^4}, N \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|v\|^4} (\|v\|^2 \langle a, N \rangle - \langle v, a \rangle \langle v, N \rangle) \\ &= \frac{1}{\|v\|^4} \langle a, N \rangle = \frac{\langle \alpha''(s_0), N \rangle}{\langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0) \rangle} = \frac{II_p(\alpha'(s_0))}{I_p(\alpha'(s_0))} \end{aligned}$$

Definição 4.8 (*Curvatura Normal*) A curvatura normal de uma superfície regular S , segundo $w \in T_p S, p \in S$, é dada por

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}.$$

Orientabilidade de Superfícies

Definição 4.9 Uma superfície regular S é dita orientável se ela admitir uma cobertura por uma família de vizinhanças coordenadas $X_\alpha(U_\alpha)$, em que $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ são cartas, de

4 Apêndice

modo que se, $p \in X_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap X_{\alpha_2}(U_{\alpha_2})$ então $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}(p) > 0$ com $(u,v) \in U_{\alpha_1}, (\bar{u},\bar{v}) \in U_{\alpha_2}$.

No caso em que S é orientável, chamamos tal família de vizinhanças coordenadas de *orientação* de S ; caso não exista tal família, dizemos que S é *não-orientável*. Dizemos que uma carta $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ é *compatível* com a orientação de S se ao juntarmos X_α com as cartas que dão a orientação de S , ainda temos uma orientação para S (logo, a mesma orientação).

Proposição 4.10 *Seja S uma superfície regular. S é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais à S (isto é, $N(p) \perp T_p S, \forall p \in S$).*

Demonstração: Vide ([5], pág.124 e 125). □

Definição 4.11 *Uma superfície orientada é um par (S, N) , onde S é uma superfície regular orientável e $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo diferenciável de vetores normais (e unitários) a S .*

Observemos que a existência do campo normal N dá uma orientação para $T_p S$. Dizemos que uma base $\{u, v\}$ de $T_p S$ está orientada positivamente se a base $\{u, v, N(p)\}$ está orientada positivamente em \mathbb{R}^3 , isto é, $\langle u \times v, N(p) \rangle > 0$.

Do que se segue adiante, assumiremos que todas as superfícies são orientáveis.

Para se estudar a curvatura de curvas planas recorreremos à análise da variação do seu vetor tangente em cada ponto, isto é, analisamos o quanto a curva "deixa" de ser reta, e a esse valor atribuímos o nome de curvatura.

Pretendendo medir a variação do plano tangente num ponto p de uma superfície regular S , Gauss notou que isso é equivalente a medir a variação do vetor normal em p .

Definimos a *aplicação normal de Gauss ou imagem esférica* de uma superfície regular S por

$$\begin{aligned} N : S &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ p &\mapsto N(p) \end{aligned}$$

de modo que para cada vetor normal de S em p , $N(p)$, tomamos o transladado de $N(p)$ à origem de \mathbb{R}^3 .

Como $T_p S$ é paralelo à $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$, então $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ pode ser identificado com $T_p S$ (isto é, $T_p S$ é isomorfo à $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$).

Assim, a diferencial da aplicação normal de Gauss, a seguir

$$\begin{aligned} dN_p : T_p S &\rightarrow T_p \mathbb{S}^2 \simeq T_p S \\ v &\mapsto dN_p(v) \end{aligned}$$

4 Apêndice

mede a variação do campo normal em p ou do plano tangente em p .

Definição 4.12 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que $T : V \rightarrow V$ é um operador linear auto-adjunto se $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle, \forall u, v \in V$.*

No que segue, supomos que $S = X(U)$ é uma superfície parametrizada regular.

Proposição 4.13 *dN_p é um operador auto-adjunto, isto é, $\langle dN_p(u), v \rangle = \langle u, dN_p(v) \rangle$ com $p \in S$ e $u, v \in T_p S$.*

Demonstração: Consideremos duas curvas em $S = X(U)$ com $\alpha_1 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ com $\alpha_1(0) = p$ e $\alpha_1'(0) = v, \alpha_1(t) = X(u_1(t), v_1(t))$ e $\alpha_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ com $\alpha_2(0) = p$ e $\alpha_2'(0) = w, \alpha_2(t) = X(u_2(t), v_2(t))$.

Assim,

$$\begin{aligned} dN_p(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N \circ \alpha_1(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(X(u_1(t), v_1(t))) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (N \circ X)_p u_1'(0) + \frac{\partial}{\partial v} (N \circ X)_p v_1'(0) \\ &= N_u u_1'(0) + N_v v_1'(0). \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $dN_p(w) = N_u u_2'(0) + N_v v_2'(0)$.

