Trabalho de Conclusão de Curso - Bacharelado em Matemática

Soluções invariantes e simetrias de Noether para uma classe de equações de Emden-Fowler de quarta ordem

Priscila Leal da Silva

Universidade Federal do ABC

Título: Soluções invariantes e simetrias de Noether para uma classe de equações de Emden-Fowler de quarta ordem

Autor: Priscila Leal da Silva
Orientador: Prof. Dr. Igor Leite Freire

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Norberto Aníbal Maidana
Universidade Federal do ABC

Santo André, 03 de abril de 2013.

Sumário

Agradecimento

Talvez a parte mais difícil...

Primeiramente agradeço aos meus pais, Osvandir e Neide, pela confiança, pelo apoio, pela compreensão, pela crença, pelo amor, pelas duras críticas, pela simplicidade e humildade, pelos finais de semana de karaokê com muitas risadas e choros, pelos inúmeros sacrifícios feitos para que tivesse a oportunidade de buscar meus objetivos e sonhos, nossos objetivos e sonhos.

Agradeço ao meu orientador por esses quase quatro anos de paciência, tolerância, respeito, confiança, preocupação e dedicação. A ele que me guiou, mostrou-me o caminho, ensinou-me, aguentou-me nesse tempo todo e esteve ao meu lado nesses anos espinhosos e cheios de recompensas. Obrigada por todo o esforço (inclusive por não ter cortado a minha bolsa).

Agradeço ao professor Mariano Torrisi pelo incentivo, pelas palavras tranquilizantes, pela paciência, pelo aprendizado proporcionado e pela oportunidade singular de trabalhar ao lado dele. *Grazie mille*.

Aos meus amigos, Bruno, Ana e Murilo, deixo o meu agradecimento por fazerem parte da minha vida bem antes da vida adulta começar. Pelas risadas, pelas besteiras faladas, pelas brigas, pelo apoio, por todas as histórias que guardo com muito carinho e por serem parte da minha família. Cada um sonhou da sua maneira e hoje nos vemos realizados, separadamente e como um todo.

Agradeço a Roseane por aguentar meus xiliques toda quinta-feira, pelos puxões de orelha, pelos conselhos, por sempre me chamar de nerd, pelas sessões de tortura e por ouvir minhas reclamações sobre esse curso maluco que, finalmente, termino.

Agradeço também a todos os professores que ajudaram, direta ou indiretamente, na minha formação.

Por último, mas não menos importante, dedico este trabalho a *você* que não lerá minhas palavras simples e cheias de emoção, mas que está me guiando e cuidando de mim. Agradeço a *você* por ter me dado exemplos de integridade, dedicação e paixão. Isto é, em sua maior parte, por *você*.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo das simetrias de Lie e de Noether de uma equação de Emden-Fowler de quarta ordem particular.

Palavras Chaves: Equação de Emden-Fowler, simetrias de Lie, soluções invariantes

Abstract

In this work we present a study from the point of view of Lie point symmetries and Noether symmetries of a particular fourth-order Emden-Fowler equation.

Keywords: Emden-Fowler equation, Lie point symmetries, invariant solutions

1 Introdução

Na segunda metade do século $XVII$, Jacob Bernoulli descobriu que a curvatura de uma viga elástica num ponto qualquer é proporcional à deflexão naquele ponto. Daniel Bernoulli, seu sobrinho, foi o primeiro a formular uma equação diferencial do movimento de uma viga vibratória, por volta de 1750.

Mais tarde, Leonard Euler usou a teoria de Jacob Bernoulli para investigar o formato de vigas elásticas sob aplicação de diversas forças, fazendo vários avanços na teoria de Bernoulli, conhecida hoje como teoria de Euler-Bernoulli para vigas. Tal teoria somente foi aceita como ferramenta por volta de 1889, quando foi utilizada na construção da torre Eiffel. Atualmente ela é bastante empregada porque fornece boas aproximações para problemas da engenharia, porém a ausência de possíveis rotações fez com que outras teorias surgissem (veja [HBW]).

A equação

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = w, \tag{1.1}$$

onde E é o módulo elástico, I é o momento de inércia, $w = w(x,y)$ é a força exercida na viga e $y = y(x)$ é a deflexão da viga na posição x, é chamada de equação de Euler-Bernoulli para vigas. Ela pode ser derivada usando o princípio variacional de Hamilton. Para maiores detalhes, veja [BMZ, HBW].

Se E e I em (1.1) são constantes, então temos

$$EI\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = w(x,y),$$

o que nos leva a estudar a equação

$$\frac{d^4y}{dx^4} = ax^\gamma y^n, \tag{1.2}$$

$\gamma, n \in \mathbb{R}$, conhecida como **equação de Emden-Fowler de quarta ordem**.

Este trabalho pretende encontrar soluções especiais e simetrias de Noether da equação (1.2), utilizando a teoria de simetrias de Lie, criada por Sophus Lie para organizar as técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) que, apesar de numerosas, resolvem uma classe limitada de problemas. Utilizamos [BA] como referência principal para a teoria e [BMZ] para comparar resultados pertinentes obtidos.

O trabalho é parte de um artigo submetido recentemente a um periódico internacional juntamente ao Professor Mariano Torrisi e atualmente se encontra sob avaliação.

Também, tal tema foi objeto de estudo durante o projeto de iniciação científica, financiado pela FAPESP e com fim em agosto de 2012, e foi anteriormente discutido em [SF2].

O segundo capítulo apresenta uma teoria mais algébrica de grupos de transformações a 1-parâmetro. O terceiro capítulo apresenta a teoria de simetrias de Lie para EDOs de ordem $n \geq 2$. O quarto capítulo discute questões variacionais e conecta o cálculo variacional com a teoria de simetrias para EDOs. No quinto e último capítulo, apresentaremos os resultados principais do trabalho, envolvendo a equação de Emden-Fowler (1.2).

2 Grupos de transformações de pontos de Lie

Neste capítulo apresentaremos toda a teoria de grupos de transformações de Lie necessária para o desenvolvimento do trabalho. Tal teoria foi exaustivamente estudada principalmente em [BA] (Capítulo 2), com complementos em [Hy, Ib].

Iniciaremos o capítulo com uma breve revisão de conceitos elementares de teoria de grupos e uma construção do grupo simétrico de ordem n, com a intenção de intuitivamente introduzir a ideia de simetria.

A seção seguinte apresenta definições e resultados acerca de grupos de transformações de Lie uniparamétricos. Os tópicos seguintes apresentam os resultados principais do capítulo: o Primeiro Teorema Fundamental de Lie e o teorema que nos fornece um algoritmo para encontrar solução do problema de valor inicial fornecido pelo Primeiro Teorema Fundamental de Lie.

Em seguida, introduziremos os conceitos de funções diferenciais, funções invariantes clássicas e estabeleceremos relações entre tais conceitos. Para finalizar o capítulo, abordaremos resultados acerca de transformações de pontos de Lie e suas extensões (prolongações).

2.1 Grupos

Definição 2.1 Seja G um conjunto não-vazio e $\phi : G \times G \to G$ uma lei de composição entre elementos de G. Dizemos que o par (G, ϕ) é um grupo se as seguintes condições são satisfeitas:

(a) G é fechado com relação a ϕ, isto é, para quaisquer elementos a e b de G, $\phi(a,b)$ é um elemento de G.

(b) Para quaisquer elementos a, b e c de G, $\phi(a, \phi(b,c)) = \phi(\phi(a,b), c)$. Tal propriedade é chamada de associativa.

(c) Existe um único elemento e em G, chamado de elemento neutro, tal que $\phi(e,a) = \phi(a,e) = a, \ \forall a \in G$.

(d) Para qualquer $a \in G$, existe um único elemento $a^{-1} \in G$, chamado de inverso de a, tal que $\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e$.

Observação 2.2 *Tanto na existência do elemento inverso quanto na existência do elemento neutro, a unicidade pode ser demonstrada.*

Observação 2.3 *Fixada uma lei de composição, denotaremos o grupo (G,ϕ) simplesmente por G.*

Definição 2.4 Um subgrupo de G é um subconjunto não-vazio de G que munido da mesma operação de G forma um grupo.

Definição 2.5 Uma transformação T num conjunto $A \neq \emptyset$ é uma aplicação injetora de A em si mesmo, isto é,

$$\begin{aligned} T \ : \ & A \rightarrow A \\ & a \mapsto T(a). \end{aligned}$$

Da definição acima apresentada, é imediato ver que uma transformação T é uma aplicação bijetora de A em si mesmo.

O conjunto de todas as transformações munido com a operação composição de funções é um grupo, chamado grupo de transformações.

Seja E um conjunto com n elementos $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. Considere o conjunto $S(E)$ das funções bijetoras de E em E. Notemos que $S(E) \neq \emptyset$, pois a função $Id(x) = x, \forall x \in E$, é bijetora. Como a composta de duas funções bijetoras é bijetora, a composição satisfaz a propriedade *(a)* de fechamento. Mostremos que $(S(E), \circ)$ é um grupo.

(b) Dadas $f, g, h \in S(E)$, $(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x)$.

(c) $(f \circ Id)(x) = f(Id(x)) = f(x), \forall f \in S(E)$ e $(Id \circ f)(x) = Id(f(x)) = f(x), \forall f \in S(E)$.

(d) $\forall f \in S(E), \exists! f^{-1} \in S(E)$, pois toda função bijetora possui única inversa, também bijetora.

Portanto, $(S(E), \circ)$ é um grupo, chamado **grupo simétrico de grau n**. De maneira mais geométrica, o grupo simétrico de um objeto é o grupo de todas as isometrias sob as quais o objeto é invariante, isto é, mantém-se o mesmo. É um subgrupo do grupo de isometrias do espaço em questão, que por sua vez é subgrupo do grupo de transformações.

Exemplo 2.6 Grupo diedral.

Um grupo diedral é um grupo simétrico de um polígono regular de n lados, representado por D_n ou D_{2n}. Consideremos $n = 3$.

Sejam $H = \{1, 2, 3\}$ o conjunto dos vértices de um triângulo equilátero e $f_i : H \rightarrow H$ as transformações no plano que deixam o triângulo invariante. Tais transformações são obtidas por rotações dos vértices e reflexões dos mesmos em relação às retas bissetrizes.

Sejam e a identidade (ou a rotação dos vértices com ângulo 2π), a a rotação com ângulo $\frac{2\pi}{3}$ e b a reflexão dos vértices 2 e 3 em relação à bissetriz de 1. Podemos representar tais elementos por

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Compondo $a \circ a = a^2$ e $a \circ b = ab$, encontramos

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = ba^2.$$

Compondo, agora, $b \circ a = ba$, encontramos

$$ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a última simetria, uma vez que qualquer outra composição dará uma das encontradas previamente.

