

Lista 2

Funções de uma Variável

Derivadas

1. Calcule as seguintes derivadas:

- (a) $tg(4x)$
- (b) $sen(x^3 + 3x)$
- (c) $e^{\cos(x)}$
- (d) $e^{\sin^3(x)}$
- (e) $\frac{1}{1+e^{x^3}}$
- (f) $\log_2(\sin(2x))$

2. Prove que:

- (a) $\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (b) $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

3. Mostre $\frac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x$. (Use que $\frac{d}{dx}e^x = e^x$).

4. Encontre dy/dx diferenciando implicitamente.

- (a) $x^2y + xy^2 = 3x$
- (b) $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$
- (c) $x\sin(y) + \cos(2y) = \cos(y)$
- (d) $x^y = y^x$

5. Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

6. Mostre que a soma dos interceptos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c .

7. Encontre uma equação da reta tangente à curva $y^2 = x^3(2-x)$ no ponto $(1,1)$.

8. Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua no 0 mas não diferenciável no 0.

9. Calcule a derivada das seguintes funções

- (a) x^x

- (b) $x^{\cos(x)}$

- (c) $(\sin(x))^{\cos(x)}$

- (d) $x^n + n^x + x^x + n^n$ sendo $n > 5$ um número real fixado.

10. O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação:

$$y(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$$

- (a) Encontre a velocidade da partícula após t segundos
- (b) Em quais instantes de tempo a partícula está parada?

11. O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno. Suponha que a equação do movimento de um ponto sobre essa mola é

$$s(t) = 2e^{-\frac{t}{2}}\sin(t)$$

onde s é medida em centímetros e t em segundos.

- (a) Encontre a velocidade após t segundos.
- (b) Encontre os instantes de tempo nos quais a partícula se encontra em repouso e a respectiva posição nesses instantes.
- (c) Mostre que $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$. Interprete o significado desse limite.

12. Uma escada com 10m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \frac{\pi}{3}$?

13. Cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos permitindo uma solução de água e cloreto de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x :

- (a) Calcule $\frac{dV}{dx}$ quando $x = 3mm$ e explique seu significado.
- (b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual a metade da área da superfície do cubo.

14. Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce a uma velocidade radial de $60m/s$. Encontre a taxa segundo conforme a qual a área dentro do círculo está crescendo depois de a) 1s b) 3s c) 5s. O que você pode concluir?
15. A lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e do volume permanece constante: $PV = C$
- (a) Encontre a taxa de variação do volume em relação a pressão.
 - (b) Uma amostra de gás está em um recipiente a baixa pressão e é regularmente comprimida a temperatura constante por 10min. O volume decresce mais rapidamente no início ou final dos 10 minutos. Explique.
16. Em uma fazenda de piscicultura, uma população de

peixes é colocada dentro de um lago e colhida regularmente. Um modelo para a variação da população é dada pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c} \right) P(t) - \beta P(t)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes, P_c é a população máxima que o pequeno lago pode manter (*capacidade de suporte*) e β é a percentagem da população que é colhida

- (a) Qual o valor de $\frac{dP}{dt}$ corresponde à população estável?
- (b) Se o pequeno lago pode manter 10000 peixes, a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita é de 4% encontre o nível estável da população.
- (c) O que acontece se β é elevado a 5%?