Logo,

$$\begin{aligned} \langle dN_p(v), w \rangle &= \langle N_u u_1'(0) + N_v v_1'(0), N_u u_2'(0) + N_v v_2'(0) \rangle \\ &= u_1'(0) u_2'(0) \langle N_u, X_u \rangle + u_1'(0) v_2'(0) \langle N_u, X_v \rangle + \\ &+ v_1'(0) u_2'(0) \langle N_v, X_u \rangle + v_1'(0) v_2'(0) \langle N_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle v, dN_p(w) \rangle &= \langle X_u u_2'(0) + X_v v_2'(0), N_u u_2'(0) + N_v v_2'(0) \rangle \\ &= u_1'(0) u_2'(0) \langle N_u, X_u \rangle + u_1'(0) v_2'(0) \langle X_u, N_v \rangle + \\ &+ v_1'(0) u_2'(0) \langle X_v, N_u \rangle + v_1'(0) v_2'(0) \langle N_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle X_u, N_v \rangle = \langle N_u, X_v \rangle$, segue que, $\langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle$. □

Anteriormente, definimos a segunda forma fundamental a partir da aceleração da curva α , ou seja, $II_p(\alpha'(t_0)) = \langle \alpha''(t_0), N \rangle = -\langle dN_p(\alpha'(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle$. Notemos que se tomarmos $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ com $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$, como $\langle N, \alpha'(t_0) \rangle = 0, \forall t \in [a, b]$, então $\langle dN_p(v), v \rangle + \langle N, \alpha''(t_0) \rangle = 0$, ou seja, $\langle N, \alpha''(t_0) \rangle = -\langle dN_p(v), v \rangle$.

4 Apêndice

Da álgebra linear, sabemos que existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ tal que, definindo $W := -dN_p$, temos $W(e_1) = -dN_p(e_1) = k_1 e_1$ e $W(e_2) = -dN_p(e_2) = k_2 e_2$ onde k_1, k_2 são o mínimo e o máximo da forma quadrática

$$Q(v) = \langle -dN_p(v), v \rangle = -\langle dN_p(v), v \rangle = II_p(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)} = k_n(v),$$

no círculo unitário de $T_p S$.

Definição 4.14 Usando as notações anteriores: k_1 e k_2 são as curvaturas principais, e_1 e e_2 são as direções principais (vetores principais). Definimos $W = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ é o operador forma ou operador de Weingarten, com $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular com $p = X(q), q \in U$. A matriz do operador de Weingarten na base B é

$$[W]_B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Definimos a curvatura Gaussiana em $p \in S$ como sendo o $K(p) = \det W = k_1 k_2$ e curvatura média como sendo $H(p) = \frac{\text{tr } W}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Proposição 4.15 (Fórmula de Euler) Sejam k_1 e k_2 as curvaturas principais de $S = X(U)$ em p e \vec{e}_1 e \vec{e}_2 as direções principais correspondentes. Se $w \in T_p S, \|w\| = 1$ e θ é o ângulo entre w e \vec{e}_1 , então $k_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$.

Demonstração: Seja $w \in T_p S$ e $\|w\| = 1$, assim w é expresso por $w = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$. Temos que

$$\begin{aligned} k_n(w) &= \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = -\langle dN_p(w), w \rangle \\ &= -\langle dN_p(\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2), \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \rangle \\ &= \langle -\cos \theta dN_p(\vec{e}_1) - \sin \theta dN_p(\vec{e}_2), \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \rangle \\ &= \langle \cos \theta k_1 \vec{e}_1 + \sin \theta k_2 \vec{e}_2, \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

□

Procuramos agora expressões para a curvatura média e Gaussiana, a partir das coordenadas locais da aplicação normal de Gauss. Tomemos S superfície orientada parametrizada regular, tal que $S = X(U)$, $p = X(q) \in S$, onde $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S, U$ aberto, é uma parametrização de S .

Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ uma curva no aberto U dada por $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ com $\alpha(0) = q$ e γ a composição da curva α com a parametrização X , isto é, $\gamma(t) = X \circ \alpha(t) =$

4 Apêndice

$X(u(t), v(t)), w \in T_p S, \gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w = u'(0)X_u + v'(0)X_v$.

Como $\langle N, N \rangle = 1$, temos que, $\langle N_u, N \rangle = 0$ e $\langle N_v, N \rangle = 0$, isto é, $N_u \perp N$ e $N_v \perp N$. Assim, $N_u, N_v \in T_p S$:

$$\begin{cases} N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{cases} \quad (4.1)$$

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a matriz associada ao operador de Weingarten na base $B = \{X_u, X_v\}$.

