

Lista 4

Funções de uma Variável

Teorema do Valor Médio, Regra de L'Hôpital, Máximos e Mínimos em intervalos abertos, Como as derivadas afetam a forma do gráfico. Crescimento, decrescimento e concavidade.

- Seja $f(x) = |x - 1|$. Mostre que não existe c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o teorema do valor médio?
- Mostre que a equação $2x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.
- Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.
- Use o teorema do valor médio para provar a desigualdade:

$$\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) \leq |a - b|$$
- Prove as identidades:
 - $\arcsen\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\arctg(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}$
 - $2\arcsen(x) = \arccos(1 - 2x^2)$
- Determine os intervalos nos quais $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ é crescente e nos quais é decrescente.
- Determine os intervalos nos quais $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ é crescente e nos quais é decrescente.
- Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f (se existirem) no intervalo dado:
 - $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ no intervalo $(0, \infty)$
 - $g(x) = \sqrt{9 + x^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$
 - $h(x) = x^5 - 7x^2 + 2$ no intervalo de $(-\infty, \infty)$
 - $k(x) = \ln(x) - x$ no intervalo $(0, \infty)$
 - $m(x) = 1/(x - x^2)$ no intervalo $(0, 1)$
- Encontre os valores de c tal que o gráfico de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + cx^2 + 2x + 2$$

seja côncavo para cima em todos os pontos.

- Mostre que a função $f(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$ mas que $f''(0)$ não existe.

Esboço de Gráficos

- Para as próximas funções use o roteiro para esboçar o gráfico.
 - Determine o domínio da função.
 - intersecções com os eixos;
 - Símetrias;
 - Encontre as assíntotas horizontais e verticais;
 - Encontre os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente;
 - Encontre os valores de máximo e mínimo locais;
 - Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;
 - Esboce o gráfico, utilizando as informações dos itens anteriores.
 - $(x^2 - 1)^3$
 - $3x^{2/3} - x$
 - $(x + 2)^{\frac{3}{2}} + 1$
 - $x + \cos(x)$

L'Hopital

- Calcule os seguintes limites usando L'Hopital quando possível
 - $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{12} - 3}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n}$
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(5x)}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{a}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \ln(x - 1)$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^3(x)}{1 - \cos(x)}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^x$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-4x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)$

Como a derivada afeta o gráfico

- Prove que a função $2x^5 + x^3 + 2x$ é crescente em todos os pontos.

Universidade Federal do ABC

- (e) $x^{1/3}(x+4)$
- (f) $\ln(x^4+27)$
- (g) $\ln(1-\ln(x))$
- (h) $e^{-\frac{1}{x+1}}$
- (i) $\ln(tg^2(x))$
- (j) $\frac{e^x}{x^2-9}$
- (k) $xtg(x), -\pi/2 < x < \pi/2$
- (l) $e^{\cos(x)}$
- (m) $\frac{1}{1-\cos(x)}, -2\pi < x < 2\pi$
- (n) $t\sqrt[3]{t^2-4}$

14. Use o roteiro do exercício 13 para esboçar o gráfico da curva. No passo D, ache uma equação para a assíntota oblíqua, caso exista.

(a) $y = \frac{x^2}{x+1}$

(b) $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

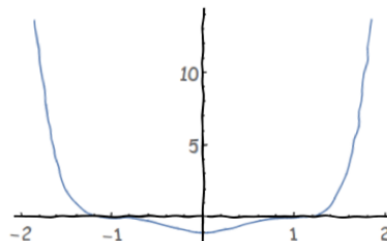
(c) $y = \sqrt{x^2+1}$

(d) $y = \sqrt{10+12x+4x^2}$

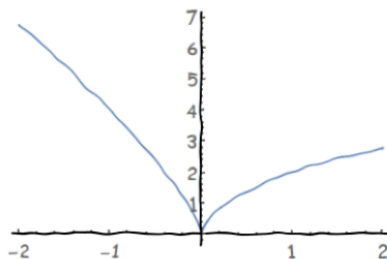
(e) $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

Respostas dos exercícios.

