Lista 7
Funções de uma Variável
Integral

1. Ache os valores numéricos das seguintes somas:

   (a)
   $$\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$$

   (b)
   $$\sum_{i=0}^{6} (2i+1)$$

   (c)
   $$\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$$

   Os próximos dois exercícios têm como objetivo apresentar as fórmulas que são usadas no cálculo de integrais pela definição.

2. Prove, se você souber o princípio de indução, as seguintes propriedades do somatório:

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$
   (aditividade)

   (b)
   $$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$
   (homogeneidade)

   (c)
   $$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$
   (telescópica)

   (d)
   $$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

3. Use as propriedades do exercício anterior para mostrar que:

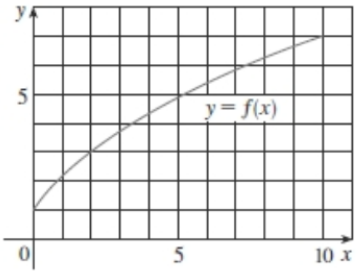
   (a)
   $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$
   (Dica: Use que $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$)

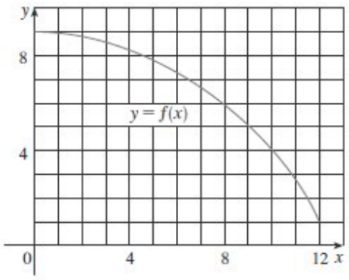
   (b)
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$
   (Dica: Use o item anterior)

   (c)
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$
   (Dica: $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$)

   (d)
   $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{4}$$

4. Usando as figuras abaixo ache estimativas inferiores e superiores para a área abaixo do gráfico de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 10$ usando primeiramente 5 retângulos e posteriormente 10 retângulos.

   (a)
   

   (b)
   

5. (a) Defina precisamente partição de um intervalo.
   (b) Defina precisamente soma de Riemann.

6. Use uma soma de Riemann com extremos a direita e $n = 8$ para achar uma aproximação da integral
   $$\int_0^5 x^2 - 3x$$

7. Use uma soma de Riemann centrado no ponto médio para achar aproximações das integrais

(a)

$$\int_0^1 sen(x)dx$$

n=4

(b)

$$\int_0^1 2^x dx$$

n=10

8. O gráfico de g consiste de dois segmentos de retas e um semi-circulo, conforme figura abaixo. Calcule

(a)

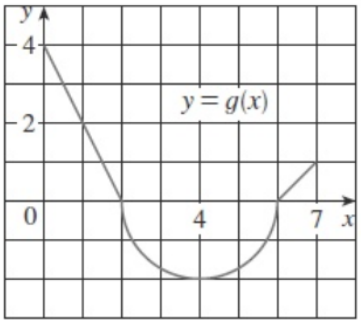
$$\int_0^2 g(x)dx$$

(b)

$$\int_2^6 g(x)dx$$

(c)

$$\int_0^6 g(x)dx$$



9. Calcule a partir da definição as seguintes integrais:

(a)

$$\int_a^b xdx$$

(b)

$$\int_0^1 2xdx$$

(c)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx$$

(d)

$$\int_0^a 1x^3dx$$

(e)

$$\int_0^2 x^4dx$$

(f)

$$\int_0^3 x^2 + xdx$$

(g)

$$\int_a^b (x^2 + x)dx$$

(h)

$$\int_a^b e^x dx$$

10. Expresse as seguintes integrais como limite de somatório:

(a)

$$\int_0^\pi cos(x)dx$$

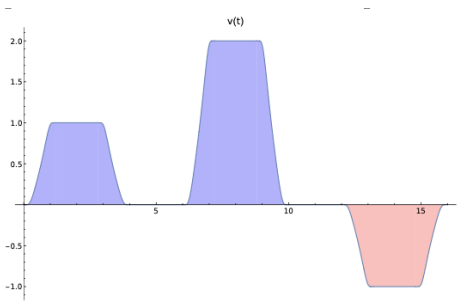
(b)

$$\int_0^1 e^x dx$$

(c)

$$\int_0^5 cos(x)e^x dx$$

11. O gráfico abaixo representa a velocidade de um carro em função do tempo. Esboce o gráfico da posição do carro em função do tempo.



Respostas dos Exercícios

1. (a) 170
   (b) 49
   (c) 15

2. (a) Base de indução: $n = 1$
   Resolvendo o lado esquerdo: $a_1 + b_1$.
   O lado direito: $a_1 + b_1$. Hipótese de indução:
   $\sum_{k=1}^{n-1}(a_k + b_k) + (a_n + b_n) =$
   $(\sum_{k=1}^{n-1} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k) + (a_n + b_n) =$
   $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
   (b) Base de indução: $n = 1$
   Lado esquerdo: $c.a_1$
   Lado direito: $c.a_1$
   Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^{n} ca_k = \sum_{k=1}^{n-1} ca_k + ca_n =$
   $c(\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n) =$
   $c\sum_{k=1}^{n} a_k$
   (c) Base de indução: $n = 1$
   $\sum_{k=1}^{1}(a_k - a_{k-1}) = a_1 - a_0$.
   Hipótese de indução:
   $\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k-1}) + a_n - a_{n-1} =$
   $(a_{n-1} - a_0) + (a_n - a_{n-1}) =$
   $a_n - a_0$
   (d) Base de indução: $n = 1$
   Lado esquerdo: $\sum_{k=1}^{1} 1 = 1$
   Lado direito: 1
   Hipótese de indução:
   $\sum_{k=1}^{n} 1 =$
   $\sum_{k=1}^{n-1} 1 + 1 =$
   $n - 1 + 1 = n$

3. (a) $\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) =$
   $n^2 - 0^2 = n^2$
   (b) Usando $\sum_{k=1}^{n}(2k + 1) = n^2$
   $2\sum k - \sum 1 = n^2$
   $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$
   (c) $3\sum k^2 - 3\sum k + \sum 1 = n^3$
   Substituindo o valor encontrado no item anterior:
   $3\sum k^2 = n^3 - 3(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}) + n$
   Manipulando:
   $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$
   (d) $n^4 = 4\sum k^3 - 6\sum k^2 + 4\sum k - \sum 1$
   Substituindo os resultados dos itens anteriores e isolando $\sum_{k=1}^{n} k^3$:
   $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

4. A resposta não é única.
   (a) Inferior: $1+2+3+3+4+4+5+5+6+6 = 39$
   Superior: $2+3+4+5+5+6+6+7+7 = 52$
   (b) Inferior: 9+9+9+8+8+8+7+6+6+4+4+2 = 80
   Superior: 1+1+1+2+2+3+3+4+6+6+7+8 = 44

5. (a) Uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos, tal que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
   (b)
   $$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$
   onde c_k é um ponto no k-ésimo subintervalo e $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

6. $\frac{975}{128}$

7. (a) 0.4609
   (b) 1

8. (a) 4
   (b) -2π
   (c) $4 - 2\pi$

9. (a) $\frac{b^2-a^2}{2}$
   (b) 1
   (c) $\frac{1}{6}$
   (d) $\frac{a^4}{4}$
   (e) $\frac{32}{5}$
   (f) $\frac{27}{2}$
   (g) $\frac{b^3-a^3}{3} + \frac{b^2-a^2}{2}$
   (h) $e^b - e^a$

10. (a) $lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} cos(\frac{\pi k}{n})\frac{\pi}{n}$
    (b) $lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{k/n}\frac{1}{n}$
    (c) $lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} cos(\frac{5k}{n})e^{5k/n}\frac{5}{n}$

11. O gráfico resultará em algo do tipo:

