Lista 8
Funções de uma Variável
Integral II

1. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para achar a derivada das seguintes funções:

   (a)
   $$\int_0^x \sqrt{1+2t}dt$$

   (b)
   $$\int_1^x ln(t)dt$$

   (c)
   $$\int_x^2 cos(t^2)dt$$

   (d)
   $$\int_1^{cos(x)} (t+cos(t))dt$$

   (e)
   $$\int_1^{e^x} (t+cos(t))dt$$

   (f)
   $$\int_{e^{x^2}}^0 cos^2(t)dt$$

   (g)
   $$\int_{-e^{x^2}}^{e^x} cos^2(t)dt$$

   (h)
   $$\int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}cos(t)dt$$

2. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular as seguintes integrais ou explique porque elas não existem:

   (a)
   $$\int_0^1 x^7+3xdx$$

   (b)
   $$\int_{-1}^4 x^6dx$$

   (c)
   $$\int_{-2}^5 \pi dx$$

   (d)
   $$\int_{-1}^4 x^2+3xdx$$

   (e)
   $$\int_0^1 x^{3/2}dx$$

   (f)
   $$\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$$

   (g)
   $$\int_1^4 x^{6/7}dx$$

   (h)
   $$\int_{-5}^5 \frac{2}{x^3}dx$$

   (i)
   $$\int_0^2 x(2+x^5)dx$$

   (j)
   $$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

   (k)
   $$\int_0^{\pi/4} sec^2(x)dx$$

   (l)
   $$\int_\pi^{2\pi} cossec^2(\theta)d\theta$$

   (m)
   $$\int_0^1 e^{v+1}dv$$

   (n)
   $$\int_0^1 5^t dt$$

   (o)
   $$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$$

Substituição

3. Calcule as integrais fazendo as seguintes substituições:

   (a)
   $$\int cos(3x)dx, u=3x$$

(b)
$$\int x(4+x^2)dx, u = 4+x^2$$

(c)
$$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx, u = x^3+1$$

(d)
$$\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx, u = \sqrt{x}$$

(e)
$$\int e^{sen\theta}cos(\theta), u = sen(\theta)$$

Integrais indefinidas

4. Calcule nos intervalos reais em que os integrandos estão definidos. No item (f), considere $t > -1/3$; no item (p), $x > 0$ e $b + cx^{a+1} > 0$.

(a)
$$\int 2x(x^2+3)^4dx$$

(b)
$$\int (3x-2)^{20}dx$$

(c)
$$\int (2-x)^{100}dx$$

(d)
$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

(e)
$$\int \frac{1}{5-3x}dx$$

(f)
$$\int \frac{2}{(3t+1)^{2.4}}dt$$

(g)
$$\int y^3\sqrt{2y^4-1}dy$$

(h)
$$\int \sqrt{4-2x}dx$$

(i)
$$\int sen(\pi t)dt$$

(j)
$$\int sec^2(2x)tg(2x)dx$$

(k)
$$\int \frac{(ln(x))^2}{x}dx$$

(l)
$$\int \frac{arctg(x)}{1+x^2}dx$$

(m)
$$\int \frac{z^3}{\sqrt[4]{1+z^4}}dz$$

(n)
$$\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$$

(o)
$$\int sec^3(x)tg(x)dx$$

(p)
$$\int x^a(\sqrt{b+cx^{a+1}})dx$$
$c \neq 0, a \neq -1$

(q)
$$\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

(r)
$$\int xe^{-x^2}dx$$

(s)
$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$$

Integração por partes

5. Justifique a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ a partir da regra de derivação do produto. Em seguida, calcule com as escolhas indicadas:

(a)
$$\int xln(x)dx, u = ln(x), dv = xdx$$

(b)
$$\int \theta sec^2(\theta)d\theta, u = \theta, dv = sec^2(\theta)d\theta$$

6. Calcule, escolhendo quais fatores derivar e integrar. Nos itens com logaritmos, trabalhe nos respectivos domínios reais:

(a)
$$\int xcos(5x)dx$$

(b)
$$\int re^{r/3}dr$$

(c)
$$\int x^2cos(mx)dx$$

(d)
$$\int ln(2x+1)dx$$

(e)
$$\int zsenh(z)dz$$

(f)
$$\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}dx$$

(g)
$$\int_1^4 \sqrt{t}ln(t)dt$$

(h)
$$\int_0^1 x2^x dx$$

(i)
$$\int cos(ln(x))dx$$

Substituição e partes

7. Primeiro faça uma substituição e depois use integrácão por partes para calcular as integrais:

(a)
$$\int sen(\sqrt{x})dx$$

(b)
$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$$

(c)
$$\int x^5 e^{x^2}dx$$

Integrais mistas

8. Calcule cada integral por substituição ou por partes, indicando a escolha do método antes do cálculo:

(a)
$$\int_0^{\pi/4} \frac{e^{tg(x)}}{cos^2(x)}dx$$

(b)
$$\int_1^2 x^2 ln(x)dx$$

(c)
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{cos\theta}sen\theta d\theta$$

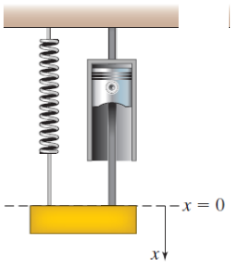
(d)
$$\int xcosh(x)dx$$

(e)
$$\int \frac{sen(x)}{(1+cosx)^3}dx$$

9. Calcule
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{5+t^2}dt$$

10. **Valor médio.** Encontre o valor médio da função no intervalo:
   (a) $2x^2-3x, [-1,2]$
   (b) $1+\sqrt{x}, [0,4]$
   (c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, [0,3]$

11. **Movimento Harmônico Amortecido.** Considere o sistema mostrado na figura abaixo. Nesse sistema, o peso está ligado a uma mola e um dispositivo de amortecimento. Suponha-se que no instante $t=0$, o peso é colocado em movimento a partir de sua posição de equilíbrio de modo que sua velocidade em qualquer instante t é
$$v(t) = 3e^{-4t}(1-4t)$$
Encontre a função posição $x(t)$ do corpo.



(a)

12. **Velocidade dada e posição inicial.** onsidere o sistema mostrado na figura acima. O peso é colocado em movimento de um ponto 12 pés abaixo da posição de equilíbrio, de modo que a sua velocidade em qualquer instante t é
$$v(t) = e^{-2t}(cos(4t) - 3sen(4t))$$
Encontre a função posição do corpo.

13. **Centro de gravidade de uma lâmina.** Uma lâmina fina e homogênea ocupa a região sombreada entre os gráficos de $y = senx$ e $y = 2x/\pi$, para $0 \le x \le \pi/2$.
   (a) Esboce a região, identifique a curva superior e calcule sua área A.
   (b) Calcule o centro de gravidade $(\bar{x}, \bar{y})$ usando, para $f(x) \ge g(x)$ em $[a,b]$,
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x(f(x)-g(x))\,dx,$$
$$\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))\,dx.$$

Respostas dos Exercícios

1. (a) $\sqrt{1+2x}$
   (b) $ln(x)$
   (c) $-cos(x^2)$
   (d) $-(cos(x)+cos(cos(x)))sen(x)$
   (e) $(e^x+cos(e^x))e^x$
   (f) $-2xe^{x^2}cos(e^{x^2})$
   (g) $e^x cos^2(e^x) - 2xe^{x^2}cos^2(e^{x^2})$
   (h) $3x^2\sqrt{x^3}cos(x^3) - \frac{\sqrt[4]{x}cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

2. (a) $\frac{13}{8}$
   (b) $\frac{4^7+1}{7}$
   (c) 7π
   (d) $\frac{265}{6}$
   (e) $\frac{2}{5}$
   (f) $\frac{45}{4}$
   (g) $\frac{7}{13}(4^{13/7}-1)$
   (h) Não integrável.
   (i) $\frac{156}{7}$
   (j) 2
   (k) 1
   (l) Não integrável.
   (m) $e(e^1-1)$
   (n) $\frac{4}{ln(5)}$
   (o) $\frac{\pi}{4}$