Temos, assim, o grupo de simetrias do triângulo equilátero, o grupo diedral $D_3 = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$.

2.2 Grupos de transformações de Lie a 1-parâmetro

Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um ponto de um aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto de transformações

$$\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon),$$

definido para cada $x \in D$ e $\epsilon \in S \subset \mathbb{R}$, com $\phi(\epsilon, \delta)$ definindo uma lei de composição em S, forma um **grupo de transformações a 1-parâmetro** em D se

(i) Para cada $\mathbf{x} \in D$, as transformações são injetoras em D. Logo, $\mathbf{x}^* \in D$;

(ii) S com a lei de composição ϕ forma um grupo;

(iii) Para cada $\mathbf{x} \in D$, temos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ quando $\epsilon = \epsilon_0$ é a identidade em S, isto é,

$$X(\mathbf{x}; \epsilon_0) = \mathbf{x};$$

(iv) Se $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ e $\mathbf{x}^{**} = X(\mathbf{x}^*; \delta)$, então

$$\mathbf{x}^{**} = X(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta)).$$

Podemos, então, definir um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro:

Definição 2.7 Um grupo de transformações a 1-parâmetro é um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro se
(a) S é um intervalo de $\mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, $\epsilon = 0$ corresponde à identidade e de S;
(b) X é C^∞ em D com respeito a $\mathbf{x}$ e uma função analítica em S com respeito a ϵ;
(c) ϕ é uma função analítica.

Se pensarmos em $\mathbf{x}$ como uma variável espacial e ϵ como variável temporal, então um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro define um fluxo estacionário.

Exemplo 2.8 Grupo de translações no plano.
Considere o grupo de translações

$$\begin{aligned} x^* &= x + \epsilon, \\ y^* &= y, \epsilon \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Neste caso, $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$. Mostremos que é um grupo de transformações de Lie.
(i) y^* é claramente injetora. De fato, fixando ϵ arbitrário, temos

$$x_1^* = x_2^* \Leftrightarrow x_1 + \epsilon = x_2 + \epsilon \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

e, portanto, x^* é injetora.
(ii) $\mathbb{R}$ é um corpo, portanto é um grupo com a soma como lei de composição.
(iii) Se $\epsilon = e = 0$, então $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}, 0) = (x, y) = \mathbf{x}$.
(iv) Sendo $\mathbf{x}^* = (x + \epsilon, y)$, temos que $\mathbf{x}^{**} = (x + \delta + \epsilon, y)$. Logo, como $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$, $X(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta)) = (x + \epsilon + \delta, y) = \mathbf{x}^{**}$.
Portanto, o grupo de translações é um grupo de transformações a 1-parâmetro. As propriedades **(a)**, **(b)** e **(c)** são imediatas e, com isso, o grupo de translações é um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro.

Exemplo 2.9 Grupo de *scalings* no plano.
Considere o grupo de *scalings*

$$\begin{aligned} x^* &= \alpha x, \\ y^* &= \alpha^2 y, \quad 0 < \alpha < \infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aqui, $\phi(\alpha,\beta)=\alpha\beta$, onde $\alpha=1$ corresponde ao elemento neutro do grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*_+$.

2.3 Primeiro Teorema Fundamental de Lie

Considere o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro

$$\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x};\epsilon), \tag{2.3}$$

com a identidade $\epsilon=0$ e a lei de composição ϕ. Expandindo (2.3) em série de Taylor, em alguma vizinhança de $\epsilon=0$, temos

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}+\epsilon\left(\left.\frac{\partial X}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right)+\frac{1}{2}\epsilon^2\left(\left.\frac{\partial^2 X}{\partial \epsilon^2}\right|_{\epsilon=0}\right)+\ldots = \mathbf{x}+\epsilon\left(\left.\frac{\partial X}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right)+O(\epsilon^2).$$

Seja

$$\xi(x) = \left.\frac{\partial X}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}. \tag{2.4}$$

A transformação que associa $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}+\epsilon\xi(\mathbf{x})$ é chamada transformação infinitesimal do grupo de transformações de Lie (2.3) e as componentes $\xi(x)$ são chamadas de infinitesimais de (2.3).

Nossa intenção é mostrar, via primeiro teorema fundamental de Lie, que as transformações infinitesimais contêm todas as informações necessárias do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro (2.3). Antes, vejamos o seguinte lema:

Lema 2.10 *O grupo de transformações de Lie a* 1*-parâmetro* (2.3) *satisfaz a relação*

$$X(\mathbf{x};\epsilon+\Delta\epsilon) = X(X(\mathbf{x};\epsilon);\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon)). \tag{2.5}$$

Demonstração: Do item **(iv)** da definição de grupo de transformação a 1-parâmetro temos que,

$$X(X(\mathbf{x};\epsilon);\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon)) = X(\mathbf{x};\phi(\epsilon,\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon))).$$

Dos axiomas de grupo, obtemos

$$\begin{aligned} X(\mathbf{x};\phi(\epsilon,\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon))) &= X(\mathbf{x};\phi(\phi(\epsilon,\epsilon^{-1}),\epsilon+\Delta\epsilon)) \\ &= X(\mathbf{x};\phi(e,\epsilon+\Delta\epsilon)) \\ &= X(\mathbf{x};\epsilon+\Delta\epsilon). \end{aligned}$$

Portanto, $X(X(\mathbf{x};\epsilon);\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon)) = X(\mathbf{x};\epsilon+\Delta\epsilon)$. $\square$

Teorema 2.11 `Primeiro Teorema Fundamental de Lie`: *Existe uma parametrização $\tau(\epsilon)$ tal que o grupo de transformações de Lie (2.3) é equivalente à solução de um problema de valor inicial para um sistema de EDOs de primeira ordem dado por*

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \xi(\mathbf{x}^*), \tag{2.6}$$

com

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \quad \textit{quando} \quad \tau = 0. \tag{2.7}$$

Em particular,

$$\tau(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \Gamma(\epsilon')d\epsilon', \tag{2.8}$$

onde

$$\Gamma(\epsilon) = \left.\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\epsilon^{-1},\epsilon)} \tag{2.9}$$

e

$$\Gamma(0) = 1.$$

Demonstração: Fazendo a expansão de (2.5) em série de Taylor em $\Delta\epsilon = 0$, temos

$$X(\mathbf{x};\epsilon+\Delta\epsilon) = X(\mathbf{x};\epsilon) + \frac{\partial X(\mathbf{x};\epsilon)}{\partial\epsilon}\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2). \tag{2.10}$$

Expandindo $\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon)$ da mesma forma que (2.10), obtemos

$$\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon) = \phi(\epsilon^{-1},\epsilon) + \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2), \tag{2.11}$$

onde $\Gamma(\epsilon)$ é definido como em (2.9). Logo, pelo Lema anterior

$$\begin{aligned} X(\mathbf{x};\epsilon+\Delta\epsilon) &= X(X(\mathbf{x};\epsilon);\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon)) \\ &= X(X(\mathbf{x};\epsilon);\Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2)). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Com mais uma expansão em série de Taylor,

$$
\begin{aligned}
X(\mathbf{x};\epsilon+\Delta\epsilon) &= X(\mathbf{x}^*;0)+\Delta\epsilon\Gamma(\epsilon)\left(\left.\frac{\partial X(X(\mathbf{x};\epsilon);\delta)}{\partial\delta}\right|_{\delta=0}\right)+O((\Delta\epsilon)^2) \\
&= \mathbf{x}^*+\Gamma(\epsilon)\xi(\mathbf{x}^*)\Delta\epsilon+O((\Delta\epsilon)^2).
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Dessa forma, igualando (2.10) e (2.13), temos que $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x};\epsilon)$ satisfaz o problema de valor inicial para o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon} = \Gamma(\epsilon)\xi(\mathbf{x}^*), \tag{2.14}$$

com $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ quando $\epsilon = 0$.

De (2.14), $\Gamma(0) = 1$ e $\tau(\epsilon) = \int_0^\epsilon \Gamma(\epsilon')d\epsilon'$ nos dá (2.6).

Como cada $\frac{\partial\xi(x)}{\partial x_i}$ é contínua, pelo teorema de existência e unicidade de soluções, (2.6) tem solução única e tal solução é dada por (2.3). □

Exemplo 2.12 Grupo de translações no plano.
Para o grupo de translações (2.2) do Exemplo 2.8, a lei de composição é dada por $\phi(a,b) = a+b$ e $\epsilon^{-1} = -\epsilon$. Então

$$\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b} = 1$$

e $\Gamma(\epsilon) \equiv 1$.

Sendo $\mathbf{x} = (x,y)$, temos

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{\partial X(\mathbf{x};\epsilon)}{\partial\epsilon} = (1,0).$$

Consequentemente, nosso sistema de EDOs é

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{dy^*}{d\epsilon} = 0,$$

com

$$x^* = x,\ y^* = y \quad \text{quando} \quad \epsilon = 0.$$

Exemplo 2.13 Grupo de *scalings*.

Para o grupo de *scalings* (2.2) do Exemplo 2.9, usando a reparametrização $\epsilon = \alpha - 1$, temos:

$$x^* = (1+\epsilon)x,\ y^* = (1+\epsilon)^2 y, \quad -1 < \epsilon < \infty,$$

de forma que a identidade do grupo seja $\epsilon = 0$. Assim, a lei de composição do grupo ϕ será $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta + \epsilon\delta$. Também, para cada elemento ϵ do grupo, seu inverso é dado por $\epsilon^{-1} = \dfrac{-\epsilon}{1+\epsilon}$. Consequentemente,

$$\frac{\partial \phi(a,b)}{\partial b} = 1 + a,$$

e, portanto,

$$\Gamma(\epsilon) = \left.\frac{\partial \phi(a,b)}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\epsilon^{-1},\epsilon)} = \frac{1}{1+\epsilon}.$$

Sendo $\mathbf{x} = (x,y)$, devemos ter

$$\xi(\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial X(\mathbf{x};\epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = (x, 2y).$$

Assim, nosso sistema de EDOs é:

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = \frac{x^*}{1+\epsilon,} \quad \text{e} \quad \frac{dy^*}{d\epsilon} = \frac{2y^*}{1+\epsilon}$$

com $x^* = x,\ y^* = y$ quando $\epsilon = 0$.