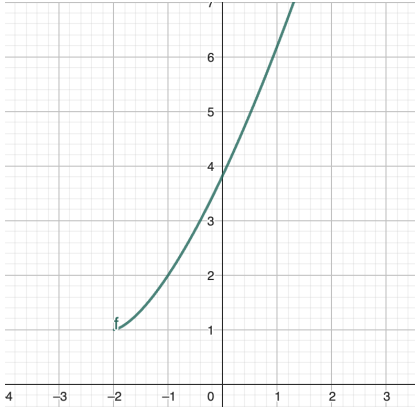
1. $f(3) = 2, f(0) = 1$; Substituindo: $f'(c) = 1/3$. Porém, derivando $f(x) = |x-1|$, tem-se que: $f'(x) = 1, x > 1, f'(x) = -1, x < 1, f'(1)$ não existe. Não existe $f'(c) = 1/3$. Não contradiz o TVM: ela não é diferenciável em todos os pontos do intervalo aberto $(0, 3)$.
2. Seja $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$. Como $f(0) = 1$ e $f(-1) = -4$ e f contínua pelo Teorema do Valor Intermediário existe c tal que $f(c) = 0$. Para provar a unicidade. Suponha que existissem mais de uma raiz. Sejam c_1 e c_2 duas raízes. Pelo Teorema de Rolle, existiria d tal que $f'(d) = 0$. Mas $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6$ e logo $f'(x) > 0$ para todo x . Absurdo.
3. Suponha que tenha 4 raízes. Pelo Teorema de Rolle, implica que f' (grau 2) teria 3 raízes. Mas como é um polinômio de grau 3, sua derivada terá grau 2 e é impossível ter mais de duas raízes reais.
4. Pelo TVM, em um intervalo $[a, b]$, existe $\frac{\sin(b) - \sin(a)}{b - a} = f'(c) = \cos(c)$. Manipulando: $|\sin(a) - \sin(b)| = |\cos(c)| |a - b|$, em que $\cos(c) \leq 1$, logo: $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$.
5. (a) Derivando os dois lados: o lado esquerdo resulta em $\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$; o lado direito, resulta no mesmo. Para provar: fazendo para $x = 1$: $\arcsen(0) = 0, 2\arctg(1) - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0$
(b) Derivando os dois lados, resultam no mesmo valor: $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. Fazendo para $x = 0$: $2\arcsen(0) = 0, \arccos(1) = 0$.
6. (a) 2
(b) 0
(c) ∞
(d) ∞
(e) ∞
(f) 5
(g) a
(h) 0
(i) 1
(j) 0
(k) ∞
(l) 0
(m) 0
(n) 0
(o) ∞
7. $y = 2x^5 + x^3 + 2x, y' = 10x^4 + 3x^2 + 2$, como a função derivada é sempre "não-negativa" por conta de ser elevada a quarta, ao quadrado e ser somado dois, a função é crescente em todos os pontos.
8. $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$. Crescente: $f'(x) > 0$, se $(1 - \ln(x)) > 0 \Rightarrow \ln(x) < 1 \Rightarrow 0 < x < e$. Decrescente: $1 - \ln(x) < 0 \Rightarrow \ln(x) > 1 \Rightarrow x > e$
9. $f'(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$. Crescente: $f'(x) > 0, x < 0$. Decrescente: $f'(x) < 0, x > 0$
10. (a) Não possui.
(b) Mínimo 3 em $x = 0$. Não tem máximo.
(c) Não possui.
(d) Máximo -1 em $x = 1$. Não tem mínimo.
(e) Mínimo 4 em $x = \frac{1}{2}$. Não tem máximo.
11. $c > \frac{3}{2}$
12. $f''(x) = 2, x > 0; f''(x) = -2, x < 0$. Como a função "muda de concavidade" em 0, há um ponto de inflexão em $(0, 0)$. $f'(x) = 2x$, as derivadas laterais são diferentes; logo, $f''(0)$ não existe.
13. (a) Crescente se $0 < x < 1$ ou $x > 1$.
Derivadas iguais a zero $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 1$.
Concava para cima se $x < -1$ ou $-\frac{1}{\sqrt{5}} < x < \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $x > 1$.



- (b) Crescente se $0 < x < 8$.
Derivadas iguais a zero $x = 8$.
Derivada não existe $x = 0$.
Concavidade para baixo $x < 0$ ou $x > 0$.