3. (a) $\frac{1}{3}sen(3x)+C$
   (b) $\frac{(4+x^2)^{11}}{22}+C$
   (c) $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}+C$
   (d) $-2cos(\sqrt{x})+C$
   (e) $e^{sen\theta}+C$

4. (a) $\frac{(x^2+3)^5}{5}+C$
   (b) $\frac{(3x-2)^{21}}{63}+C$
   (c) $-\frac{(2-x)^{101}}{101}+C$
   (d) $-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$
   (e) $-\frac{1}{3}ln|5-3x|+C$
   (f) $-\frac{1}{2.1(3t+1)^{1.4}}+C$
   (g) $\frac{1}{12}(2y^4-1)^{3/2}+C$
   (h) $-\frac{1}{3}(4-2x)^{3/2}+C$
   (i) $-\frac{cos(\pi t)}{\pi}+C$
   (j) $\frac{sec^2(2x)}{4}+C$
   (k) $\frac{ln(x)^3}{3}+C$
   (l) $\frac{arctg(x)^2}{2}+C$
   (m) $\frac{1}{3}(1+z^4)^{3/4}+C$
   (n) $\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2}+C$
   (o) $\frac{sec^3(x)}{3}+C$
   (p) $\frac{2(b+cx^{a+1})^{3/2}}{3c(a+1)}+C$
   (q) $\frac{1}{2}ln(1+x^2)+C$
   (r) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$
   (s) $\frac{1}{3}arctg(x^3)+C$

5. (a) $\frac{x^2}{2}ln(x)-\frac{x^2}{4}+C$
   (b) $\theta tg(\theta)-ln|sec\theta|+C$

6. (a) $\frac{xsen(5x)}{5}+\frac{cos(5)}{25}+C$
   (b) $3re^{r/3}-9e^{r/3}+C$
   (c) $\frac{x^2}{m}sen(mx)+\frac{2x}{m^2}cos(mx)-\frac{2}{m^3}sen(mx)$
   (d) $xln(2x+1)-x+\frac{1}{2}ln|2x+1|+C$
   (e) $e^t(t^3-3t^2+6t-6)+C$
   (f) $x(ln(x))^2-2xln(x)+2x+C$
   (g) $zcosh(z)-senh(z)+C$
   (h) $-\frac{6}{e}+3$
   (i) $\frac{16}{3}ln(4)-\frac{28}{9}$
   (j) $\frac{1-ln(2)}{2}$
   (k) $\frac{2}{ln(2)}-\frac{1}{ln(2)^2}$
   (l) $\frac{x(cos(ln(x))+sen(ln(x)))}{2}+C$

7. (a) $-2\sqrt{x}cos(\sqrt{x})+2sen(\sqrt{x})+C$
   (b) $2e^2$
   (c) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4-2x^2+2)+C$

8. (a) $e-1$
   (b) $\frac{8}{3}ln(2)-\frac{7}{9}$
   (c) $\frac{2}{3}$
   (d) $xsenh(x)-cosh(x)+C$
   (e) $\frac{1}{2(1+cos(x))^2}+C$

9. 3

10. (a) $\frac{1}{2}$
    (b) $\frac{7}{3}$
    (c) $\frac{(\sqrt{10}-1)}{3}$

11. $x(t)=3te^{-4t}$

12. $x(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}(cos(4t)+sen(4t))-\frac{25}{2}$

13. A concavidade de $senx$ em $[0,\pi/2]$ mostra que seu gráfico fica acima da corda $y=2x/\pi$. Logo $A=1-\pi/4$. As integrais dos momentos são

$$\int_0^{\pi/2} x\left(senx-\frac{2x}{\pi}\right)dx = 1-\frac{\pi^2}{12},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(sen^2x-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{\pi}{24}.$$

Dividindo cada uma por A, resulta

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)},\frac{\pi}{6(4-\pi)}\right)}.$$