2.4 Geradores infinitesimais

Em vista do primeiro Teorema Fundamental de Lie, a partir de agora consideraremos que o grupo de transformações de Lie é parametrizado de forma que a lei de composição é dada por $\phi(a,b) = a + b$. Assim, $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ e $\Gamma(\varepsilon) \equiv 1$. Logo, em termos dos infinitesimais $\xi(\mathbf{x})$, o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro (2.3) se torna

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon} = \xi(\mathbf{x}^*), \quad \left.\mathbf{x}^*\right|_{\epsilon=0} = \mathbf{x}. \tag{2.15}$$

Definição 2.14 O gerador infinitesimal do grupo de transformações de Lie a 1-

parâmetro (2.3) é o operador

$$X = X(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.16}$$

onde ∇ é o operador gradiente

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Há uma generalização para os geradores infinitesimais de grupos de transformações de Lie. Tal generalização é conhecida como **operador de Lie-Backlund**. Para maiores detalhes, veja [GIKM, Ib].

Do Primeiro Teorema Fundamental de Lie, assim como um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro é determinado por suas transformações infinitesimais, ele também é determinado pelo seu gerador infinitesimal. O teorema seguinte explicita um algoritmo para encontrar a solução do problema de valor inicial (2.15).

Teorema 2.15 *O grupo de transformações de Lie a* 1*-parâmetro* (2.3) *é equivalente a*

$$\mathbf{x}^* = e^{\epsilon X} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \epsilon X \mathbf{x} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} X^k \mathbf{x}, \tag{2.17}$$

onde o operador $X = X(\mathbf{x})$ *é o gerador infinitesimal definido como em* (2.16) *e o operador* X^k *é dado por*

$$X^k = X X^{k-1}, k = 1, 2, \ldots.$$

Em particular, $X^0 = Id$*, onde* Id *é o operador identidade.*

Demonstração: Seja

$$X(\mathbf{x}^*) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}^*) \frac{\partial}{\partial x_i^*},$$

onde

$$\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon).$$

Pelo teorema de Taylor, a série de Taylor de $\mathbf{x}^*$ é dada por

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left(\left. \frac{\partial^k \mathbf{x}^*}{\partial \epsilon^k} \right|_{\epsilon=0} \right). \tag{2.18}$$

Para toda função $F(\mathbf{x})$ diferenciável, temos que

$$\frac{d}{d\epsilon}F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*}\frac{d\mathbf{x}_i^*}{d\epsilon} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}^*)\frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} = X(\mathbf{x}^*)F(\mathbf{x}^*).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon} &= X(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*, \\ \frac{d^2\mathbf{x}^*}{d\epsilon^2} &= \frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon}\right) = \frac{d}{d\epsilon}X(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* = X^2(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* \end{aligned}$$

e, usando indução, chegamos em

$$\frac{d^k\mathbf{x}}{d\epsilon^k} = X^k(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Consequentemente,

$$\left.\frac{d^k\mathbf{x}}{d\epsilon^k}\right|_{\epsilon=0} = X^k(\mathbf{x})\mathbf{x}. \tag{2.19}$$

Substituindo (2.19) em (2.18), obtemos (2.17), completando a demonstração. □

A série dada por (2.17) é chamada de série de Lie, desenvolvida a partir do gerador infinitesimal (2.16), e é a maneira que usaremos para encontrar, dado um gerador infinitesimal, as transformações associadas a esse gerador.

Corolário 2.16 *Se* $F(\mathbf{x})$ *é infinitamente diferenciável, então para o grupo de transformações de Lie a* 1*-parâmetro* (2.3) *com gerador infinitesimal* (2.16)*, temos*

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\epsilon X}) = e^{\epsilon X}F(\mathbf{x}). \tag{2.20}$$

Demonstração: Expandindo $F(\mathbf{x}^*)$ em série de Taylor em $\epsilon = 0$, temos

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\epsilon X}\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\left(\left.\frac{d^kF(\mathbf{x}^*)}{d\epsilon^k}\right|_{\epsilon=0}\right). \tag{2.21}$$

Analogamente a (2.19),

$$\frac{d^kF(\mathbf{x}^*)}{d\epsilon^k} = X^k(\mathbf{x}^*)F(\mathbf{x}^*)$$

e, consequentemente,

$$\left.\frac{d^kF(\mathbf{x}^*)}{d\epsilon^k}\right|_{\epsilon=0} = X^k(\mathbf{x})F(\mathbf{x}).$$

Logo,

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\epsilon X}\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\left(X^k(\mathbf{x})F(\mathbf{x})\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\epsilon^k}{k!}X^k(\mathbf{x})\right)F(\mathbf{x}) = e^{\epsilon X}F(\mathbf{x}).$$

□

Exemplo 2.17 Grupo de rotação.
Considere o grupo de rotação

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\epsilon + y\sin\epsilon, \\ y^* &= -x\sin\epsilon + y\cos\epsilon. \end{aligned}$$

O infinitesimal $\xi(\mathbf{x})$ é dado por

$$\xi(\mathbf{x}) = (\xi_1(x,y), \xi_2(x,y)) = \left(\left.\frac{dx^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}, \left.\frac{dy^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right) = (-y, x).$$

Assim, o gerador infinitesimal é dado por

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Exemplo 2.18 Grupo de dilatações no plano.
Considere o gerador infinitesimal

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - 3y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Então,

$$Xx = x,\ \ X^2x = X(Xx) = x,\ \ \dots,\ \ X^n x = x.$$

Desta forma, a série de Lie de x^* é dada por

$$x^* \ = \ \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\epsilon^k}{k!}X^k\right)x = x + \epsilon x + \frac{\epsilon^2}{2!}x + \frac{\epsilon^3}{3!}x + \frac{\epsilon^4}{4!}x + \cdots = e^{\epsilon}x.$$

Logo, $x^* = e^{\epsilon}x$.

Analogamente para y, devemos ter $y^* = e^{-3\epsilon}y$ e, portanto, a transformação é dada por $\mathbf{x}^* = (e^{\epsilon}x, e^{-3\epsilon}y)$.

2.5 Invariância

Definição 2.19 Uma função $F(\mathbf{x})$ infinitamente diferenciável é uma função invariante sob um grupo de transformações de Lie (2.3) se, e somente se,

$$F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}). \tag{2.22}$$

Se $F(\mathbf{x})$ é uma função invariante de (2.3), então $F(\mathbf{x})$ é chamada de invariante de (2.3). Abaixo, um teorema que nos dá uma condição de invariância.

Teorema 2.20 *$F(\mathbf{x})$ é invariante sob um grupo de transformações de Lie (2.3) se, e somente se, $XF(\mathbf{x}) \equiv 0$.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.15,

$$F(\mathbf{x}^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} X^k F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \epsilon X F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\epsilon^2 X^2 F(\mathbf{x}) + \dots .$$

Suponha que $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*)$. Então

$$0 \;=\; \epsilon X F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\epsilon^2 X^2 F(\mathbf{x}) + \dots = \left(\epsilon Id + \frac{1}{2}\epsilon^2 X + \frac{1}{6}\epsilon^3 X^2 + \dots\right) X F(\mathbf{x}),$$

onde Id é o operador identidade. Assim, segue que $XF(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Reciprocamente, suponha que $XF(\mathbf{x}) \equiv 0$. Então $X^n F(\mathbf{x}) \equiv 0, n = 1, 2, \dots .$

Assim,

$$F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}) + 0\epsilon + 0\frac{1}{2}\epsilon^2 + \dots ,$$

ou seja, $F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x})$. □

Definição 2.21 Uma superfície $F(\mathbf{x}) = 0$ é uma superfície invariante sob um grupo de transformações de Lie (2.3) se, e somente, se

$$F(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{quando} \quad F(\mathbf{x}) = 0.$$

Teorema 2.22 *Uma superfície $F(\mathbf{x}) = 0$ é uma superfície invariante sob um grupo de transformações de Lie (2.3) se, e somente se,*

$$XF(\mathbf{x}) = 0 \quad \textit{quando} \quad F(\mathbf{x}) = 0.$$

Demonstração: Consequência imediata do Teorema 2.20. □

No que se segue, utilizaremos a notação

$$y_k = y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx}, \quad k \geq 1.$$

Uma equação diferencial $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ é o zero de uma função diferencial. Assim, podemos considerar tal equação diferencial como uma superfície no espaço $(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$, onde $y_i = y^{(i)}$. Usaremos essa correspondência na Seção 3.

2.6 Transformações de pontos e transformações estendidas

Definição 2.23 Um grupo de transformações de pontos de Lie a 1-parâmetro é um grupo de transformações da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= X(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \\ \mathbf{u}^* &= U(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \end{aligned} \tag{2.23}$$

agindo no espaço de $n + m$ variáveis

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \mathbf{u} &= (u_1, u_2, \ldots, u_m), \end{aligned}$$

onde $\mathbf{x}$ representa n variáveis independentes e $\mathbf{u}$ representa m variáveis dependentes.

Um grupo de transformações de pontos de Lie (2.23) é admitido pelo sistema de equações diferenciais S se aplica qualquer solução $u = \theta(\mathbf{x})$ de S em uma família uniparamétrica de soluções $u = \phi(\mathbf{x}; \epsilon)$ de S. Equivalentemente, (2.23) deixa S invariante no sentido de que a forma de S é mantida em termos das variáveis de (2.23) para qualquer solução $u = \theta(\mathbf{x})$ de S.

Seja ∂u o conjunto de todas as derivadas parciais de primeira ordem de u com respeito a x:

$$\partial u = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1}, \frac{\partial u^1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u^1}{\partial x_n}, \frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \frac{\partial u^2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u^2}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial u^m}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \right).$$

Em particular, se $m = n = 1$, então $\partial u \equiv y'$.

De forma mais geral, seja $\partial^k u$ o conjunto de coordenadas

$$u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \frac{\partial^k u^{\mu}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}},$$

com $\mu = 1, 2, \ldots, m$, $i_j = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, k$. Isto é, $\partial^k u$ é o conjunto das derivadas parciais de ordem k de u com respeito a $\mathbf{x}$.

A transformação natural das derivadas parciais da variável dependente leva sucessivamente a extensões (prolongações) de (2.23) agindo no espaço (x, u) para grupos de transformações de Lie agindo nos espaços

$$(x, u, \partial u), (x, u, \partial u, \partial^2 u), \ldots, (x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u),$$

para $k > 2$.

Introduzindo o conceito de transformações estendidas (prolongadas), podemos formular o problema de encontrar grupos de transformações de pontos de Lie a 1-parâmetro, admitido por um sistema de equações diferenciais S, em termos dos geradores infinitesimais admitidos por S.

Estudaremos apenas o caso onde $m = n = 1$, ou seja, há uma variável dependente e uma independente.

No estudo das propriedades de invariância de uma EDO de ordem k com a variável independente x e a variável dependente y, o objetivo é encontrar o grupo de transformações de pontos de Lie da forma

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon), \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon), \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde $y = y(x)$.

