

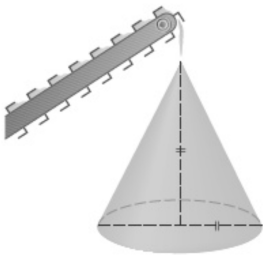
Lista 3

Funções de uma Variável

Taxas Relacionadas, Derivadas de Ordem superior, Máximos e mínimos.

Taxas relacionadas

1. Se uma bola de neve derrete de tal forma que sua área de superfície decresce a uma taxa de $1\text{cm}^2/\text{min}$, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10cm .
2. Dois carros iniciam o movimento no mesmo ponto. Um viaja para o sul a 60km/h e o outro para oeste a 25km/h . A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?
3. A água está vazando de um tanque cônico invertido a uma taxa de $10.000\text{cm}^3/\text{min}$. Ao mesmo tempo está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6m de altura e o diâmetro no topo é 4m . Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de $20\text{cm}/\text{min}$ quando a altura da água for 2m , encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.
4. Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de $30\text{m}^3/\text{min}$ formando uma pilha na forma de cone com diâmetro da base e da altura sempre iguais. Quão rápido está crescendo a altura da pilha, quando sua altura é de 10m .



5. O café sai de uma máquina de café expresso a uma taxa uniforme de $10\text{cm}^3/\text{s}$ e é coletado em uma xícara em forma de cone truncado (ver figura abaixo). Se os raios superior e inferior da xícara forem de 4 e 2cm e a altura for de 6cm , com que rapidez estará subindo o nível de café quando ele estiver na metade da xícara?



6. Encontre:

- (a) $\frac{d^9}{dx^9} x^8 \ln(x)$
- (b) $\frac{d^n}{dx^n} \ln(x)$
- (c) $\frac{d^n}{dx^n} \cosh(2x)$

7. Encontre y'' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

Diferenciais e Aproximações Diferenciais

8. Ache a linearização de $f(x) = \sqrt{x+3}$ em $a = 1$ e use essa expressão para aproximar $\sqrt{3.9}$ e $\sqrt{4.1}$.
9. Ache a linearização de $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ em $a = 0$ e use essa expressão para aproximar $\sqrt[3]{0.95}$ e $\sqrt[3]{1.05}$.
10. O lado de um cubo é medido com um erro máximo possível de 2% . Use diferenciais para estimar o percentagem de erro máxima no volume computado.
11. O período de um pêndulo simples é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

sendo L o comprimento do pêndulo, g a aceleração de gravidade e T é medido em segundos. Suponha que o comprimento do pêndulo é medido com um erro máximo de 0.5% . Qual a percentagem de erro máximo no período?

Máximos e Mínimos

12. Suponha que f seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$
 - (a) f possui máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique?
 - (b) Como podemos encontrar esses pontos?

13. Encontre os pontos críticos da função:

- (a) $f(x) = 5x^2 + 4$
- (b) $f(x) = \theta + \text{sen}(\theta)$
- (c) $f(x) = |2x + 3|$
- (d) $f(x) = xe^{2x}$
- (e) $f(x) = x \ln(x)$
- (f) $f(t) = \sqrt{t}(1 - t)$
- (g) $g(x) = 5t^{2/3} + t^{5/3}$

14. Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f no intervalo dado:

- (a) $f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 + 1}$ no intervalo $[-4, 4]$
- (b) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$
- (c) $f(x) = xe^{-x}$ no intervalo $[0, 2]$
- (d) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, 3]$
- (e) $f(x) = \text{sen}(t) + \cos(t)$ no intervalo $[0, \pi/3]$
- (f) $f(x) = x - 3\ln(x)$ no intervalo $[1, 4]$

Respostas

1. $d' = 1/(20\pi)$
2. Taxa=65km/h
3. $Q = 10000 + \frac{800000\pi}{9} \text{ cm}^3/\text{min}$
4. $\frac{dh}{dt} = \frac{6}{5\pi} \text{ m/min}$
5. $\frac{10}{9\pi} \text{ cm/s}$
6. (a) $\frac{8!}{x}$
 (b) $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$
 (c) $2^n \cosh(2x)$, se n é par; $2^n \sinh(2x)$, se n é ímpar.
7.

$$y'' = \frac{2[1 - xy' - (y')^2(y-1)]}{x^2 + y^2 - 2y}, \quad \text{onde } y' = \frac{2x}{x^2 + y^2 - 2y}$$
8. Linearização $\frac{x+7}{4}$. Para $x = 0,9$ $\sqrt{3.9} \approx 1.975$. Para $x = 1.1$ $\sqrt{4.1} \approx 2.025$
9. Aproximação linear $1 - x/3$. Para $x=0,05$, então $\sqrt[3]{1-0,05} \approx 0,983333$. Para $x=-0,05$, então $\sqrt[3]{1,05} \approx 1.01667$
10. 6%
11. 0.25%
12. (a) Sim, pelo Teorema de Weierstrass.
 (b) Avaliando f nos pontos críticos e extremos do intervalo (Teorema de Fermat).
13. (a) 0
 (b) $(2k+1)\pi$
 (c) $-\frac{3}{2}$
 (d) $-\frac{1}{2}$
 (e) e^{-1}
 (f) 0 e $\frac{1}{3}$
 (g) 0 e -2
14. (a) Ponto de máximo $x = \pm 4$, valor máximo $252/17$. Ponto de Mínimo $x = 0$, valor mínimo -4 .
 (b) Ponto de máximo $x = \sqrt{2}$ e ponto de mínimo $x = -1$.
 (c) Ponto de máximo $x = 1$ e ponto de mínimo $x = 0$
 (d) Ponto de máximo $x = e$ e ponto de mínimo $x = 1$
 (e) Ponto de máximo $t = \frac{\pi}{4}$ e ponto de mínimo $t = 0$
 (f) Ponto de máximo $x = 1$ e ponto de mínimo em $x = 3$