Como $\langle X_u, N \rangle = 0$, derivando tal expressão com respeito a u e v , obtemos as relações $\langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_u, N_u \rangle = 0$ e $\langle X_{vu}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = 0$. Procedendo de maneira inteiramente análoga com $\langle X_u, N \rangle = 0$, obtemos $\langle X_{vv}, N \rangle + \langle X_v, N_v \rangle = 0$ e $\langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = 0$, seguem as relações,

$$\begin{cases} e = \langle X_{uu}, N \rangle = -\langle X_u, N_u \rangle = -a_{11}\langle X_u, X_u \rangle - a_{21}\langle X_u, X_v \rangle = -a_{11}E - a_{21}F \\ f = \langle X_{uv}, N \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle = -a_{11}\langle X_u, X_v \rangle - a_{21}\langle X_v, X_v \rangle = -a_{11}F - a_{21}G \\ f = \langle X_{vu}, N \rangle = -\langle X_u, N_v \rangle = -a_{12}\langle X_u, X_u \rangle - a_{22}\langle X_v, X_u \rangle = -a_{12}E - a_{22}F \\ g = \langle X_{vv}, N \rangle = -\langle X_v, N_v \rangle = -a_{12}\langle X_u, X_v \rangle - a_{22}\langle X_v, X_v \rangle = -a_{12}F - a_{22}G \end{cases} \quad (4.2)$$

Matricialmente, obtemos,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Como $EG - F^2 > 0$, pois S é regular, então

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-eG + Ff}{EG - F^2}, & a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{-fG + gF}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Assim, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 4.16 (Equações de Weingarten) *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientável parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, U$ aberto. Então o operador de Weingarten de X*

4 Apêndice

é dado em termos da base $\{X_u, X_v\}$ por

$$\begin{cases} W(X_u) = N_u = \frac{-eG + Ff}{EG - F^2} X_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} X_v \\ W(X_v) = N_v = \frac{-fG + gF}{EG - F^2} X_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} X_v \end{cases} \quad (4.3)$$

Lembrando que as curvaturas principais são os autovalores associados a

$$[W] = [-dN_p] = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix},$$

e que tanto o determinante quanto o traço de uma matriz não dependem da escolha da base, então

$$H = \text{tr}[W] = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \text{ e } K = \det[W] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (4.4)$$

Embora a expressão da curvatura gaussiana K obtida acima dependa também dos coeficientes da segunda forma fundamental, mostraremos a seguir que K pode ser escrita em termos somente da primeira forma fundamental e é nisso que consiste no *Teorema Egregium de Gauss*.

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva em $S = X(U)$, superfície parametrizada regular e orientada. Temos que $\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$ e

$$\alpha''(t) = u''(t)X_u + u'(t)(u'(t)X_{uu} + v'(t)X_{vu}) + v''(t)X_v + v'(t)(u'(t)X_{vu} + v'(t)X_{vv})$$

Objetivamos agora escrever $\alpha''(t)$ na base $\{X_u, X_v, N\}$.

$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \end{cases} \quad (4.5)$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados de *símbolos de Christoffel* e são funções definidas no mesmo domínio da parametrização X .

Como, $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$, segue, derivando cada uma dessas expressões com relação a u e v que, $E_u = 2\langle X_u, X_{uu} \rangle$, $E_v = 2\langle X_{uv}, X_u \rangle$, $F_u = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle$, $F_v = \langle X_{vu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle$, $G_u = 2\langle X_{uv}, X_v \rangle$ e $G_v = 2\langle X_v, X_{vv} \rangle$.

Assim, tomando o produto interno de X_u, X_v , com cada uma das equações do sistema anterior, obtemos,

4 Apêndice

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle X_{uu}, X_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = E_u/2 \\ \langle X_{uu}, X_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - E_v/2 \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = E_v/2 \\ \langle X_{uv}, X_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = G_u/2 \\ \langle X_{vv}, X_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - G_u/2 \\ \langle X_{vv}, X_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = G_v/2 \end{array} \right.$$

Resolvendo os sistemas lineares, obtemos, para Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 :

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \quad \text{e} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}. \quad (4.6)$$

Para Γ_{12}^1 e Γ_{12}^2 :

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}. \quad (4.7)$$

E para Γ_{22}^1 e Γ_{22}^2 :

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \quad \text{e} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \quad (4.8)$$

Como a parametrização X é diferenciável de classe \mathcal{C}^∞ as equações abaixo são verificadas

