

Lista 1

Funções de uma Variável

Derivadas

Derivadas

1. Para as seguintes funções calcule a derivada no ponto indicado através do limite do quociente de Newton:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- $f(x) = x^2 + 1$ no ponto $a = 1$
 - $f(x) = 3x^3 - x$ no ponto $a = 2$
 - $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 4$
 - $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $a = 8$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = -1$
2. Mostre que não existe a derivada de $g(x) = |x|$ em $x = 0$. Calcule a derivada para $x \neq 0$.
3. Mostre a partir da definição de derivada que:

$$(a) \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

$$(b) \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

4. Prove que:

$$(a) \frac{d}{dx} (\csc(x)) = -\csc(x) \cot(x)$$

$$(b) \frac{d}{dx} (\sec(x)) = \sec(x) \tan(x)$$

5. Escreva a equação da reta tangente às curvas $y = f(x)$ no ponto especificado. Esboce o gráfico de $f(x)$ e da reta tangente.

- $y = x^3$, no ponto $x = 3$
- $y = 2x$, no ponto $x = 2$
- $y = \cos(x) + x^2$, no ponto $x = 0$
- $y = \frac{1}{x-1}$, no ponto $(-1, -\frac{1}{2})$
- $y = \sin(x)$, no ponto $x = \pi$

6. Encontre as derivadas das seguintes funções:

$$(a) f(x) = x^7 + 6x^6 + \frac{1}{5}x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + \pi$$

$$(b) f(x) = ax^m + bx^{m+n}$$

$$(c) f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \frac{\ln(4)}{x} + \sqrt{5x + \ln(7)}$$

$$(d) f(x) = \frac{2}{5x-3} - \frac{1}{x}$$

$$(e) f(x) = x^{a/2} + x^{\frac{(a+4)}{2}} + ax^{a-1}$$

$$(f) f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(g) f(x) = 5\sin(x) + 6\cos(x)$$

$$(h) f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$$

$$(i) f(x) = x^7 e^x$$

$$(j) f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

$$(k) f(x) = e^x \cos(x)$$

$$(l) f(x) = \frac{x^n}{\ln(x)}$$

$$(m) f(x) = x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{3}$$

$$(n) f(x) = \tan(x) - \cot(x)$$

$$(o) f(x) = x \cot(x)$$

$$(p) f(x) = (x-2)\sin(x) + x^2 \tan(x) + \sin(x) \cos(x)$$

7. Achar a equação da tangente e da normal à curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(1, -4)$.
8. Em que ponto a tangente à parábola $y = x^2 - 7x + 3$ é paralela à reta $5x + y - 3 = 0$?
9. Quantas retas tangentes à curva $y = \frac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?
10. Dado $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, encontre os pontos do gráfico de f nos quais a tangente é horizontal.
11. O gráfico de f é dado. Indique os números nos quais f não é diferenciável.

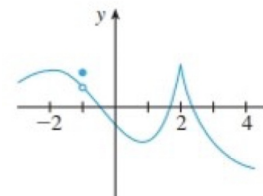


Gráfico 1

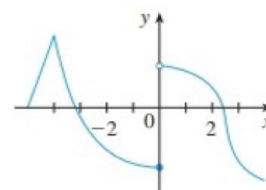


Gráfico 2

12. Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determine a, b, c, d se $p(0) = p(1) = -2$, $p'(0) = -1$ e $p''(0) = 10$.

13. Seja f a função definida como

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x), & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

Respostas dos Exercícios

1. a.) 2 b.) 35 c.) $\frac{1}{4}$ d.) $\frac{1}{12}$ e.) -12. Não existe $g'(0)$: derivadas laterais divergem; Para $x > 0 : g'(x) = 1$; $x < 0 : g'(x) = -1$.

3. a.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot \cos(h) - \sin(x) \cdot \sin(h) - \cos(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot (\cos(h) - 1) - \sin(x) \cdot \sin(h)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot (\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(h)}{h} =$$

$$\cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} - \sin(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} =$$

$$= -\sin(x)$$

b.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \cos(h) + \sin(h) \cdot \cos(x) - \sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot (\cos(h) - 1) + \sin(h) \cdot \cos(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot (\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) \cos(x)}{h} =$$

$$\sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} - \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} =$$

$$= \cos(x)$$

$$4. \text{ a.) } \frac{d(\csc(x))}{dx} = \frac{d(\sin^{-1}(x))}{dx} =$$

$$-1 \sin^{-2}(x) \cos(x) = \frac{dx}{\sin(x)} \cdot \frac{1}{\sin(x)} =$$

$$= -\cot(x) \csc(x)$$

$$\text{b.) } \frac{d(\sec(x))}{dx} = \frac{d(\cos^{-1}(x))}{dx} =$$

$$= \cos^{-2}(x) \sin(x) = \frac{dx}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} =$$

$$= \sec(x) \tan(x)$$

5. a.) $y = 27(x-3) + 27$

b.) $y = 4 \ln(2)(x-2) + 4$

c.) $y = 1$

d.) $y = -\frac{x}{4} - \frac{3}{4}$

e.) $y = -x + \pi$

6. a.) $7x^6 + 6x^6 + x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 2x$

b.) $amx^{m-1} + b(m+n)x^{(m+n)-1}$

c.) $-2\pi x^3 - \ln(4)x^{-2} + \sqrt{5}$

d.) $-10x(5x-3)^{-2} + x^{-2}$

e.) $2x + \frac{a+4}{2} + a(a-1)x^{a-2}$

f.) $\frac{-2a}{3x^{\frac{3}{5}}} - \frac{5b}{3x^{\frac{3}{8}}}$

g.) $5\cos(x) - 6\sin(x)$

h.) $\frac{-2\sin^2(x)}{(\sin(x)\cos(x))^2}$

i.) $7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x$

j.) $\frac{e^x(x-2)}{x^3}$

k.) $e^x \cos(x) - e^x \sin(x)$ l.) $\frac{x^{n-1}(n \ln(x)-1)}{\ln(x)^2}$

m.) $3x^2 \ln(x)$

n.) $\frac{1}{\cos^2(x) \sin^2(x)}$

o.) $\cot(x) - x \csc^2(x)$

p.) $(x-2)\cos(x) + \sin(x) + 2x \tan(x) + x^2 \sec^2(x) + \cos(2x)$

7. Tangente: $3x - 7$; Normal: $-\frac{x}{3} - \frac{11}{3}$

8. $x = 1$

9. Dois pontos: $(-2 \pm \sqrt{3}, (1 \mp \sqrt{3})/2)$

10. $x = 1$ e $x = 3$

11. Gráfico 1: $x = -1, x = 2$; Gráfico 2: $x = -3, x = 0$

12. $a = -4, b = 5, c = -1, d = -2$

13. $a = \cos(c), b = -c \cos(c) + \sin(c)$