- (c) Crescente se $x > -2$.
Côncava para cima se $x > -2$.

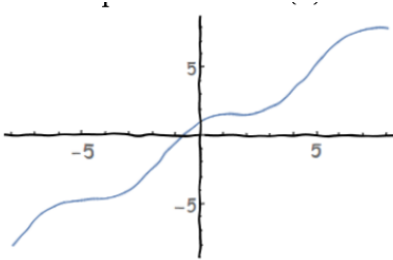


- (d) Pontos Críticos $\pi + 2\pi k$.
Crescente Exceto nos pontos críticos.
Concava para cima se $\cos(x) < 0$,

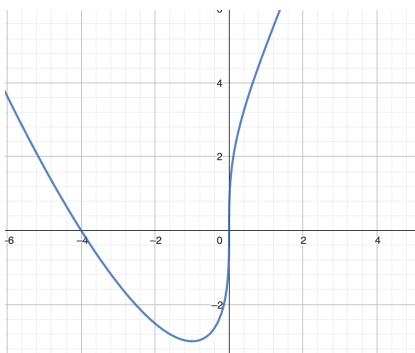
$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Concavidade para baixo se $\cos(x) > 0$,

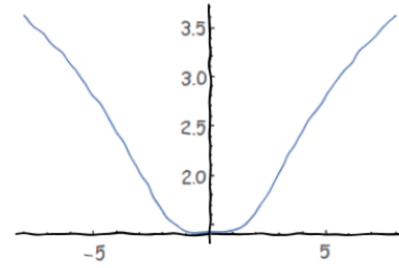
$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$



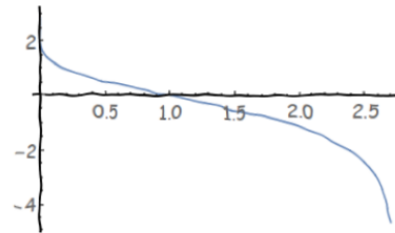
- (e) Pontos críticos em $x = 0, x = -1$.
Decrescente $x < -1$. Crescente se $x > -1$.
Côncava para cima em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.
Côncava para baixo em $(0, 2)$.



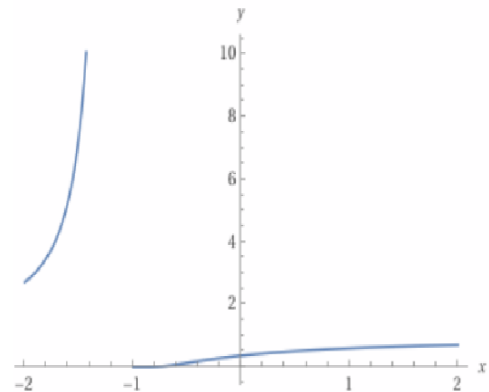
- (f) Crescente se $x > 0$.
Pontos de inflexão $x = -3$ ou $x = 3$.
Concava para cima se $-3 < x < 0$ ou $0 < x < 3$.



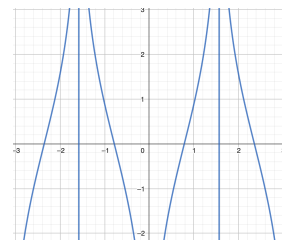
- (g) Domínio $0 < x < e$.
Crescente nunca.
Côncava para cima se $0 < x < 1$.
Côncava para baixo se $1 < x < e$.
Assíntotas verticais em $x = 0, x = e$.



- (h) Domínio $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.
Sempre crescente.
Côncava para cima $-\infty < x < -1$ ou $-1 < x < -1/2$.
Assíntotas em $y = 1$ e $x = -1$.