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u, \quad (X_{vv})_u = (X_{uv})_v \quad \text{e} \quad N_{uu} = N_{uv}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}(X_{uu}) &= \frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) \\ &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + eN_v \\ &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + (\Gamma_{11}^2)_v X_v \\ &+ \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) + e_v N + eN_v \\ &= ((\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12})X_u + (\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v)N \\ &+ ((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22})X_v \end{aligned}$$

4 Apêndice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(X_{uv}) &= \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) \\
&= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + f_u N + f N_u \\
&= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + (\Gamma_{12}^2)_u X_v \\
&\quad + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN) + f_u N + f N_u \\
&= ((\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + f a_{11}) X_u + (\Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u) N \\
&\quad + ((\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21}) X_v
\end{aligned}$$

Como $\{X_u, X_v, N\}$ é base de \mathbb{R}^3 , segue que, comparando os coeficientes em cada termo da base obtemos, para X_u ,

$$(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12} = (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + f a_{11}.$$

Donde segue,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 &= e a_{12} - f a_{11}, \\
(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 &= e \frac{gF - fG}{EG - F^2} - f \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\
(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 &= \frac{egF - efG - f^2F + efG}{EG - F^2}, \\
(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 &= \frac{F(eg - f^2)}{EG - F^2}, \\
(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 &= FK.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Para X_v ,

$$(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21}.$$

4 Apêndice

Donde segue,

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 &= ea_{22} - fa_{21}, \\
 (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 &= e \frac{fF - gE}{EG - F^2} - f \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\
 (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 &= \frac{efF - egE - feF + f^2E}{EG - F^2}, \\
 (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 &= \frac{E(-eg + f^2)}{EG - F^2}, \\
 (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 &= -EK.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Note que (4.9) e (4.10) expressam a curvatura gaussiana K em função somente dos símbolos de Chistoffel, que não dependem dos coeficientes da segunda forma fundamental. Desse modo, acabamos de demonstrar que a curvatura gaussiana de uma superfície é um conceito *intrínseco*, isto é, depende apenas da métrica da superfície, e é nisso que consiste o *Teorema Egregium de Gauss*.

Comparando-se os coeficientes de N em $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ obtemos

$$\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v = \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u.$$

Ou seja,

$$e_v - f_u = \Gamma_{12}^1 e + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) f - \Gamma_{11}^2 g.$$

Esta última igualdade é uma das *equações de Mainardi-Codazzi*.

Se utilizarmos as outras igualdades válidas em decorrência do Teorema de Schwarz obteremos a outra equação de Mainardi-Codazzi, concluímos assim com o teorema abaixo.

Teorema 4.17 (Equações de Mainardi-Codazzi) *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização regular de uma superfície no \mathbb{R}^3 . Então,*

$$\begin{cases} e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \end{cases}$$

No caso das parametrizações principais, isto é, aquelas em que $F = f = 0$, essas equações se simplificam bastante. Assim estabelecemos o seguinte corolário.

Corolário 4.18 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização principal de uma superfície no \mathbb{R}^3 . Então*

4 Apêndice

$$\begin{cases} e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \\ g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right). \end{cases}$$

Demonstração: Considerando $F = 0$ nas equações (4.6, 4.7 e 4.8) e usando (4.17), segue que,

$$e_v = e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2 = e \frac{E_v}{2E} - g \frac{-E_v}{2G} = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right).$$

E,

$$g_u = g\Gamma_{12}^2 - e\Gamma_{22}^1 = g \frac{G_u}{2G} - e \frac{-G_u}{2E} = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right).$$

□

Corolário 4.19 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto, uma parametrização principal de uma superfície no \mathbb{R}^3 . Então*

$$\begin{cases} (k_1)_v = \frac{E_v}{2E} (k_2 - k_1), \\ (k_2)_u = \frac{G_u}{2G} (k_1 - k_2). \end{cases}$$

Demonstração: Tomando $F = 0$, segue das equações de Weingarten (4.3) que as curvaturas principais são $k_1 = \frac{e}{E}$ e $k_2 = \frac{g}{G}$. Temos que, derivando k_1 com relação à v e usando (4.18) obtemos

$$\begin{aligned} (k_1)_v &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e}{E} \right) = \frac{e_v E - e E_v}{E^2} \\ &= \frac{e_v E}{E^2} - \frac{e E_v}{E^2} \\ &= \frac{1}{E} \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) - \frac{e E_v}{E^2} \\ &= \frac{1}{E} \frac{E_v}{2} (k_1 + k_2) - \frac{E_v}{E} k_1 \\ &= \frac{E_v k_1 + E_v k_2 - 2E_v k_1}{2E} \\ &= \frac{E_v}{2E} (k_2 - k_1). \end{aligned}$$

