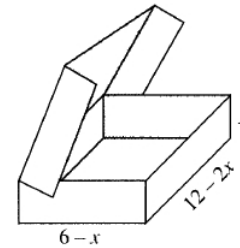
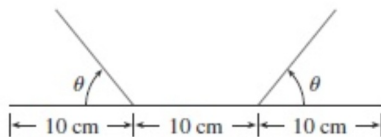


Lista 5

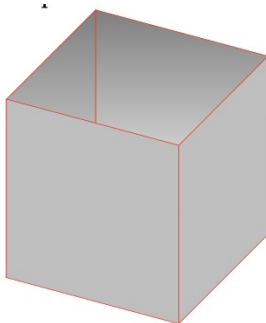
Funções de uma Variável

Otimização.

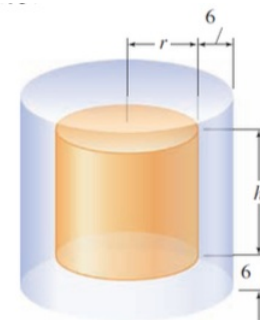
1. Encontre o ponto da hipérbole $y^2 - x^2 = 4$ que está mais próximo do ponto $(2, 0)$.
2. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30cm dobrando-se para cima $1/3$ da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água na calha seja máxima?
7. Uma caixa com tampa conforme a figura abaixo é feita a partir de uma folha de papel de $12\text{cm} \times 12\text{cm}$. Encontre a caixa que otimiza o volume.



4. Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um quadrado de 60cm de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa pode ter. Justifique detalhadamente porque o máximo existe.
5. Uma caixa retangular com uma base quadrada e sem tampa e de volume de 216cm^3 deve ser construída. Quais devem ser as dimensões da caixa para minimizar a área superficial da caixa? Qual é a área superficial mínima?

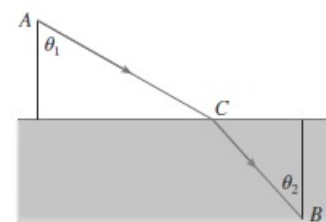


8. Um recipiente cilíndrico para armazenar resíduos radioativos deve ser construído a partir de chumbo e têm uma espessura de 6 cm. (veja a figura). Se o volume do cilindro externo é de $16\pi\text{m}^3$, encontre o raio e a altura do cilindro interno que vai resultar em um recipiente de máxima capacidade de armazenamento.



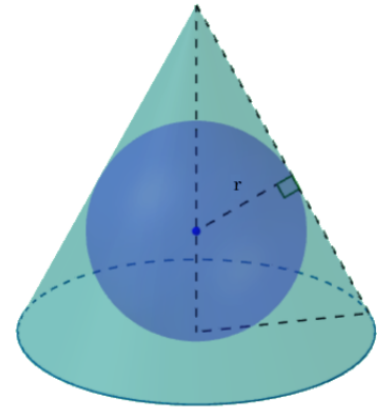
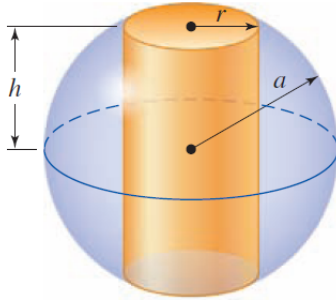
9. Seja ν_1 a velocidade da luz no ar e ν_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o princípio de Fermat um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$



6. Uma lata cilíndrica sem topo é feita para receber $V\text{cm}^3$ de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

10. Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito num cone reto com 20cm de altura e 12cm de raio.
11. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r . Encontre o cilindro de maior volume possível.
12. Uma esfera de raio r está inscrita em um cone circular reto. Encontre o volume mínimo do cone. Justifique detalhadamente porque existe o cone de volume mínimo.



Respostas dos exercícios.

1. Os pontos são $(1, \sqrt{5})$ e $(1, -\sqrt{5})$
2. Maior área = $2ab$
3. $\theta = \pi/3$
4. 16000cm^3
5. Ocorre em $x = 6\sqrt[3]{2}$.
A área superficial mínima é $108\sqrt[3]{4}\text{ cm}^2$.
6. $r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.
7. $V = 128\text{cm}^3, x = 2$
8. r : 1,94 m e h : 3,88 m
9. Derivando o tempo de viagem e igualando a 0:
$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{d - x}{v_2\sqrt{(d - x)^2 + b^2}},$$
usando
 $\text{sen}\theta_1 = x/\sqrt{x^2 + a^2}$ e $\text{sen}\theta_2 = (d - x)/\sqrt{(d - x)^2 + b^2}$,
chega-se na função do enunciado.
10. $r = 8\text{cm}, h = \frac{20}{3}\text{cm}$
11. $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$
12. Altura do cone: $h = 4r, V_{\min} = \frac{8\pi r^3}{3}$.