Naturalmente podemos estender (2.24) para $(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)})$, $k \geq 1$, demandando que (2.24) preserve as condições de contato para os diferenciais $dx, dy, dy_1, dy_2, \ldots, dy_k$

$$dy = y_1 dx \quad \text{e} \quad dy_k = y_{k+1} dx, \quad k \geq 1.$$

Em particular, sob a ação de (2.24), as derivadas transformadas y_k^*, $k \geq 0$, são definidas por

$$dy_k^* = y_{k+1}^* dx^*, \tag{2.25}$$

onde x^* e y^* são dados como em (2.24). Então

$$\begin{aligned} dy^* &= dY(x,y;\epsilon) = \frac{\partial Y(x,y;\epsilon)}{\partial x}dx + \frac{\partial Y(x,y;\epsilon)}{\partial y}dy, \\ dx^* &= dX(x,y;\epsilon) = \frac{\partial X(x,y;\epsilon)}{\partial x}dx + \frac{\partial X(x,y;\epsilon)}{\partial y}dy. \end{aligned} \tag{2.26}$$

De (2.25) e (2.26) segue que $dy^* = y_1^* dx^*$.
E, assim,

$$\frac{\partial Y(x,y;\epsilon)}{\partial x}dx + \frac{\partial Y(x,y;\epsilon)}{\partial y}dy = y_1^*\left[\frac{\partial X(x,y;\epsilon)}{\partial x}dx + \frac{\partial X(x,y;\epsilon)}{\partial y}dy\right]. \tag{2.27}$$

Substituindo as condições de contato em (2.27), temos

$$Y_1(x,y,y_1;\epsilon) = y_1^* = \frac{\frac{\partial Y(x,y;\epsilon)}{\partial x} + y_1\frac{\partial Y(x,y;\epsilon)}{\partial y}}{\frac{\partial X(x,y;\epsilon)}{\partial x} + y_1\frac{\partial X(x,y;\epsilon)}{\partial y}} \tag{2.28}$$

Teorema 2.24 *O grupo de transformações de pontos de Lie a* 1*-parâmetro* (2.24) *agindo no espaço* (x,y) *é estendido para o grupo de transformações de Lie*

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\epsilon), \\ y^* &= Y(x,y;\epsilon), \\ y_1^* &= Y_1(x,y,y_1;\epsilon), \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $Y_1(x,y,y_1;\epsilon)$ *é dado por* (2.28) *e* (2.29) *age no espaço* (x,y,y_1).

Demonstração: Como a extensão já foi encontrada, basta mostrar o fechamento da mesma no espaço (x,y,y_1).

Seja $\phi(\epsilon,\delta)$ a lei de composição dos parâmetros ϵ e δ. Assim,

$$(x^{**},y^{**}) = (X(x^*,y^*;\delta), Y(x^*,y^*;\delta)).$$

Como (2.24) é grupo, temos que $(x^{**},y^{**}) = (X(x,y;\phi(\epsilon,\delta)), Y(x,y;\phi(\epsilon,\delta)))$. Assim, pelas condições de contato $dy^{**} = y_1^{**}dx^{**}$, temos

$$y_1^{**} = Y_1(x,y,y_1,\phi(\epsilon,\delta)) = \frac{\frac{\partial Y(x,y;\phi(\epsilon,\delta))}{\partial x} + y_1\frac{\partial Y(x,y;\phi(\epsilon,\delta))}{\partial y}}{\frac{\partial X(x,y;\phi(\epsilon,\delta))}{\partial x} + y_1\frac{\partial X(x,y;\phi(\epsilon,\delta))}{\partial y}},$$

completando a demonstração. □

Teorema 2.25 *A segunda extensão de* (2.24), *agindo no espaço* (x, y, y_1, y_2), *é dada pelas transformações*(2.29) *e por*

$$y_2^* \quad = \quad Y_2(x, y, y_1, y_2; \epsilon) = \frac{\frac{\partial Y_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y_1}{\partial y} + y_2 \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial X(x,y;\phi(\epsilon,\delta))}{\partial x} + y_1 \frac{\partial X(x,y;\phi(\epsilon,\delta))}{\partial y}}. \tag{2.30}$$

Demonstração: A demonstração é análoga à do Teorema 2.24. □

Usando indução, podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 2.26 *A k-ésima extensão de* (2.24) *é o seguinte grupo de transformações de pontos de Lie agindo no espaço* $(x, y, y_1, y_2 \ldots, y_k)$*:*

$$\begin{aligned}
x^* &= X(x, y; \epsilon), \\
y^* &= Y(x, y; \epsilon), \\
y_1^* &= Y_1(x, y, y_1; \epsilon), \\
&\vdots \\
y_k^* &= Y_k(x, y, y_1, y_2 \ldots, y_k; \epsilon) = \frac{\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + \cdots + y_k \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\frac{\partial X(x,y;\phi(\epsilon,\delta))}{\partial x} + y_1 \frac{\partial X(x,y;\phi(\epsilon,\delta))}{\partial y}}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.27 Grupo de translações.

Para o grupo de translações (2.1) do Exemplo 2.8, temos:

$$y_1^* = \frac{\frac{\partial Y(x,y;\epsilon)}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y(x,y;\epsilon)}{\partial y}}{\frac{\partial X(x,y;\epsilon)}{\partial x} + y_1 \frac{\partial X(x,y;\epsilon)}{\partial y}} = y_1.$$

De forma mais geral,

$$y_k^* = \frac{dy_{k-1}^*}{dx^*} = \frac{d^k y^*}{dx^{*k}}.$$

Como $dx^* = dx$ e $y^* = y$, temos que

$$y_k^* = \frac{d^k y}{dx^k} = y_k.$$

Assim, para o grupo de translações, o k-ésimo grupo estendido é dado por

$$\begin{aligned} x^* &= x+\epsilon, \;\; y^* = y, \\ y_i^* &= y_i, \quad i = 1,2,\ldots,k. \end{aligned}$$

Exemplo 2.28 Grupo de *scalings*.

Para o grupo de *scalings* (2.2) do Exemplo 2.9 temos:

$$y_1^* = \frac{dy^*}{dx^*} = \frac{e^{2\epsilon}dy}{e^{\epsilon}dx} = e^{\epsilon}\frac{dy}{dx} = e^{\epsilon}y_1.$$

De foma mais geral,

$$y_k^* = \frac{dy_{k-1}^*}{dx^*} = \frac{d^k y^*}{dx^{*k}} = \frac{d^k(e^{2\epsilon}y)}{e^{\epsilon}dx^k} = e^{(2-k)\epsilon}y_k.$$

Assim, para o grupo de *scalings*, o k-ésimo grupo estendido é dado por

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\epsilon}x, \\ y^* &= e^{2\epsilon}y, \\ y_i^* &= e^{(2-i)\epsilon}y_i, \quad i = 1,2,\ldots,k. \end{aligned}$$

Sabemos que um grupo de transformações de pontos de Lie a 1-parâmetro é caracterizado pelo seu gerador infinitesimal. Uma vez que a k-ésima extensão do grupo também é um grupo de transformações de pontos de Lie a 1-parâmetro, o estudo dos grupos estendidos se reduz ao estudo dos geradores infinitesimais estendidos.

Definição 2.29 O operador derivada total é definido por

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_{n+1}\frac{\partial}{\partial y_n} + \ldots. \tag{2.31}$$

Em termos da diferencial total (2.31), a k-ésima extensão de (2.24) é dada por

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\epsilon), \\ y^* &= Y(x,y;\epsilon), \\ y_i^* &= \frac{DY_{i-1}(x,y,y_1,\ldots,y_{i-1})}{DX(x,y;\epsilon)}, \quad i = 1,2,\ldots,k, \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $Y_0 = Y(x,y;\epsilon)$.

O grupo de transformações de pontos de Lie

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\epsilon) = x + \epsilon\xi(x,y) + O(\epsilon^2), \\ y^* &= Y(x,y;\epsilon) = y + \epsilon\eta(x,y) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{2.33}$$

agindo no espaço (x,y), tem os infinitesimais $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$, com o gerador infinitesimal dado por (2.16).

A k-ésima extensão de (2.33), dada por

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\epsilon) = x + \epsilon\xi(x,y) + O(\epsilon^2), \\ y^* &= Y(x,y;\epsilon) = y + \epsilon\eta(x,y) + O(\epsilon^2), \\ y_1^* &= Y_1(x,y,y_1;\epsilon) = y_1 + \epsilon\eta^{(1)}(x,y,y_1) + O(\epsilon^2), \\ &\vdots \\ y_k^* &= Y_k(x,y,y_1,\dots,y_k;\epsilon) = y_k + \epsilon\eta^{(k)}(x,y,y_1,\dots,y_k) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{2.34}$$

tem o k-ésimo gerador infinitesimal estendido

$$X^{(k)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x,y,y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \eta^{(k)}(x,y,y_1,\dots,y_k)\frac{\partial}{\partial y_k}, \tag{2.35}$$

$k = 1,2,\dots$, com infinitesimais

$$\xi(x,y),\ \eta(x,y),\ \eta^{(1)}(x,y,y_1),\ \dots,\ \eta^{(k)}(x,y,y_1,\dots,y_k).$$

O próximo teorema nos dá uma formula explícita para os $\eta^{(k)}$.

Teorema 2.30 *Os infinitesimais $\eta^{(k)}$ satisfazem*

$$\eta^{(k)}(x,y,y_1,\dots,y_k) = D\eta^{(k-1)}(x,y,y_1,\dots,y_{k-1}) - y_k D\xi, \quad k = 1,2,\dots, \tag{2.36}$$

onde $\eta^{(0)} = \eta(x,y)$. Em particular,

$$\eta^{(k)} = D^k\eta - \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{(k-j)!j!} y_{k-j+1} D^j\xi, \quad k \geq 1. \tag{2.37}$$

Demonstração: De (2.31), (2.32) e (2.34), temos

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{DY_{k-1}}{DX} = \frac{D[y_{k-1} + \epsilon\eta^{(k-1)} + O(\epsilon^2)]}{D[x + \epsilon\xi + O(\xi^2)]} = \frac{y_k + \epsilon D\eta^{(k-1)}}{1 + \epsilon D\xi} + O(\epsilon^2) \\ &= y_k + \epsilon[D\eta^{(k-1)} - y_k D\xi] + O(\epsilon^2) = y_k + \epsilon\eta^{(k)} + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

levando a (2.36). Usando indução em k, chegamos a (2.37). □

Usando o Teorema acima e a definição de derivada total, podemos encontrar fórmulas ainda mais explícitas para os diferentes $\eta^{(k)}$:

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_1 - \xi_y(y_1)^2; \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_1 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y_1)^2 + \\ &\quad -\xi_{yy}(y_1)^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y_2 - 3\xi_y y_1 y_2; \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} \eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_1 + 3(\eta_{xyy} - 2\xi_{xxy})(y_1)^2 \\ &\quad +(\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})(y_1)^3 - \xi_{yyy}(y_1)^4 + 3(\eta_{xy} - \xi_{xx})y_2 \\ &\quad +3(\eta_{yy} - 3\xi_{xy})y_1 y_2 - 6\xi_{yy}(y_1)^2 y_2 \\ &\quad -3\xi(y_2)^2 + (\eta_y - 3\xi_x)y_3 - 4\xi_y y_1 y_3, \end{aligned} \tag{2.40}$$

continuando até a extensão desejada.