Derivando k_2 com relação à u e usando (4.18) ficamos com

$$\begin{aligned}
 (k_2)_u &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g}{G} \right) = \frac{g_u G - g G_u}{G^2} \\
 &= \frac{g_u}{G} - \frac{g G_u}{G^2} \\
 &= \frac{1}{G} \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) - \frac{g G_u}{G^2} \\
 &= \frac{1}{G} \frac{G_u}{2} (k_1 + k_2) - \frac{G_u}{G} k_2 \\
 &= \frac{G_u k_1 + G_u k_2 - 2 G_u k_2}{2G} \\
 &= \frac{G_u}{2G} (k_1 - k_2).
 \end{aligned}$$

□

4.2 Curvatura de uma Superfície de Revolução e Helicoides Generalizados

Primeiro, calculamos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais e também o vetor normal unitário de uma superfície de revolução.

Lema 4.20 *Seja M uma superfície de revolução com curva perfil $\alpha = (\phi, \psi)$ dada por (2.2). Então,*

$$E = \phi^2(v), F = 0, G = (\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2$$

Assim, X é regular sempre que $\phi(v)$ e $\phi'(v)^2 + \psi'(v)^2$ são não nulos. Quando este é o caso,

$$e = \frac{-|\phi(v)|\psi'(v)}{\sqrt{(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}}, f = 0, g = \frac{(\text{sinal} \phi(v))(\phi(v)''\psi'(v) - \phi'(v)\psi''(v))}{\sqrt{(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}}$$

e o campo normal é

$$N(u, v) = \frac{\text{sinal} \phi(v)}{\sqrt{(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}} (\psi'(v) \cos u, \psi'(v) \text{senu}, -\phi'(v)).$$

Demonstração: Da parametrização padrão (2.2) segue que as primeiras derivadas parciais de X são dadas por

4 Apêndice

$$\begin{cases} X_u = (-\phi(v) \operatorname{senu}, \phi(v) \cos u, 0), \\ X_v = (\phi'(v) \cos u, \phi'(v) \operatorname{senu}, \psi'(v)). \end{cases}$$

Então, segue que

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = (-\phi(v) \operatorname{senu})^2 + (\phi(v) \cos u)^2 = \phi^2(v)(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u) = \phi^2(v)$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -\phi(v)\phi'(v) \operatorname{senu} \cos u + \phi(v)\phi'(v) \operatorname{senu} \cos u = 0$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle = (\phi'(v) \cos u)^2 + (\phi'(v) \operatorname{senu})^2 + (\psi'(v))^2 \\ &= (\phi'(v))^2(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + (\psi'(v))^2 = \psi'(v)^2 + \phi'(v)^2. \end{aligned}$$

Assim $X_u \times X_v = (\phi(v)\psi'(v) \cos u, \phi(v)\psi'(v) \operatorname{senu}, -\phi(v)\phi'(v))$ e consequentemente

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2} = |\phi(v)|\sqrt{\psi'(v)^2 + \phi'(v)^2}.$$

Portanto o campo normal unitário é

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{1}{|\phi(v)|\sqrt{\psi'(v)^2 + \phi'(v)^2}}(\phi(v)\psi'(v) \cos u, \phi(v)\psi'(v) \operatorname{senu}, -\phi(v)\phi'(v)) \\ &= \frac{\operatorname{sinal}(\phi(v))}{\sqrt{\psi'(v)^2 + \phi'(v)^2}}(\psi'(v) \cos u, \psi'(v) \operatorname{senu}, -\phi'(v)) \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-\phi(v) \cos u, -\phi(v) \operatorname{senu}, 0), \\ X_{uv} &= (-\phi'(v) \operatorname{senu}, \phi'(v) \cos u, 0), \\ X_{vv} &= (\phi''(v) \cos u, \phi''(v) \operatorname{senu}, \psi''(v)). \end{aligned}$$

Lembrando que os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$e = \frac{[X_{uu}, X_u, X_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \frac{[X_{uv}, X_u, X_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \quad \text{e} \quad g = \frac{[X_{vv}, X_u, X_v]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

4 Apêndice

Assim, os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{\text{sinal}\phi(v)}{\sqrt{(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}} (\psi'(v) \cos u (-\phi(v) \cos u) + (-\phi(v) \text{senu})(\psi'(v) \text{senu})) \\
 &= \frac{\text{sinal}\phi(v)(-\psi'(v)\phi(v))}{\sqrt{(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}}, \\
 f &= \frac{\text{sinal}\phi(v)}{\sqrt{(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}} (-\phi(v)' \text{senu}\psi'(v) \cos u + \phi'(v) \cos u \psi'(v) \text{senu}) = 0 \\
 g &= \frac{\text{sinal}\phi(v)}{\sqrt{(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}} (\psi'(v)\phi''(v) \cos^2 u + \psi'(v)\phi''(v) \text{sen}^2 u - \psi''(v)\phi'(v)) \\
 &= \frac{\text{sinal}\phi(v)(\psi'(v)\phi''(v) - \psi''(v)\phi'(v))}{\sqrt{(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}}.
 \end{aligned}$$

□

Observação 4.21 *A parametrização padrão de uma superfície de revolução é uma parametrização principal.*

Neste ponto, pode-se calcular a curvatura gaussiana K por meio da equação 4.4. Assim estabelecemos o seguinte teorema.

Teorema 4.22 *Seja \mathcal{M} uma superfície de revolução com curva de perfil $\alpha = (\phi, \psi)$. Seja X a parametrização padrão de \mathcal{M} . Então, a curvatura gaussiana é dada por*

$$K = \frac{-\psi'^2 \phi'' + \phi' \psi' \psi''}{\phi(\phi'^2 + \psi'^2)^2}$$

e a curvatura média por

$$H = \frac{\phi(\phi''\psi' - \phi'\psi'') - \psi'(\phi'^2 + \psi'^2)}{2|\phi|(\phi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}.$$

Demonstração: Aplica-se (4.4) com os coeficientes determinados no Lema 4.20. □

Corolário 4.23 *Para uma superfície de revolução, as funções $K, H, k_p, k_m, E, F, G, e, f, g$ são todas constantes ao longo de paralelos, sendo que k_p e k_m denotam as curvaturas principais no contexto das superfícies de rotação.*

Demonstração: Todas estas funções são expressas em termos de $\phi(v)$ e $\psi(v)$ e de suas derivadas. Mas $\phi(v)$ e $\psi(v)$ não dependem do ângulo u . □

4 Apêndice

Podemos, em teoria, escolher uma curva de perfil parametrizada pelo comprimentos de arco. Nesse caso, as fórmulas que obtemos até agora para uma superfície de revolução são simplificadas consideravelmente.

Corolário 4.24 *Seja X a parametrização padrão de uma superfície de revolução em \mathbb{R}^3 cuja curva perfil $\alpha = (\phi, \psi)$ está parametrizada pelo comprimento de arco. Então*

$$E = \phi^2, F = 0, G = 1,$$

$$e = -|\phi|\psi', f = 0, g = (\text{sinal}\phi)(\phi''\psi' - \phi'\psi''),$$

$$k_p = \frac{-\psi'}{|\phi|}, k_m = (\text{sinal}\phi)(\phi''\psi' - \phi'\psi''),$$

$$2H = (\text{sinal}\phi)(\phi''\psi' - \phi'\psi'') - \frac{\psi'}{|\phi|}, K = \frac{-\phi''}{\phi}.$$

Demonstração: Imediata a partir das fórmulas obtidas para uma curva perfil não parametrizada pelo comprimento de arco, (4.4) e (4.20). □

Teorema 4.25 *Seja $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ um helicóide generalizado com parametrização dada por (2.12), então temos que*

$$K = \frac{\psi'\phi^3(-\psi'\phi'' + \phi'\psi'') - (\phi')^4c^2}{[\phi^2((\psi')^2 + (\phi')^2) + (\phi'c)^2]^2}$$

$$H = \frac{-2c^2(\phi')^2\psi' - \phi^2\psi'((\phi')^2 + (\psi')^2) + \phi(c^2 + \phi^2)(\psi'\phi'' - \phi'\psi'')}{2[\phi^2((\psi')^2 + (\phi')^2) + (\phi'c)^2]^{3/2}}.$$

Demonstração: Da parametrização padrão (2.12) segue que as primeiras derivadas parciais de X são dadas por

$$\begin{cases} X_u = (-\phi(v)\text{senu}, \phi(v)\text{cosu}, c) \\ X_v = (\phi'(v)\text{cosu}, \phi'(v)\text{senu}, \psi'(v)) \end{cases}$$

Então, segue que

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = (-\phi(v)\text{senu})^2 + (\phi(v)\text{cosu})^2 + c^2 = \phi^2(v)(\text{sen}^2u + \text{cos}^2u) + c^2 = \phi^2(v) + c^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -\phi\phi'\text{senu}\text{cosu} + \phi\phi'\text{senu}\text{cosu} + c\psi'(v) = c\psi'(v)$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle = (\phi'(v)\text{cosu})^2 + (\phi'(v)\text{senu})^2 + (\psi'(v))^2 \\ &= (\phi'(v))^2(\text{cos}^2u + \text{sen}^2u) + (\psi'(v))^2 = \psi'(v)^2 + \phi'(v)^2. \end{aligned}$$