Respostas dos Exercícios

1. (a) $4\sec^2(4x)$
 (b) $\cos(x^3 + 3x)(3x^2 + 3)$
 (c) $-e^{\cos(x)}\sin(x)$
 (d) $3e^{\sin(x^3)}\cos(x^3)x^2$
 (e) $-\frac{3e^{x^3}x^2}{(1+e^{x^3})^2}$
 (f) $\frac{2\cot g(2x)}{\ln(2)}$
2. (a) Colocando no triângulo inscrito na circunferência de raio 1, assume-se que: $\cos(\alpha) = x$; a partir da relação $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, obtém-se $\sin(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$. A partir da primeira expressão, pode-se derivar e obter α' : $\frac{d}{d\alpha}\cos(\alpha) = \frac{d}{dx}x \Rightarrow -\sin(\alpha).\alpha' = 1 \Rightarrow \alpha' = -\frac{1}{\sin(\alpha)}$, que, como visto anteriormente, $\sin(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$; logo, $\alpha' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Além disso, também é possível, a partir da primeira expressão, falar que $\arccos(x) = \alpha$ e, derivando, $\arccos'(x) = \alpha' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Logo, $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 (b) Assumindo $\operatorname{cosec}(\alpha) = x$; seu inverso ($\operatorname{arccosec}(x) = \alpha$) pode ser dito como $\operatorname{cosec}^{-1}(\alpha) = x$. Derivando, $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)\cot g(\alpha)}$; fazendo $\operatorname{cosec}(\alpha) = x$, como dito inicialmente: $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{x\cot g(\alpha)}$. Através da relação $\cot g^2(\alpha) = \operatorname{cosec}^2(\alpha) - 1$, obtém-se $\cot g(\alpha) = \sqrt{x^2 - 1}$. Substituindo na derivada: $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}(x) = -\frac{1}{x\cot g(\alpha)} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. Fazendo $\operatorname{arccosec}(x) = \operatorname{cosec}^{-1}(\alpha)$: $\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
3. Como: $y = a^x$; pode-se dizer que: $\log_a(a^x) = x \Rightarrow \log_a(y) = x$. Mudando base: $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x$. Então: $\frac{d}{dx}\frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \frac{d}{dx}x \Rightarrow \frac{1}{\ln(a).y}y' = 1 \Rightarrow y' = \ln(a).y$. Como, inicialmente foi dito que $y = a^x$, substituindo: $y' = \ln(a).a^x$.
4. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3-2xy-y^2}{2xy+x^2}$
 (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{xy}-y\sqrt{x+y}}{\sqrt{xy}+x\sqrt{x+y}}$
 (c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(y)}{x\cos(y)-2\sin(2y)+\sin(y)}$
 (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(y)-\frac{y}{x}}{\ln(x)-\frac{x}{y}}$
5. Derivando a equação da elipse: $\frac{1}{a^2}.2x + \frac{1}{b^2}.2y.\frac{dy}{dx} = 0$. Isolando o $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{xb^2}{ya^2}$. No ponto (x_0, y_0) : $y' = -\frac{yb^2}{xa^2}$. Colocando na equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$: $y - y_0 = -\frac{yb^2}{xa^2}(x - x_0) \Rightarrow yy_0 - y_0^2 = \frac{b^2(x_0^2 - x_0x)}{a^2} \Rightarrow \frac{yy_0 - y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2 - x_0x}{a^2} \Rightarrow \frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_0x}{a^2} \Rightarrow \frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$, chegando na função da elipse, que é igual a 1. Logo, $\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1$
6. Derivando a função da curva: $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. Colocando na equação da reta (para chegar na reta tangente): $y - y_0 = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}(x - x_0)$. Achando os interseptos ($x = 0$ e $y = 0$): em $y = 0$: $x = x_0 + \sqrt{x_0y_0}$ e em $x = 0$: $y = y_0 + \sqrt{x_0y_0}$. Somando-os: $(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0})^2 = c \Rightarrow \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} = \sqrt{c}$
7. $y = x$
8. Para ser contínua: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, ou seja, se aproximando de zero, as funções devem ser iguais. Como $\sin(\frac{1}{x}) \neq 0$, $x^{\frac{1}{3}} = 0$. Porém, a calcular a derivada da primeira: $\frac{\sin(x)+3x\cos(x)}{3x^{\frac{4}{3}}}$ e, assim, como há x no denominador, este não pode ser zero. Assim, ela é contínua, mas não é diferenciável em 0.
9. (a) $\frac{dy}{dx} = x^x(\ln(x) + 1)$
 (b) $\frac{dy}{dx} = x^{\cos(x)}(-\sin(x)\ln(x) + \frac{\cos(x)}{x})$
 (c) $\frac{dy}{dx} = \sin(x)^{\cos(x)}[\sin(x)\ln(\sin(x)) + \cot g(x)\cos(x)]$
 (d) $\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + n^x\ln(n) + x^x(\ln(x) + 1)$
10. (a) $\frac{dy}{dt} = \frac{5\pi\cos(10\pi t)}{2}$
 (b) $\frac{dy}{dt} = 0; t = \frac{1}{20} + \frac{k}{10}, k \in \mathbb{Z}$
11. (a) $\frac{ds}{dt} = v(t) = e^{-\frac{t}{2}}(2\cos(t) - \sin(t))$
 (b) $t = \arctg(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 (c) $\lim_{t \rightarrow \infty}(2e^{-\frac{t}{2}}\sin(t))$, como $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty}(2e^{-\frac{t}{2}}) = 0$. O movimento é amortecido; decaimento exponencial.
12. $\frac{dx}{d\theta} = 5m/\text{rad}$
13. (a) $\frac{dV}{dx} = 27\text{mm}^2$. A cada 1mm de aumento no lado, aumenta 27mm^2
 (b) $A = 6x^2 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 3x^2 = \frac{A}{2}$
14. (a) $7200\pi\text{m}^2/\text{s}$
 (b) $21600\pi\text{m}^2/\text{s}$

Universidade Federal do ABC

- (c) $36000\pi m^2/s$ A taxa aumenta linearmente com o tempo.
15. (a) $\frac{dV}{dP} = -\frac{V}{P}$
(b) O volume decresce mais rapidamente no início.
16. (a) $\frac{dP}{dt} = 0$
(b) $P = 2000$
(c) $P = 0$