3 Simetrias de equações diferenciais ordinárias

Neste capítulo discutiremos as relações entre os grupos de transformações de pontos de Lie e as equações diferenciais ordinárias. Discutiremos a invariância de EDOs de ordem $n \geq 2$, apresentando condições necessárias e suficientes para que uma EDO admita simetrias de pontos de Lie, porém tais conceitos podem ser aplicados a EDOs de primeira ordem.

Definição 3.1 Uma função localmente analítica com um número finito de variáveis x, y e derivadas de y é chamada de função diferencial. A maior ordem das derivadas que aparecem na função diferencial é chamada de ordem da função. O espaço vetorial de todas as funções diferenciais de ordem finita é denotado por $\mathcal{A}$ e é chamado de espaço universal da Grupo-Análise.

Exemplo 3.2 Qualquer função $f : \emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ analítica é uma função diferencial de ordem 0.

Exemplo 3.3 As funções

$$F = y'' - \sqrt{\frac{y^3}{x}}$$

e

$$F = y^{(4)} - f(x)y^p,$$

onde p é uma constante, são funções diferenciais de ordem 2 e 4, respectivamente.

Então, ao trabalhar com EDOs, estamos lidando com o zero de alguma função diferencial.

Definição 3.4 Uma função diferencial $F(x, y, y_1, \ldots, y_k)$ é uma função invariante sob um grupo de transformações de Lie (2.3) se, e somente se,

$$F(x^*, y^*, y_1^*, \ldots, y_k^*) = 0 \ \text{ quando } \ F(x, y, y_1, \ldots, y_k) = 0.$$

Considere a EDO

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{3.1}$$

$n \geq 2$, ou equivalentemente a superfície no espaço $(x, y, y_1, \ldots, y_{(n-1)})$

$$y_n = f(x, y, y_1, \ldots, y_{(n-1)}), \tag{3.2}$$

onde $y_i = y^{(i)} = \dfrac{d^i y}{dx^i}$.

Definição 3.5 Uma simetria de Lie de uma EDO de ordem n (3.1), $n \geq 2$, é um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro

$$\begin{array}{rcl} x^* & = & X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + o(\epsilon^2), \\ y^* & = & Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + o(\epsilon^2), \end{array}, \tag{3.3}$$

com gerador infinitesimal

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

admitido por (3.1).

Os infinitesimais do gerador infinitesimal satisfazem um sistema sobredeterminado de EDPs, sistema este que recebe o nome de *determining equations* ou *equações determinantes*. Veremos mais detalhes logo em seguida.

Definição 3.6 O grupo de transformações de pontos de Lie a 1-parâmetro (3.3) deixa invariante uma EDO de ordem n (3.1), isto é, é uma simetria de Lie admitida por (3.1) se, e somente se, sua extensão de ordem n deixa invariante a superfície (3.2).

Isto é, o grupo de transformações (3.3) é uma simetria de Lie de (3.1) se, e somente se, estiver nas condições do Teorema 2.19.

Também, invariância na superfície (3.2) significa que qualquer solução $y = \theta(x)$ de (3.1) é levada em outra solução $y = \theta(x, \epsilon)$ via ação de (3.3).

Lema 3.7 *Uma equação diferencial* $F(x, y, y_1, \ldots, y_k) = 0$ *é uma EDO invariante sob um grupo de transformações de Lie* (2.3) *se, e somente se,*

$$X^{(k)} F(x, y, y_1, \ldots, y_k) = 0 \quad \textit{quando} \quad F(x, y, y_1, \ldots, y_k) = 0.$$

É fácil ver que a condição de invariância do Corolário acima é equivalente a

$$X^{(k)}F(x,y,y_1,\dots,y_k) = \lambda F(x,y,y_1,\dots,y_k),$$

para algum $\lambda \in \mathcal{A}$.

Teorema 3.8 `Critério infinitesimal para invariância de uma EDO de ordem` *$n \geq 2$: Seja*

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.4}$$

o gerador infinitesimal do grupo de transformações de pontos de Lie (3.3)*. Seja*

$$X^{(n)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \eta^{(n)}(x,y,y',\dots,y^{(n)})\frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \tag{3.5}$$

a n-ésima extensão de (3.4)*. Então* (3.4) *é uma simetria de pontos admitida por* (3.1) *se, e somente se,*

$$X^{(n)}(y_n - f(x,y,y_1,\dots,y_{n-1}) = 0 \quad \textit{quando} \quad y_n = f.$$

Demonstração: A demonstração segue da Definição 3.6. □

Se f for polinomial em $y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, então os coeficientes de cada monômio deve ser zero, pois para qualquer EDO podemos assumir valores arbitrários para $y, y_1, y_2, \dots,\ y_{n-1}$, encontrando assim um sistema linear de EDPs homogêneas em $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$, as *determining equations* para simetrias de pontos admitidas pela EDO (3.1).

É possível mostrar que uma EDO de segunda ordem admite no máximo 8 geradores e, para $n > 2$, $n+4$ geradores. Veja [Ma].

Para finalizar a seção, um teorema que pode simplificar muitos cálculos.

Teorema 3.9 *Considere uma EDO de ordem n, $n \geq 3$, da forma*

$$y^{(n)} = g(x,y)y^{(n-1)} + h(x,y,y',\dots,y^{(n-2)}).$$

Se a EDO acima admite o gerador infinitesimal (2.16)*, então $\xi_y = 0$ e $\eta_{yy} = 0$.*

As demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [Bl].

4 Simetrias de Noether

Neste capítulo, discutiremos os princípios variacionais que levam à equação de Euler-Lagrange e depois relacionaremos tais conceitos com as simetrias estudadas nos capítulos anteriores, definindo simetrias de Noether e primeiras integrais.

4.1 Equação de Euler-Lagrange

Seja V um espaço vetorial. Um funcional é uma correspondência de V num corpo $\mathbb{K}$. Os corpos usualmente considerados são $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ e para nossos propósitos é suficiente considerar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exemplo 4.1 A norma $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ de um espaço normado $(X, \|.\|)$ é um funcional.

Lema 4.2 *Lema de Lagrange: Se $\alpha(x)$ é contínua num intervalo $[a,b]$ e*

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = 0,$$

para toda função $h(x)$ de classe C^m tal que $h(a) = h(b) = h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0$, $k = 1, \ldots, m$ então $\alpha(x) = 0$.

Demonstração: Suponha que $\alpha(x) \neq 0$ e, sem perda de generalidade, suponha que $\alpha(x) > 0$ em algum $x \in [a,b]$. Então existe intervalo $[x_1, x_2]$ tal que $\alpha(x)$ é positiva nele.

Defina $h(x) = [(x - x_1)(x - x_2)]^{m+1}$ para $x \in [x_1, x_2]$ e $h(x) = 0$ caso contrário. Logo, $h(x)$ está nas condições do Lema. Entretanto,

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)[(x - x_1)(x - x_2)]^{m+1}dx > 0,$$

contradizendo a hipótese. Portanto, $\alpha(x) = 0, \forall x \in [a,b]$. $\square$

Lema 4.3 *Se $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são contínuas em $[a.b]$ e se*

$$\int_a^b [\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)]dx = 0,$$

para toda função $h(x)$ diferenciável, então $\beta(x)$ é diferenciável e $\beta'(x) = \alpha(x), \forall x \in [a,b]$.

Demonstração: Veja [GF]. □

Seja $J[y]$ um funcional definido num espaço vetorial normado $(X, \|.\|)$ e seja

$$\Delta J[y] = J[y+h] - J[y],$$

onde a função $h = h(x)$ é o incremento de $y = y(x)$. Se fixamos y, então $\Delta J[h]$ é um funcional de h. Analogamente ao conceito de Análise, $J[h]$ é dita ser diferenciável se

$$\Delta J[h] = \phi[h] + \epsilon\|h\|,$$

onde $\phi[h]$ é um funcional linear e $\epsilon \to 0$ quando $\|h\| \to 0$. O funcional linear $\phi[h]$ é chamado de variação (ou diferencial) de $J[h]$ e é denotado por $\delta J[h]$.

Teorema 4.4 *A diferencial de um funcional diferenciável é única.*

Demonstração: Suponha que a diferencial não seja única, isto é,

$$\phi_1[h] + \epsilon_1\|h\| = \Delta J[h] = \phi_2[h] + \epsilon_2\|h\|,$$

com $\epsilon_1 \to 0, \epsilon_2 \to 0$ quando $\|h\| \to 0$. Assim,

$$\phi_1[h] - \phi_2[h] = \epsilon_2\|h\| - \epsilon_1\|h\| = (\epsilon_2 - \epsilon_1)\|h\|,$$

com $\epsilon_1 \to 0, \epsilon_2 \to 0$ quando $\|h\| \to 0$. Isto significa que

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\phi_1[h] - \phi_2[h]}{\|h\|} = 0.$$

Suponha que $\phi[h] = \phi_1[h] - \phi_2[h] \neq 0$ para toda função $h = h(x)$. Seja $h_0 \neq 0$ tal que $\phi[h_0] \neq 0$ e defina $h_n = h_0/n$. Logo, $\|h_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi[h_n]}{\|h_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\phi[h_0]}{n\|h_0\|} = \frac{\phi[h_0]}{\|h_0\|} \neq 0,$$

de onde segue que $\dfrac{\phi_1[h]-\phi_2[h]}{\|h\|}$ não tende a zero quando $\|h\| \to 0$, o que é um absurdo.

Logo, $\phi[h] = \phi_1[h] - \phi_2[h] = 0$ e, portanto, $\phi_1[h] = \phi_2[h]$. □

Também da Análise sabemos que, dada uma função diferenciável $F(x_1,\ldots,x_n)$, F tem um extremo (local) no ponto $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ se $\Delta F = F(x_1,\ldots,x_n) - F(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ não muda de sinal para todos os pontos $(x_1,\ldots,x_n)$ pertencentes a uma vizinhança de $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$, onde o extremo é um máximo se $\Delta F \leq 0$ e é um mínimo se $\Delta F \geq 0$.