4 Apêndice

Assim $X_u \times X_v = (\phi(v)\psi'(v)\cos u - c\phi'(v)\operatorname{senu}, \phi(v)\psi'(v)\operatorname{senu} + c\phi'(v)\cos u, -\phi(v)\phi'(v))$.
Consequentemente,

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\phi^2(v)((\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2) + c^2(\phi'(v))^2}.$$

Sendo $D = \|X_u \times X_v\|$, temos que o campo normal unitário é

$$N(u, v) = \frac{1}{D}(\phi(v)\psi'(v)\cos u - c\phi'(v)\operatorname{senu}, \phi(v)\psi'(v)\operatorname{senu} + c\phi'(v)\cos u, -\phi(v)\phi'(v)).$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-\phi(v)\cos u, -\phi(v)\operatorname{senu}, 0), \\ X_{uv} &= (-\phi'(v)\operatorname{senu}, \phi'(v)\cos u, 0), \\ X_{vv} &= (\phi''(v)\cos u, \phi''(v)\operatorname{senu}, \psi''(v)). \end{aligned}$$

Assim os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e &= \frac{-\phi^2(v)\psi'(v)}{D}, \\ f &= \frac{c(\phi'(v))^2}{D}, \\ g &= \frac{1}{D}\phi(v)(\phi''(v)\psi'(v) - \phi'(v)\psi''(v)). \end{aligned}$$

□

4.3 Transformação de coordenadas na equação Seno-Gordon

Sendo $u = p + q$ e $v = p - q$ temos que $p = \frac{u+v}{2}$ e $q = \frac{u-v}{2}$. Usando a regra da cadeia segue que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial u} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial q}. \end{aligned}$$

Assim usando novamente a regra da cadeia e o Teorema de Schwarz, a deri-

4 Apêndice

vada segunda com relação a u é

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial q} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial p} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q \partial p} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q \partial q} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2}.
 \end{aligned}$$

De modo similar, temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial v} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial q}.
 \end{aligned}$$

Usando novamente a regra da cadeia e o Teorema de Schwarz, a derivada segunda

com relação a v é

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial q} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial p} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q \partial p} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q \partial q} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} = \text{sen} \theta \cos \theta$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} = \text{sen} \theta \cos \theta.$$

Fazendo $\omega = 2\theta$, temos que $\text{sen} \omega = \text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen} \theta \cos \theta$. Por outro lado, $2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} = 2 \text{sen} \theta \cos \theta$, donde $\omega_{pq} = \text{sen} \omega$.

4.4 Determinação das Coordenadas de Referenciais

Móveis em \mathbb{R}^3

Considerando $e_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}}$, $e_2 = \frac{X_v}{\sqrt{G}}$ e tomando $e_1 \times e_2 = N$, temos que $\{e_1, e_2, N\}$ é uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 . Por outro lado, derivando e_1 e e_2 com respeito a u e a v , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right) = \frac{X_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{X_u E_u}{2E^{3/2}} = \frac{X_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u}{2E} e_1 \quad (4.11)$$

4 Apêndice

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right) = \frac{X_{uv}}{\sqrt{E}} - \frac{X_u E_v}{2E^{3/2}} = \frac{X_{uv}}{\sqrt{E}} - \frac{E_v}{2E} e_1 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{X_v}{\sqrt{G}} \right) = \frac{X_{vu}}{\sqrt{G}} - \frac{X_v G_u}{2G^{3/2}} = \frac{X_{vu}}{\sqrt{G}} - \frac{G_u}{2G} e_2 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{X_v}{\sqrt{G}} \right) = \frac{X_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{X_v G_v}{2G^{3/2}} = \frac{X_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v}{2G} e_2 \quad (4.14)$$

Entretanto, já determinamos X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} em função de Γ_{ij}^k em (4.5). Tomando $F = f = 0$ e usando (4.6), (4.7) e (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \\ &= \frac{E_u}{2E} X_u - \frac{E_v}{2G} X_v + eN \\ &= \frac{E_u}{2\sqrt{E}} e_1 - \frac{E_v}{2\sqrt{G}} e_2 + eN, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v \\ &= \frac{E_v}{2E} X_u + \frac{G_u}{2G} X_v \\ &= \frac{E_v}{2\sqrt{E}} e_1 + \frac{G_u}{2\sqrt{G}} e_2, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \\ &= -\frac{G_u}{2E} X_u + \frac{G_v}{2G} X_v + gN \\ &= -\frac{G_u}{2\sqrt{E}} e_1 + \frac{G_v}{2\sqrt{G}} e_2 + gN. \end{aligned}$$