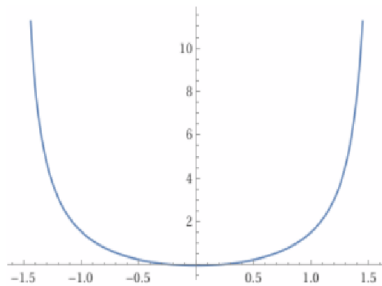
- (i) Domínio $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Crescente para $(0, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
Concavidade para cima em $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$.
Assíntota vertical em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



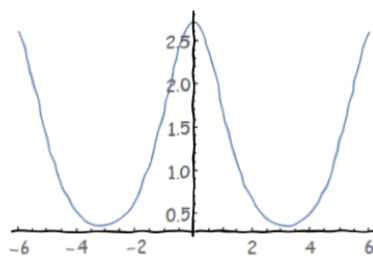
- (j) Domínio $x \neq \pm 3$
Primeira derivada $\frac{e^x(x^2-2x-9)}{(x^2-9)^2}$

Crescente se $x < -3$ ou $-3 < x < 1 - \sqrt{10}$ ou $x > 1 + \sqrt{10}$.

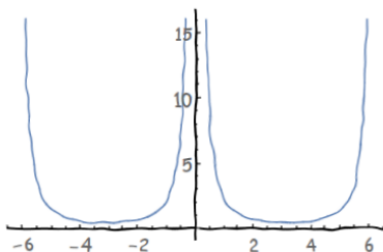
- (k) Domínio $-\pi/2 < x < \pi/2$
 Crescente em $(0, \pi/2)$
 Côncava sempre para cima.
 Assíntota vertical em $x = \pm\pi/2$



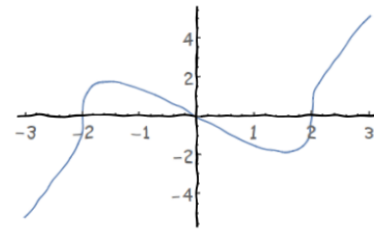
- (l) Crescente se $-\sin(x) > 0$, em $(2\pi k - \pi, 2\pi k)$.



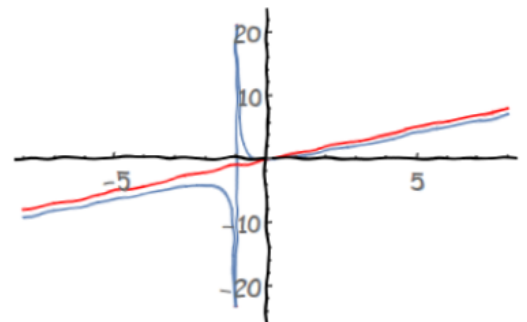
- (m) Domínio $D = (-2\pi, 2\pi) - \{0\}$.
 Crescente se $-\pi < x < 0$ ou $\pi < x < 2\pi$.
 Pontos Críticos $x = -\pi$ ou $x = \pi$
 Concava para baixo: nunca. Assíntotas verticais na origem.



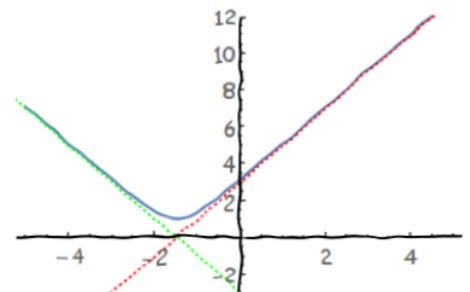
- (n) Pontos críticos: $t = 2, t = -2$
 Decrescente se $-2\sqrt{\frac{3}{5}} < t < 2\sqrt{\frac{3}{5}}$
 Côncava para cima se $-\frac{6}{\sqrt{5}} < t < -2$ ou $t > \frac{6}{\sqrt{5}}$



14. (a) Máximo Local -4 em $x = -2$.
 Mínimo Local 0 em $x = 0$.
 Crescente em $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$.
 Assíntota vertical em $x = -1$.
 Não há assíntota horizontal.
 Assíntota inclinada em $y = x - 1$.
 Côncava para baixo em $(-\infty, -1)$ e para cima em $(-1, \infty)$.



- (b) Assíntota vertical em $x = -1$.
 Assíntota horizontal em $y = 1$.
 Não possui assíntota inclinada.
 (c) Não há assíntota vertical ou assíntota horizontal.
 Assíntota inclinada em $y = x$ e $y = -x$.
 (d) Não há assíntota vertical ou assíntota horizontal.
 Assíntota inclinada em $y = 2x + 3$ e $y = -2x - 3$.



- (e) Assíntota vertical em $x = 0$.
 Não há assíntota horizontal.
 Assíntota inclinada em $y = x$.