Da mesma forma, dizemos que um funcional $J[y]$ tem um extremo (local) em $y = y^*$ se $J[y] - J[y^*]$ não muda de sinal numa vizinhança da curva $y = y^*(x)$.

Teorema 4.5 *Uma condição necessária para que o funcional diferenciável $J[h]$ tenha um extremo em $y = y^*$ é $\delta J[h] = 0$, para todos os incrementos h possíveis.*

Demonstração: Veja [GF]. □

Um dos problemas mais simples e mais usuais no cálculo variacional é determinar para que funções $y(x)$ o funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

possui extremo. O Teorema abaixo nos dá uma condição necessária para que o funcional definido acima possua um extremo. Omitiremos a demonstração por ser um caso particular de uma generalização que construiremos mais adiante, porém ela pode ser encontrada em [GF].

Teorema 4.6 *Seja $J[y]$ um funcional da forma*

$$J[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx,$$

definido num conjunto de funções $y(x)$ que têm a primeira derivada contínua em $[a,b]$ e satisfaz a condição de fronteira $y(a) = A, y(b) = B$. Então uma condição necessária para que $J[y]$ tenha um extremo para uma dada função $y(x)$ é que $y(x)$ satisfaça a chamada **Equação de Euler-Lagrange**

$$\frac{\delta F}{\delta y} := F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \tag{4.1}$$

onde

$$\frac{\delta}{\delta y} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}$$

é o operador de Euler-Lagrange.

Consideremos agora funcionais da forma

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})dx. \tag{4.2}$$

Analogamente ao problema anterior, queremos encontrar para quais funções $y = y(x)$ satisfazendo as condições

$$\begin{aligned} y(a) &= A_1, y'(a) = A_2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}, \\ y(b) &= B_1, y'(b) = B_2, \ldots, y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}, \end{aligned}$$

o funcional (4.2) possui extremo. Suponha que $z(x) = y(x) + h(x)$ é tal que

$$\begin{aligned} z(a) &= A_1, z'(a) = A_2, \ldots, z^{(n-1)}(a) = A_{n-1}, \\ z(b) &= B_1, z'(b) = B_2, \ldots, z^{(n-1)}(b) = B_{n-1}, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} h(a) &= h'(a) = \cdots = h^{(n-1)}(a) = 0, \\ h(b) &= h'(b) = \cdots = h^{(n-1)}(b) = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Utilizando o Teorema de Taylor, temos que

$$\begin{aligned} F(x, y+h, y'+h', \ldots, y^{(n)} + h^{(n)}) &\approx F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) + F_y(x, y, y', \ldots, y^{(n)})h + \\ &+ F_{y'}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})h' + \cdots + \\ &+ F_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})h^{(n)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta J[h] &= \int_a^b [F(x, y+h, y'+h', \ldots, y^{(n)} + h^{(n)}) - F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})]dx \approx \\ &\approx \int_a^b [F_y(x, y, y', \ldots, y^{(n)})h + F_{y'}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})h' + \ldots]dx \end{aligned}$$

Dessa forma, o incremento $\delta J[h]$ é

$$\delta J[h] = \int_a^b F_y(x, y, y', \ldots, y^{(n)})h(x)dx.$$

Utilizando o Teorema 4.5, temos que uma condição necessária para que $J[h]$ possua extremo é

$$\int_a^b F_y(x,y,y',\dots,y^{(n)})h(x)dx = 0. \tag{4.4}$$

Suponha que existam as derivadas em relação a x de ordem k de $F_{y^{(k)}}$, $k = 1,\dots,n$. Integrando a condição (4.4) n vezes por partes e usando as condições de fronteira (4.3), temos que

$$\int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right] h(x)dx = 0.$$

Então, pelo Lema 4.3, temos que

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0, \tag{4.5}$$

a equação de Euler-Lagrange. Utilizando o operador derivada total (2.31), o operador de Euler-Lagrange pode ser reescrito como

$$\frac{\delta}{\delta y} = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j D^j \frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{4.6}$$

De maneira mais geral, o operador de Euler-Lagrange é definido pela soma formal

$$\frac{\delta}{\delta y} = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j D^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

4.2 Simetrias de Noether

Definição 4.7 Dizemos que uma EDO $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0$ possui princípio variacional, ou estrutura variacional, se existe uma função $\mathcal{L}(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})$, chamada de Lagrangeana, tal que

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y} = F.$$

Fisicamente, a Lagrangeana pode ser interpretada como a diferença entre as energias cinética e potencial de um sistema.

Sejam $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0$ uma EDO e $\mathcal{L}(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})$ uma Lagrangeana tal que a equação de Euler-Lagrange é satisfeita.

Seja

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.7}$$

um gerador de simetrias de F. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x^*, y^*, \ldots, (y^{(n)})^*) &= \mathcal{L}(x + \epsilon\xi + o(\epsilon^2), y + \epsilon\eta + o(\epsilon^2), \ldots, y^{(n)} + \epsilon\eta^{(n)} + o(\epsilon^n)) \approx \\
&\approx \mathcal{L}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) + \\
&\quad + \epsilon\left(\xi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} + \eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'} + \cdots + \eta^{(n)}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y^{(n)}}\right) + o(\epsilon^2) = \\
&= \mathcal{L}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) + \epsilon X^{(n)}\mathcal{L} + o(\epsilon^2),
\end{aligned}$$

onde $X^{(n)}$ é a n-ésima extensão de (4.7). Além disso, $dx^* = (1 + \epsilon(D\xi) + o(\epsilon^2))dx$.

Assim,

$$\begin{aligned}
J[y^*] &= \int_a^b \mathcal{L}(x^*, y^*, \ldots, (y^{(n)})^*)dx^* = \\
&= \int_a^b [\mathcal{L}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) + \epsilon X^{(n)}\mathcal{L} + o(\epsilon^2)](1 + \epsilon(D\xi) + o(\epsilon^2))dx = \\
&= \int_a^b \mathcal{L}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})dx + \epsilon\int_a^b (X^{(n)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi)dx + o(\epsilon^2) = \\
&= J[y] + \epsilon\int_a^b (X^{(n)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi)dx + o(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Se $J[y] = 0$, temos que

$$J[y^*] = \epsilon\int_a^b (X^{(n)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi)dx + o(\epsilon^2).$$

Para então satisfazer as condições do Corolário 3.2, devemos ter

$$J[y^*] = \epsilon\int_a^b (X^{(n)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi)dx + o(\epsilon^2) = 0$$

e, pela independência linear dos monômios $\epsilon, \epsilon^2, \ldots$, devemos obrigatoriamente ter

$$X^{(n)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi = 0.$$

Definição 4.8 Sejam (4.7) um gerador de simetrias e $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ uma Lagrangeana de F.

X é dito ser um gerador de simetria variacional da equação de Euler-Lagrange se $X^{(n)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi = 0$.

Se existe função $A = A(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ tal que $X^{(n)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi = DA$, então X é dito ser um gerador de simetria de divergência. Podemos então definir as simetrias de Noether.

Definição 4.9 Um gerador de simetrias (4.7) é dito ser um gerador de simetria de Noether da equação diferencial $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ se é um gerador de simetria variacional ou de divergência.

Considere a EDO

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.9}$$

Definição 4.10 Uma primeira integral da EDO (4.9) é uma função $I = I(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ tal que

$$DI = 0$$

em todas as soluções $y = y(x)$ da EDO.

Uma vez que uma primeira integral I da EDO (4.9) satisfaz $I(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = c$, onde c é uma constante, podemos interpretá-la como uma quantidade que é conservada nas soluções de (4.9).

Seja

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

um gerador de simetria de Noether. Então, usando o Teorema de Noether (veja [BA, GF, No]), podemos afirmar que I é da forma

$$I = A - \xi\mathcal{L} - (\eta - y'\xi)\frac{\delta}{\delta y'}\mathcal{L} - D((\eta - y'\xi))\frac{\delta}{\delta y''}\mathcal{L} - \cdots - D^{n-1}((\eta - y'\xi))\frac{\delta}{\delta y^{(n)}}\mathcal{L}, \tag{4.10}$$

onde A é a função potencial de (**??**). Para maiores detalhes sobre simetrias de Noether e primeiras integrais, veja [BF, BA, GF, FST, No].

5 Equação de Emden-Fowler

Neste capítulo aplicaremos a teoria de simetrias de Lie na equação de Emden-Fowler (1.2), encontrando sua *group classification* completa. A seguir, usando seu princípio variacional, encontraremos simetrias de Noether e as primeiras integrais para casos não presentes em [BMZ]. Para finalizar, encontraremos uma solução invariante a três parâmetros de $y'''' - ay^{-5/3} = 0$ e, usando suas primeiras integrais, encontramos uma solução invariante implícita que está de acordo com os resultados obtidos em [BMZ].

5.1 Simetrias de Lie

Sejam $F = y'''' - ax^{\gamma}y^{n} = 0$ e X um gerador de simetrias de F dado por (2.16). Aplicando a extensão de quarta ordem do gerador X em F, obtemos

$$X^{(4)}F = \eta^{(4)} - a\gamma x^{\gamma-1}\xi y^{n} - \eta(nax^{\gamma}y^{n-1}). \tag{5.1}$$

Tomando $g(x,y) = ax^{\gamma}$ e $h(x,y,y',y'',y''',y'''') = 0$, do Teorema 3.9 temos que $\xi_y = 0$ e $\eta_{yy} = 0$. Assim

$$\xi(x,y) = \xi(x), \quad \eta(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x). \tag{5.2}$$

Aplicando a condição de invariância a (5.1) e usando (5.2) e (2.37) para $\eta^{(4)}$, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda(y'''' - ax^{\gamma}y^{n}) \quad = \quad & \beta'''' + \alpha''''y + y^{n-1}(-n\beta ax^{\gamma}) + y^{n}(-a\gamma x^{\gamma-1}\xi - nax^{\gamma}\alpha) + \\ & + y'(4\alpha''' - \xi'''') + y''(6\alpha'' - 4\xi''') + y'''(4\alpha' - 6\xi'') + \\ & + y''''(\alpha - 4\xi').\end{aligned} \tag{5.3}$$