Desse modo, (4.11) torna-se

$$\begin{aligned} (e_1)_u &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{E_u}{2\sqrt{E}} e_1 - \frac{E_v}{2\sqrt{G}} e_2 + eN \right) - \frac{E_u}{2E} e_1 \\ &= \frac{E_u}{2E} e_1 - \left(\frac{E_v}{2\sqrt{E}} \right) \frac{1}{G} e_2 + \frac{e}{\sqrt{E}} N - \frac{E_u}{2E} e_1 \\ &= -\frac{(\sqrt{E})_v}{G} e_2 + \frac{e}{\sqrt{E}} N, \end{aligned}$$

4 Apêndice

enquanto que (4.12) fica sendo

$$\begin{aligned}
 (e_1)_v &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{E_v}{2\sqrt{E}} e_1 + \frac{G_u}{2\sqrt{G}} e_2 \right) - \frac{E_v}{2E} e_1 \\
 &= \frac{E_v}{2E} e_1 - \left(\frac{G_u}{2\sqrt{G}} \right) \frac{1}{\sqrt{E}} e_2 - \frac{E_v}{2E} e_1 \\
 &= \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} e_2.
 \end{aligned}$$

Analogamente, para $(e_2)_u$ e $(e_2)_v$, temos que

$$\begin{aligned}
 (e_2)_u &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{E_v}{2\sqrt{E}} e_1 + \frac{G_u}{2\sqrt{G}} e_2 \right) - \frac{G_u}{2G} e_2 \\
 &= \left(\frac{E_v}{2\sqrt{E}} \right) \frac{1}{\sqrt{G}} e_1 + \frac{G_u}{2\sqrt{G}} e_2 - \frac{G_u}{2G} e_2 \\
 &= \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} e_1,
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 (e_2)_v &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left(-\frac{G_u}{2\sqrt{E}} e_1 + \frac{G_v}{2\sqrt{G}} e_2 + gN \right) - \frac{G_v}{2G} e_2 \\
 &= -\left(\frac{G_u}{2\sqrt{G}} \right) \frac{1}{\sqrt{E}} e_1 + \frac{G_v}{2G} e_2 + \frac{g}{\sqrt{G}} N - \frac{G_v}{2G} e_2 \\
 &= -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} e_1 + \frac{g}{\sqrt{G}} N.
 \end{aligned}$$

Agora vamos encontrar N_u e N_v nesta base. Pelas Equações de Weingarten (4.3) associadas ao fato que $F = f = 0$, segue que

$$N_u = -\frac{e}{E} X_u = -\frac{e}{\sqrt{E}} e_1 \quad \text{e} \quad N_v = -\frac{g}{G} X_v = -\frac{g}{\sqrt{G}} e_2.$$

Assim, segue o Teorema 3.22.

- [1] BEN-MENACHEM, A. *Historical Encyclopedia of Natural and Mathematical Sciences*. 1ed. Hidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [2] BIANCHI, L. *Lezioni di Geometria Differenziale*. 3a edizione interamente rifatta. Bologna: Nicola Zanichelli, 1927.
- [3] CAO, W.; HUANG, F.; WANG, D. *Isometric Immersions of Surfaces with Two Classes of Metrics and Negative Gauss Curvature*. Arch. Rational Mech Anal. **2180**, 2015, 1431-1457.
- [4] CUI, N. *Compact surfaces of constant Gaussian curvature in Randers manifolds*. Journal of Geometry and Physics **106**, 2016, 122–129.
- [5] DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [6] EISENHART, L.P. *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. 1st ed. Boston: Ginn and Company, 1909.
- [7] GRAY, A; *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. 3rd Edition. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [8] KANEDA, E. *On local isometric immersions of the spaces of negative constant curvature into the Euclidean spaces*. J. Math. Kyoto Univ. **19**, 1979, no. 2, 269–284.
- [9] KRIVOSHAPKO, SIVANOV, V.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. 2nd. Switzerland: Springer International Publishing, 2015.
- [10] MASSEY, W. S. *Surfaces of Gaussian Curvature zero in Euclidean 3-Space*. Journal Tohoku Math. **14**, 1962, 73-79.
- [11] MONTIEL, S.; ROS, A. *Curves and Surfaces*. 2nd Edition. Rhode Island: AMS Press, 2009.

Referências Bibliográficas

- [12] SINAI, Ja. G. *Geodesic flows on manifolds of negative constant curvature*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **131** 752-755 (Russian); translated as Soviet Math. Dokl. **1**, 1960, 335–339.