Temos, então, as seguintes *determining equations*:

$$\beta'''' + \alpha''''y + y^{n-1}(-n\beta ax^{\gamma}) + y^{n}(-a\gamma x^{\gamma-1}\xi - nax^{\gamma}\alpha) = \lambda ax^{\gamma}y^{n}, \tag{5.4}$$

$$4\alpha''' - \xi'''' = 0, \tag{5.5}$$

$$6\alpha'' - 4\xi''' = 0, \tag{5.6}$$

$$4\alpha' - 6\xi'' = 0, \tag{5.7}$$

$$\alpha - 4\xi' = \lambda. \tag{5.8}$$

De (5.7), temos que $\alpha(x)$ é da forma

$$\alpha(x) = \frac{3}{2}\xi'(x) + k, \tag{5.9}$$

onde k é uma constante de integração. Substituindo (5.9) em (5.8), encontramos

$$\lambda(x) = -\frac{5}{2}\xi'(x) + k.$$

Logo, de (5.9) e (5.6), temos que $\xi''' = 0$, isto é, $\xi(x)$ é da forma $\xi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ e, portanto, $\eta(x,y)$ é dado por

$$\eta(x,y) = \left(\frac{3}{2}a_1 + 3a_2 x + k\right)y + \beta(x).$$

A equação determinante (5.4) pode então ser reescrita como

$$\begin{aligned} \beta'''' &+ y^n\left\{ax^\gamma\left[a_1\left(\frac{-3n-5}{2}\right) + k(1-n) + a_2(-3n-5)x\right]\right\}+ \\ &+ y^n\left\{a\gamma x^{\gamma-1}(-a_0 - a_1 x - a_2 x^2)\right\} + y^{n-1}(-nax^\gamma\beta) = 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

finalizando a prova do seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Seja*

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

um gerador de simetria de Lie da EDO $y'''' = ax^\gamma y^n$. *Então*

$$X = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \left[\left(\frac{3}{2}a_1 + 3a_2 x + k\right)y + \beta(x)\right]\frac{\partial}{\partial y},$$

onde as constantes a_0, a_1, a_2, a_3 *e a função* $\beta(x)$ *e satisfazem* (5.10).

É importante notar que se $n \neq 0, 1$, temos que $\beta(x) = 0$ em (5.10) pela independência linear dos monômios $1, y, y^2, \ldots$. Desta forma, alguns casos devem ser considerados separadamente. Tais casos são aqueles em que constantes são eliminadas ou que alterem a equação (5.10), resultando em simetrias possivelmente diferentes das obtidas nos casos mais gerais. Os valores particulares para n que de alguma forma alteram a equação (5.10) são: $n = 0, 1, -5/3$.

Essa análise baseada nos parâmetros nos leva a encontrar a classificação de todas as simetrias, o que faremos a seguir e chamamos de *group classification* completa da equação em questão.

Consideremos primeiramente o caso em que $n \neq 0, 1, -5/3$, com $a \neq 0$. Como observado anteriormente, este caso implica em $\beta(x) = 0$. Assim, a equação (5.10) se torna

$$x^{\gamma}\left[a_1\left(\frac{-3n-5}{2}\right) + k(1-n) - a_1\gamma\right] + x^{\gamma+1}\left[a_2(-3n-5) - a_2\gamma\right] - a_0\gamma x^{\gamma-1} = 0. \tag{5.11}$$

Consequentemente, se $\gamma \neq 0, -3n-5$, temos o gerador de simetria

$$X = (1-n)x\frac{\partial}{\partial x} + (4+\gamma)y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Se $\gamma = -3n-5$, temos os geradores

$$X_1 = (n-1)x\frac{\partial}{\partial x} + (3n+1)y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Finalmente, se $\gamma = 0$, temos os geradores

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = (1-n)x\frac{\partial}{\partial x} + 4y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Considere agora $n = -5/3$. Como ainda temos $\beta(x) = 0$, pois $n \neq 0, 1$, a equação (5.10) é então escrita como

$$ax^{\gamma}\left(\frac{8k}{3} - \gamma a_1\right) - aa_0\gamma x^{\gamma-1} - aa_2\gamma x^{\gamma+1} = 0. \tag{5.12}$$

Logo, devemos considerar dois casos para γ em (5.12): $\gamma = 0$ e $\gamma \neq 0$. Se $\gamma = 0$, temos que os termos a_0, a_1 e a_2 de $\xi(x)$ são arbitrários e $k = 0$. Assim, obtemos os geradores de simetria

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.13}$$

para a equação

$$y'''' = ay^{-5/3}. \tag{5.14}$$

Se $\gamma \neq 0$, temos pela independência linear dos monômios $ax^{\gamma-1}, ax^{\gamma}, ax^{\gamma+1}$ que os coeficientes a_0 e a_2 se anulam e $k = \dfrac{3\gamma}{8}$, de forma que o gerador de simetria de

$$y'''' = ax^{\gamma}y^{-5/3}. \tag{5.15}$$

é dado por

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{12+3\gamma}{8}y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{5.16}$$

Em nenhum dos casos anteriores foi considerado $a = 0$. Quando $a = 0$, a equação (5.10) se escreve $c'''' = 0$, isto é,

$$c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3. \tag{5.17}$$

Assim, os geradores de simetria de Lie de $y'''' = 0$ são

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} \\ X_5 = \frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_6 = x\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_8 = x^3\frac{\partial}{\partial y}. \end{gathered} \tag{5.18}$$

Os geradores (5.18) encontrados estão de acordo com [BMZ], onde equações do tipo $y'''' = f(y)$ foram estudadas.

Considere a mudança de variáveis

$$y \mapsto \bar{y} = y - \frac{ax^{\gamma+4}}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)}.$$

Logo, derivando $\bar{y}$ quatro vezes, devemos ter $\bar{y}'''' = y'''' - ax^{\gamma}$. Portanto, se considerarmos $n = 0$ em F, as simetrias de $y'''' - ax^{\gamma} = 0$ são equivalentes às simetrias encontradas para o caso anterior, $a = 0$, através da mudança de variáveis $y \mapsto \bar{y}$.

Considere, finalmente, $n = 1, a \neq 0$. Então nossa equação (5.10) é escrita como

$$\begin{aligned} \beta'''' &- ax^\gamma \beta + \\ &+ y\Big[ax^\gamma(-4a_1 - 8a_2 x) + a\gamma x^{\gamma-1}(-a_0 - a_1 x - a_2 x^2)\Big] = 0, \end{aligned} \tag{5.19}$$

isto é,

$$\beta'''' - ax^\gamma \beta = 0,$$

$$ax^{\gamma-1}(-a_0\gamma) + ax^\gamma[a_1(-4-\gamma)] + ax^{\gamma+1}[a_2(-8-\gamma)] = 0.$$

Suponha que $\gamma \neq 0, -4, -8$. Então $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ e os geradores de simetria de $y'''' - ax^\gamma y = 0$ são

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \beta(x)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde $\beta(x)$ é uma solução da própria equação considerada.

Se $\gamma = -4$, temos que $a_0 = a_2 = 0$ e os geradores de simetria de $y'''' - ax^{-4}y = 0$ são

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \beta(x)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde $\beta(x)$ é como no caso anterior.

Se $\gamma = -8$, temos que $a_0 = a_1 = 0$ e os geradores de simetria de $y'''' - ax^{-8}y = 0$ são

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \beta(x)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde $\beta(x)$ também é como nos casos anteriores.

Se $\gamma = 0$, a equação (5.19) nos dá $a_1 = a_2 = 0$ e

$$\beta'''' - a\beta = 0. \tag{5.20}$$

Para resolver a EDO (5.20), devemos considerar dois casos: $a > 0$ e $a < 0$. Por questão de simplicidade, consideraremos $a = 1$ e $a = -1$. Se $a = 1$, temos a EDO $\beta'''' - \beta = 0$ e sua solução geral é dada por

$$\beta(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 e^{-x} + c_4 \sin x,$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes.

Assim, os geradores de simetria de $y'''' - y = 0$ são

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = e^x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = e^{-x}\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = \sin x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_6 = \cos x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Se $a = -1$, a EDO $\beta'''' + \beta = 0$ possui solução dada por

$$\beta(x) = d_1 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + d_2 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + d_3 e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + d_4 e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}},$$

onde d_1, d_2, d_3 e d_4 são constantes.

Temos então os geradores de simetria

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_5 = e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_6 = e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}$$

para a equação $y'''' + y = 0$, terminando a *group classification* da equação de Emden-Fowler proposta.

Vale ressaltar que o caso $n = 1$ tem uma particularidade típica: na maioria dos casos, para encontrar todas as simetrias de Lie de uma equação diferencial linear, deve-se saber anteriormente uma solução da própria equação, seja ela ordinária ou parcial. Isso se deve porque alguma das *determining equations* resultará na equação considerada.

As simetrias encontradas para o caso $n = 1$ com $\gamma = 0$ também estão de acordo com os resultados obtidos em [BMZ].

5.2 Simetrias de Noether e primeiras integrais

Apresentaremos agora algumas verificações para os geradores encontrados na seção anterior e, por fim, resumiremos em uma tabela as simetrias de Noether encontradas.

Considere a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{(y'')^2}{2} - ax^\gamma F(y), \quad F(y) = \begin{cases} \dfrac{y^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1, \\ \\ \ln|y|, & n = -1. \end{cases} \tag{5.21}$$

Aplicando o operador de Euler-Lagrange (4.6) à Lagrangeana, obtemos a EDO (1.2).
Considere o gerador
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{5.22}$$
Note que X_1 é gerador de simetria de $y'''' - ay^n = 0, \forall n$, então nossa análise se reduz a verificar $n = -1$ e $n \neq -1$.

Utilizando a Definição 4.8, temos que
$$X_1^{(2)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi = 0, \quad \forall n,$$
e, portanto, (5.22) é uma simetria variacional de $y'''' - ay^n = 0$.

Considere a equação $y'''' - ax^{(-3n-5)}y^n = 0$ e o gerador
$$X_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}. \tag{5.23}$$
Utilizando a Definição 4.8, temos que
$$X_2^{(2)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi = 4y'y'' = D[2(y')^2],$$
se $n \neq -1$ e
$$X_2^{(2)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi = 4y'y'' + 3x^{-1} = D[2(y')^2 + 3\ln|x|],$$
se $n = -1$. Portanto, (5.23) é uma simetria de divergência da EDO em questão.

Assim, provamos o item 1 e parcialmente o item 3 do seguinte resultado (veja [FST]).

Teorema 5.2 *As seguintes afirmações valem:*

1. *O gerador*
$$X = \frac{\partial}{\partial x} \tag{5.24}$$
é um gerador de simetria variacional da equação
$$y'''' + ay^n = 0. \tag{5.25}$$

2. *Seja*
$$X_n = (1-n)x\frac{\partial}{\partial x} + 4y\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.26}$$
um gerador de simetria de Lie da equação (5.25). *Então X é é um gerador de simetria variacional da EDO se, e somente se, $n = -5/3$.*

3. *O gerador*

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.27}$$

é um gerador de simetria de divergência da equação

$$y'''' + ax^{(-3n-5)}y^n = 0, \tag{5.28}$$

onde a é uma constante.

Em particular, se $n = -5/3$*, então* X *é gerador de simetria de divergência da equação* $y'''' + ay^{-\frac{5}{3}} = 0$.

Para provar o item 2, tomemos primeiramente $n = -5/3$. Assim, temos o gerador

$$X_{-5/3} = 4\left(2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

e, utilizando a Definição 4.8, $X_{-5/3}\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi = 0$. Por outro lado, se n é arbitrário, $X_n\mathcal{L} + \mathcal{L}D\xi = (3n+5)\mathcal{L}$.

Portanto, X_n é gerador de simetria variacional de (5.25) se, e somente se, $n = -5/3$.

Omitiremos o restante da demonstração do item 3 por questão de brevidade, porém ela pode ser encontrada com detalhes em [FST] e é análoga aos casos apresentados anteriormente.

A tabela a seguir apresenta um resumo das simetrias de Noether encontradas para os geradores encontrados na seção anterior.

Equação	Gerador	Potencial A
$y'''' = ay^n,\ \forall n$	$\frac{\partial}{\partial x}$	0
$y'''' = ay^{\frac{-5}{3}}$	$2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y}$	0
$y'''' = ax^{(-3n-5)}y^n$	$x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}$	$2(y')^2$
$y'''' = ay^{\frac{-5}{3}}$	$x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}$	$2(y')^2$
$y'''' = ax^{-2}y^{-1}$	$x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}$	$2(y')^2 + 3\ln\lvert x\rvert$

Tabela 5.1: Simetrias de Noether encontradas para os geradores da seção anterior.

Podemos então estabelecer primeiras integrais para as simetrias da Tabela 5.1. As primeiras integrais para os casos $n = -5/3$ não foram estudadas, uma vez que tais resultados podem ser encontrados em [BMZ]. Assim, encontramos as primeiras integrais para o gerador de simetria

$$x^2\frac{\partial}{\partial x}+3xy\frac{\partial}{\partial y}$$

da EDO $y'''' = ax^{-3n-5}y^n$.

Consideremos primeiramente $n \neq -1$. Então, usando a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{(y'')^2}{2} - \frac{y^{n+1}}{n+1}$$

e (4.10), encontramos a primeira integral

$$I = 2(y')^2 + \frac{x^2(y'')^2}{2} - ax^{-3(n+1)}\frac{y^{n+1}}{n+1} + (3xy - y'x^2)y''' - (3y + xy')y'' = c.$$

Se $n = -1$, então com a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{(y'')^2}{2} - ax^{-2}ln|y|$$

e (4.10), encontramos a primeira integral

$$I = 2(y')^2 + 3a\ln|x| - a\ln|y| + \frac{x^2(y'')^2}{2} + (3xy - y'x^2)y''' - (3y + xy')y'' = c.$$

5.3 Soluções invariantes

Apresentaremos duas soluções invariantes para a equação $y''''-ay^{-5/3} = 0$. Utilizaremos o método de características

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)}$$

para encontrar a primeira (veja Apêndice) e utilizaremos as primeiras integrais obtidas em [BMZ] para encontrar uma outra solução invariante, dada por uma integral. Veja [FST] para encontrar outras soluções invariantes do problema analisado.

Antes de proceder com os resultados, definamos solução invariante.

Definição 5.3 Seja

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0 \tag{5.29}$$

uma EDO que admite um grupo de transformações de pontos de Lie a 1-parâmetro com gerador infinitesimal

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{5.30}$$

A função $y = \theta(x)$ é dita ser uma solução invariante da EDP (5.29) se, e somente se,
(i) $y = \theta(x)$ é uma curva invariante de (5.30); e
(ii) $y = \theta(x)$ é solução de (5.29).

Para maiores detalhes, veja [BA, Hy, Ib, SF2].

Considere a equação $y'''' - ay^{-5/3} = 0$ e os geradores de simetria X_1, X_2 e X_3 dados por (5.13).

Dados $\lambda, \epsilon, \delta$ arbitrários,

$$X = (\lambda X_1 + \epsilon X_2 + \delta X_3) = (\lambda + \epsilon x + \delta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{3\epsilon}{2}y + 3\delta xy\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Utilizando o método de características, temos

$$\frac{dx}{\lambda + \epsilon x + \delta x^2} = \frac{dy}{y\left(\frac{3}{2}\epsilon + 3\delta x\right)}.$$

Assim, obtemos o invariante

$$y = C(\lambda + \epsilon x + \delta x^2)^{3/2}, \tag{5.31}$$

onde C é uma constante de integração a ser determinada. Considerando agora que $y'''' - ay^{-5/3} = 0$, determinamos

$$C = \left[\frac{16a}{9(\epsilon^2 - 4\lambda\delta)^2}\right]^{3/8}.$$

Portanto, nossa solução de $y'''' - ax^{-5/3} = 0$ é uma família a três parâmetros

$$Y_{\lambda,\epsilon,\delta}(x) = \left[\frac{16a}{9(\epsilon^2 - 4\lambda\delta)^2}\right]^{3/8}(\lambda + \epsilon x + \delta x^2)^{3/2}. \tag{5.32}$$

Note que se $\lambda = \delta = 0$ e $\epsilon = 1$, temos

$$Y_{0,1,0} = \left(\frac{16a}{9}\right)^{3/8} x^{3/2},$$

solução que seria obtida via método de características considerando $X = X_2$.

Tomando $\lambda = 0 = \epsilon$ e $\delta = 1$, estaríamos considerando somente o gerador X_3, gerador este que nos dá apenas o invariante trivial, acontecendo o mesmo se tomássemos $\epsilon = \delta = 0$ e $\lambda = 1$. Porém, $y = 0$ não é solução de $y'''' - ay^{-5/3} = 0$, pois $y(x)$ deve ser obrigatoriamente uma função não nula.

A solução a três parâmetros (5.32) acaba por explicar os motivos de não conseguirmos encontrar soluções invariantes via método de características para os geradores X_2 e X_3. Assim, se $\epsilon = 0$, não podemos tomar $\delta = 0$ ou $\lambda = 0$.

Por outro lado, se $\epsilon^2 = \pm 2\sqrt{\lambda\delta}$, de (5.31) temos que

$$Y(x) = C(\lambda \pm 2\sqrt{\lambda\delta}x + \delta x^2)^{3/2} = C(\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\delta}x)^3.$$

Assim, para que y seja solução, teremos $\frac{1}{c} = 0$, pois y""=0, o que não pode acontecer.

Considere agora, de acordo com [BMZ], as primeiras integrais obtidas por meio de X_1, X_2 e X_3, dadas respectivamente por

$$I_1 = \frac{1}{2}(y'')^2 - \frac{1}{2}ay^{-2/3} - y'y''' = c_1,$$

$$I_2 = xI_1 + \frac{3}{2}yy''' - \frac{1}{2}y'y'' = c_2,$$

$$I_3 = x^2 I_1 + 3xyy''' - xy'y'' - 3yy'' + 3(y')^2 = c_3,$$

com c_1, c_2 e c_3 constantes. Isolando o termo $3yy'''$ em I_2 e substituindo em I_3, temos

$$3yy'' - 2(y')^2 + x^2 c_1 - 2xc_2 + c_3 = 0. \tag{5.33}$$

Tome $c_1 = c_2 = 0$ e considere a mudança de variáveis $y' = \phi(y)$. Integrando (5.33), obtemos que uma solução invariante implícita de $y'''' - ay^{-5/3} = 0$, via primeiras integrais, é dada por

$$\int \frac{dy}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}c_3 + c_4 y^{4/3}}} = x + c_5,$$

onde c_4 e c_5 são constantes e $c_3 c_4 \neq 0$, o que se pode ver substituindo a solução implícita na equação. Desta forma, não podemos ter $c_3 = 0$.

Referências Bibliográficas

[Bl] BLUMAN, G. W.; *Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation*, J. Math. Anal. Appl., 145, 52-62, 1990.

[BA] BLUMAN, G. W.; ANCO, S. C.; *Symmetry and integration methods for differential equations*, 154, Springer, 2002.

[BMZ] BOKHARI, A. H.; MAHOMED, F. M.; ZAMAN, F. D.; *Symmetries and integrability of a fourth-order Euler-Bernoulli beam equation*, J. Math. Phys., 51, 053517, 2010.

[BF] BOZHKOV, Y.; FREIRE, I. L.;*On the Lane Emden system in dimension one*, Appl. Math. Comput., 218, 10762-10766, 2012.

[FST] FREIRE, I. L.; SILVA, P. L.; TORRISI, M.; *Lie and Noether symmetries for a class of fourth-order Emden-Fowler equations*, submitted.

[GF] GELDAND, I. M.; FOMIN, S. V.; *Calculus of variations*, Dover, 2000.

[GIKM] GRIGORIEV, Y. N.; IBRAGIMOV, N. H.; KOVALEV, V. F.; MELESHKO, S. V.; *Symmetries of Integro-Differential Equations*, Springer, 2010.

[HBW] HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T.; *Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories*, J. Sound Vibration, 225, 935-988, 1999.

[Hy] HYDON, P. E.; *Symmetry methods for differential equations*, Cambridge University Press, 2000.

[Ib] IBRAGIMOV, N. H.; *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations*, Wiley, 1999.

[Ma] MAHOMED, F. M.; *Symmetry group classification of ordinary differential equations: Survey of some results*, Math. Meth. Appl. Sci., 30, 1995-2012, 2007.

[No] NOETHER, E.; *Invariante Variationsprobleme*, Math. Phys. Kl., 235-257, 1918.

[SF1] SILVA, P. L; FREIRE, I. L; *Grupos de transformações e equações diferenciais*, Relatório final, FAPESP, 2012.

[SF2] SILVA, P. L; FREIRE, I. L; *Grupos de transformações e equações diferenciais*, Relatório parcial, FAPESP, 2013.

6 Apêndice

6.1 Equação característica

Seja

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{6.1}$$

uma equação diferencial ordinária que admita um grupo de transformações de pontos de Lie a 1-parâmetro com gerador infinitesimal

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.2}$$

Seja $\theta(x)$ um invariante de (6.1). Então devemos ter

$$X(y - \theta(x)) = \left(\xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right)(y - \theta(x)) = 0,$$

isto é,

$$-\xi(x, y)\frac{d\theta}{dx} + \eta(x, y) = 0.$$

Em outras, palavras, $\theta(x)$ é uma curva invariante do grupo gerado por (6.2) se, e somente se,

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)}.$$